ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 3 2021

УДК 517.977.1

О МЕТОДЕ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЕ

М. И. Гусев

В статье рассматривается нелинейная управляемая система с фазовыми ограничениями, линейная по управляющим переменным. Ограничения на управление заданы квадратичным интегральным неравенством. Для приближенного построения множества достижимости предлагается процедура снятия фазовых ограничений. Эта процедура основана на введении вспомогательной управляемой системы без ограничений, правая часть которой зависит от малого параметра. При некоторых условиях на поведение скоростей системы на границе фазовых ограничений доказана сходимость множеств достижимости вспомогательной системы к множеству достижимости исходной системы в хаусдорфовой метрике при стремлении малого параметра к нулю. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: управляемая система, интегральные ограничения, множество достижимости, фазовые ограничения.

M. I. Gusev. On the method of penalty functions for control systems with state constraints under integral constraints on the control.

We consider a nonlinear control system with state constraints. The system is linear in the control variables, and the control constraints are given by a quadratic integral inequality. A procedure for eliminating the state constraints is proposed for the approximate construction of the reachable set. The procedure is based on introducing an auxiliary unconstrained control system whose right-hand side depends on a small parameter. Under certain conditions on the behavior of the velocities of the system at the boundary of the state constraints, we prove the convergence of the reachable sets of the auxiliary system to the reachable set of the original system in the Hausdorff metric as the small parameter tends to zero. The results of numerical simulation are presented.

Keywords: control system, integral constraints, reachable set, state constraints.

MSC: 93B03, 93C15

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-59-70

1. Введение и постановка задачи

В задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями стандартное применение метода штрафных функций обычно связано с добавлением к минимизируемому функционалу штрафа, зависящего от данных ограничений. Для модифицированного таким образом функционала затем рассматривается задача управления без ограничений, решение которой служит приближением к решению исходной задачи. В задаче построения множества достижимости системы подобный подход не применим, поскольку в ее постановке отсутствует функционал и не очень понятно, как использовать функцию штрафа для снятия ограничений. При построении множеств достижимости для дифференциальных включений аналог метода штрафных функций был рассмотрен в работе [1]. Здесь функция штрафа, зависящая от фазовых ограничений и вспомогательного матричного параметра штрафа, добавлялась в правую часть дифференциального включения. Было установлено, что при выполнении некоторых не очень обременительных условий пересечение пучков траекторий семейства всем значениям матричного параметра дает пучок траекторий исходного дифференциального включения, удовлетворяющих фазовым ограничениям. Применение данной схемы в расчетах осложняется необходимостью выполнять операцию пересечения множеств по значениям многомерного (матричного) параметра и тем обстоятельством, что для множества достижимости эта операция позволяет получить только оценку сверху. В [2] для решения задачи быстродействия с фазовыми ограничениями было предложено модифицировать правую части управляемой системы (дифференциального включения) так, чтобы в окрестности границы ограничений вектор скорости системы направлялся внутрь ограничений. При этом траектории построенной системы без фазовых ограничений являются траекториями исходной системы, для которых фазовое ограничение выполняется с точностью, определяемой величиной скалярного параметра штрафа. При неограниченном увеличении последнего эти траектории аппроксимируют траектории исходной системы, удовлетворяющие фазовым ограничениям. В работе [3] подобный подход использован для снятия фазовых ограничений при построении множеств достижимости. Здесь множества достижимости модифицированной системы аппроксимируют множества достижимости исходной системы сверху по включению в метрике Хаусдорфа, оценки точности аппроксимации опираются на результаты [4]. Иная схема аппроксимации, идейно близкая методу внутренних штрафных функций и позволяющая аппроксимировать множества достижимости изнутри, рассмотрена в [5; 6].

В данной статье изучаются методы штрафных функций применительно к системам с интегральными ограничениями на управление. Интегральные ограничения характеризуют обычно ресурсы управления: ограничение расхода топлива, энергии и т. п. Задачи такого рода часто рассматриваются в теории управления [7] и дифференциальных играх [8; 9]. Множества достижимости для таких систем — это множества состояний, достижимых при ограничениях на ресурс управления. Свойства множеств достижимости в системах с интегральными ограничениями исследовались в работах [10; 11]. Алгоритмы приближенного построения множеств достижимости изучались во многих работах (см., например, [12–15]). Ниже приведена общая постановка задачи. Во втором разделе рассматривается аналог метода из [3], который дает при определенных условиях аппроксимацию множества достижимости сверху. Третий раздел посвящен задаче снятия фазовых ограничений при помощи внутренних (барьерных) функций штрафа.

Мы рассматриваем управляемые системы вида

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t)) + f_2(x(t))u(t), \quad 0 \le t \le T, \quad x(t_0) = x^0, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий параметр, $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n,\ f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n\times r}$ — непрерывные отображения, x^0 — заданное подмножество $\mathbb{R}^n$.

Далее будем предполагать, что функции f_1 и f_2 локально липшицевы по x, а также удовлетворяют условиям подлинейного роста и ограниченности:

$$\|f_1(x)\| \le l_1(1 + \|x\|), \quad \|f_2(x)\|_{n\times r} \le l_2, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Здесь $l_1,\ l_2$ — некоторые положительные константы, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора, $\|\cdot\|_{n\times r}$ — евклидова норма $n \times r$ матрицы.

В качестве управления будем рассматривать вектор-функции из пространства $\mathbb{L}_p[0,T]$, $p > 1$, с нормой $\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_p} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt\right)^{1/p}$. Решением (траекторией) системы (1.1), отвечающим управлению $u(\cdot)$, будем называть абсолютно непрерывную функцию $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую (1.1) для почти всех $t \in [0,T]$. Обозначим через $x(t, u(\cdot), x^0)$ решение системы с начальным условием $x(t_0) = x^0$. Ограничения на управление заданы включением

$$u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_p}(0,\mu), \tag{1.3}$$

где $B_{\mathbb{L}_p}(0,\mu)$ — шар радиуса $\mu > 0$ с центром в нуле в $\mathbb{L}_p$.

Пусть множество S, задающее фазовые ограничения, имеет вид

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) \le 0\}, \tag{1.4}$$

где $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, и пусть $x^0 \in S$.

Множеством (областью) достижимости системы (1.1) с фазовым ограничением (1.4) в момент времени T назовем множество

$$G_0(T) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_p}(0,\mu),\ x = x(T,u(\cdot),x^0),\ x(t,u(\cdot),x^0) \in S,\ t_0 \le t \le T\}.$$

Таким образом, $G_0(T)$ — множество всех точек, в которые можно перевести систему (1.1) в момент времени θ из начального состояния x^0 при ограничениях (1.3), (1.4). Через $G(T)$ обозначим множество достижимости системы (1.1) без учета фазовых ограничений

$$G(T) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_p}(0,\mu),\ x = x(T,u(\cdot),x^0)\}.$$

2. Аналог метода внешних штрафных функций

Далее будем предполагать, что $\nabla g(x) \ne 0$ при $g(x) = 0$. При выполнении этого условия имеет место равенство $\partial S = \{x\colon g(x) = 0\}$ [3]. Обозначим $S_\varepsilon = \{x\colon g(x) \le \varepsilon\}$. Будем считать, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что множество S_{ε_0} компактно.

При выполнении условия (1.2) множество траекторий системы (1.1) компактно в пространстве непрерывных функций $\mathbb{C} = \mathbb{C}[0,T]$ [16]. Отсюда и из замкнутости S следует компактность множеств достижимости $G(T)$ и $G_0(T)$. Будем далее считать, что $G_0(T) \ne \varnothing$.

Обозначим через S^δ δ-окрестность множества S: $S^\delta = S + B(0,\delta)$, где $B(0,\delta) \in \mathbb{R}^n$ — замкнутый шар радиуса δ с центром в нуле. Справедлива

Лемма 1. *Для каждого $\delta > 0$ найдется $\bar\varepsilon > 0$ такое, что $S_\varepsilon \subset S^\delta$ для любого $0 \le \varepsilon \le \bar\varepsilon$.*

Доказательство проводится стандартными рассуждениями от противного, использующими компактность множеств S_ε. □

Пусть $a(x) = \nabla g(x)^\top f_1(x)$, $b(x) = \nabla g(x)^\top f_2(x)$.

Предположение 1. 1) *Для каждого $x \in \partial S$ из равенства $b(x) = 0$ следует неравенство $a(x) < 0$.* 2) *Найдется $\sigma > 0$ такое, что $a(x) \le 0$ при $0 \le g(x) \le \sigma$.*

Из непрерывности $a(x), b(x)$ и компактности множества S следует, что условие 1) данного предположения выполнено и в некоторой δ-окрестности S^δ. В этом случае можно определить на S^δ неотрицательную функцию $p(x)$ равенством

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{a(x) + \sqrt{a^2(x) + (b^\top(x)b(x))^2}}{b^\top(x)b(x)} & \text{при} \quad b(x) \ne 0, \\ 0 & \text{при} \quad b(x) = 0. \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено предположение* 1. *Вектор-функция $\bar u(x)$, определенная равенством $\bar u(x) = -g(x)p(x)b^\top(x)$, непрерывно дифференцируема на S^δ. Найдется такое $\sigma > 0$, что для системы*

$$\dot x = f_1(x) + f_2(x)\bar u(x) \tag{2.1}$$

в области $\{x\colon 0 < g(x) \le \sigma\}$ выполняется неравенство $\dfrac{d}{dt}g(x) < 0$, где

$$\frac{d}{dt}g(x) = (\nabla g(x), f_1(x) + f_2(x)\bar u(x))$$

— производная функции $g(x)$ в силу системы (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $a(x) < 0$ при $b(x) = 0$, то функция $p(x)$ непрерывно дифференцируема [17]. Отсюда следует непрерывная дифференцируемость $\bar{u}(x)$. Производную $\dfrac{d}{dt}g(x)$ в силу системы (1.1) запишем в виде $\dfrac{d}{dt}g(x) = a(x) - g(x)p(x)b(x)b^{\top}(x)$. Если $b(x) = 0$, то $\dfrac{d}{dt}g(x) = a(x) < 0$. При $b(x) \neq 0$ получаем

$$\frac{d}{dt}g(x) = a(x) - g(x)\bigl(a(x) + \sqrt{a^2(x) + (b(x)b^{\top}(x))^2}\bigr).$$

Если $a(x) = 0$, то $\dfrac{d}{dt}g(x) = -g(x)|b(x)b^{\top}(x)| < 0$. При $a(x) < 0$ имеем $\dfrac{d}{dt}g(x) \leq a(x) - g(x)|a(x)| < 0$. $\square$

Построим управляемую систему

$$\dot{x} = f^{\varepsilon}(x,u), \quad x(t_0) = x^0, \tag{2.2}$$

правая часть которой зависит от малого параметра ε, такую, чтобы траектории системы (2.2) приближенно удовлетворяли фазовым ограничениям (1.4) и при стремлении ε к нулю аппроксимировали бы траектории исходной системы. Функцию $f^{\varepsilon}(x,u)$ определим на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) \leq \sigma\}$ следующим образом. Положим

$$f^{\varepsilon}(x,u) = \begin{cases} h_{\varepsilon}(g(x))(f_1(x) + f_2(x)u) + \bigl(1 - h_{\varepsilon}(g(x))\bigr)\bigl(f_1(x) + f_2(x)\bar{u}(x)\bigr) & \text{при} \quad g(x) > 0, \\ f_1(x) + f_2(x)u & \text{при} \quad g(x) \leq 0, \end{cases}$$

где $h_{\varepsilon}(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — любая непрерывно дифференцируемая функция такая, что $0 \leq h_{\varepsilon}(\tau) \leq 1$, $h_{\varepsilon}(\tau) = 1$ при $\tau < 0$, $h_{\varepsilon}(\tau) = 0$ при $\tau > \varepsilon$.

Заметим, что при $g(x) > 0$ $f^{\varepsilon}(x,u) = f_1(x) + f_2(x)(h_{\varepsilon}(g(x))u + \bigl(1 - h_{\varepsilon}(g(x))\bigr)\bar{u}(x))$. Поэтому систему (2.2) можно записать в виде

$$\dot{x} = f_1^{\varepsilon}(x) + f_2^{\varepsilon}(x)u. \tag{2.3}$$

Здесь $f_1^{\varepsilon}(x) = f_1(x)$, $f_2^{\varepsilon}(x) = f_2(x)$ при $g(x) \leq 0$, а при $g(x) > 0$

$$f_1^{\varepsilon}(x) = f_1(x) + f_2(x)\bigl(1 - h_{\varepsilon}(g(x))\bigr)\bar{u}(x), \quad f_2^{\varepsilon}(x) = f_2(x)h_{\varepsilon}(g(x))u.$$

Лемма 3. *Существует $\delta > 0$ такое, что функции $f_1^{\varepsilon}(x)$, $f_2^{\varepsilon}(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы в замкнутой δ-окрестности S^{δ} множества S.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 2 следует непрерывная дифференцируемость $\bar{u}$ на S^{δ}. Дальнейшее доказательство проводится по схеме работы [3]. $\square$

Теорема 1. *Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют условию* (1.2) *и предположению* 1. *Тогда для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и любого $u(\cdot) \in \mathbb{L}_p$ решение $x_{\varepsilon}(t)$ системы* (2.2) *с начальным условием $x_{\varepsilon}(0) = x^0$ определено на $[0,T]$ и удовлетворяет неравенству $g(x_{\varepsilon}(t)) \leq \varepsilon$, $t \in [0,T]$. Имеет место включение $G_0(T) \subset G_{\varepsilon}(T)$ и $h(G_0(T), G_{\varepsilon}(T)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, где $h_0(G(T), G_{\varepsilon}(T))$ — хаусдорфово расстояние между множествами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 3 правая часть системы (2.2) определена на некоторой δ-окрестности множества S. Фиксируем $\bar{\varepsilon} > 0$ такое, что $S_{\varepsilon} \subset S^{\delta}$ при $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ (см. лемму 1). Возьмем любое $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$. Так как $f_1^{\varepsilon}(x)$, $f_2^{\varepsilon}(x)$ непрерывно дифференцируемы, то для любого $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ существует единственное решение системы (2.2) $x_{\varepsilon}(t)$, удовлетворяющее условию $x_{\varepsilon}(0) = x^0$. Покажем, что решение продолжимо на весь отрезок $[0,T]$. Пусть $[0,\theta]$ — максимальный промежуток времени, на котором определено $x_{\varepsilon}(t)$. Предположим, что $\theta < T$. Покажем, что $g(x_{\varepsilon}(t)) \leq \varepsilon$ на $[0,\theta]$. Действительно, допустим от противного, что найдется $t^* \in [0,\theta]$, для которого $g(x_\varepsilon(t)) > \varepsilon$. Положим $t_* = \max\{t \in [0, t^*]\colon g(x_\varepsilon(t)) = \varepsilon\}$. Такой момент обязательно найдется, так как $g(x_\varepsilon(0)) \le 0$ и функция $g(x_\varepsilon(t))$ непрерывна. На полуинтервале $(t_*, t^*]$ выполняется неравенство $g(x_\varepsilon(t)) > \varepsilon$, следовательно, $h_\varepsilon\big(g(x_\varepsilon(t))\big) = 0$. Поэтому

$$\frac{d}{dt}g(x_\varepsilon(t)) = \big(\nabla g(x_\varepsilon(t)), f_1(x_\varepsilon(t)) + f_2(x_\varepsilon(t))\bar{u}(x_\varepsilon(t))\big) < 0, \quad t \in (t_*, t^*],$$

и, значит, $\varepsilon = g(x_\varepsilon(t_*)) > g(x_\varepsilon(t^*)) > \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает первую часть утверждения теоремы.

Для доказательства второй части заметим, что при $g(x) \le 0$ мы имеем $f_1^\varepsilon(x) = f_1(x)$, $f_2^\varepsilon(x) = f_2(x)$; отсюда любая траектория исходной системы, удовлетворяющая фазовым ограничениям, является траекторией системы (2.2). Поэтому $G_0(T) \subset G_\varepsilon(T)$. Пусть $u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_p}(0, \mu)$, $x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t, u(\cdot))$ — траектория системы (2.2), отвечающая управлению $u(\cdot)$. Тогда

$$\dot{x_\varepsilon}(t) = f_1(x_\varepsilon(t)) + f_2(x_\varepsilon(t))v(t),$$

где обозначено $v(t) = \alpha_\varepsilon(t)u(t) + (1 - \alpha_\varepsilon(t))\bar{u}_\varepsilon(t)$, $\alpha_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(g(x_\varepsilon(t))$, $\bar{u}_\varepsilon(t) = \bar{u}(x_\varepsilon(t))$. Так как $g(x_\varepsilon(t)) \le \varepsilon$ и функция $p(x)b^\top(x)$ ограничена на S^δ некоторой константой K, то, учитывая, что $0 \le \alpha_\varepsilon(t) \le 1$, имеем $\|\bar{u}(x_\varepsilon(t))\| \le K\varepsilon$. Таким образом, $\|v(\cdot)\|_{\mathbb{L}_p} \le \|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_p} + \|\bar{u}_\varepsilon(\cdot)\|_{\mathbb{L}_p} \le \mu + K\varepsilon$.

Докажем, что $h(G_0(T), G_\varepsilon(T)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Допустим противное. Тогда найдутся последовательность $\varepsilon_m \to 0$, $m \to \infty$ и число $\gamma > 0$, такие что $h(G(T), G_{\varepsilon_m}(T)) \ge \gamma$. Выберем управления $u_m(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_p}(0, \mu)$ такие, что для $x_m = x_{\varepsilon_m}(T, u_m(\cdot))$ выполняются неравенства

$$d(x_m, G(T)) = \max_{x \in G_0(T)} \|x_m - x\| \ge \gamma/2.$$

Каждая из траекторий $x_{\varepsilon_m}(t)$ является траекторией исходной системы (1.1) $x_{\varepsilon_m}(t, u_m(\cdot)) = x(t, v_m(\cdot)$, где $v_m(\cdot) = \alpha_m(t)u_m(t) + (1 - \alpha_m(t))\bar{u}_m(t), \alpha_m(t) = h_{\varepsilon_m}(g(x_{\varepsilon_m}(t)), \bar{u}_m(t) = \bar{u}(x_{\varepsilon_m}(t))$. Множество траекторий $x(t, v_m(\cdot))$, порожденных управлениями из замкнутого шара в $\mathbb{L}_p$ компактно в $\mathbb{C}$ (см., например, [11; 16]), поэтому не ограничивая общности можно считать, что $x(t, u_m(\cdot))$ равномерно сходится к некоторой траектории $x(t, u_0(\cdot))$, где $\|u_0(\cdot)\|_{\mathbb{L}_p} \le \mu + K\varepsilon_m$ для любого m, и, следовательно, $u_0(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_p}(0, \mu)$. Таким образом, $x(T, u_0(\cdot)) \in G_0(T)$, но при этом $d(x(T, u_0(\cdot)), G_0(T)) \ge \gamma/2 > 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

З а м е ч а н и е 1. Требование компактности множества S добавлено для упрощения изложения. Поскольку множество достижимости без фазовых ограничений в данной задаче компактно, условия предположения 1 можно проверять на пересечении S с шаром достаточно большого радиуса (см. [3]).

З а м е ч а н и е 2. Предположение 1, положенное в основу доказательства, состоит из двух условий. Первое заключается в том, что равенство $b(x) = 0$ возможно только в тех точках границы ограничений, где $a(x) < 0$. Оно эквивалентно выполнению неравенства $\inf_u(\nabla g(x), f_1(x) + f_2(x)u) < 0$ вблизи границы. В задаче с геометрическими ограничениями на управление подобное условие достаточно, чтобы обеспечить сходимость метода штрафных функций, если в качестве обратной связи $\bar{u}$, разворачивающей вектор скорости во внутрь ограничений, выбрать $\bar{u}(x) = -p(x)b^\top(x)$ [3]. В задаче с интегральными ограничениями это, вообще говоря, может привести к расходованию дополнительного ресурса управления. Поэтому в формулу для $\bar{u}(x)$ добавляется множитель $g(x)$, что обеспечивает близость к нулю расходуемого вблизи границы ресурса управления. Но обоснование сходимости метода в этом случае требует добавления достаточного сильного условия 2).

3. Внутренние штрафные функции

В данном разделе мы рассмотрим еще один вариант снятия фазовых ограничений. Этот вариант использует внутренние (барьерные) функции штрафа, и по характеру их применения он ближе к классическим методам штрафных функций. Барьерной называют определенную на внутренности допустимого множества функцию, которая стремится к бесконечности при приближении ее аргумента к границе множества.

Для построения множества достижимости предлагается решать совокупность задач оптимального управления с терминальным критерием, представляющим функцию расстояния от правого конца траектории системы до точки в пространстве состояний. Множество достижимости или его аппроксимация в этом случае может быть представлено в виде множества уровня функции цены. Подобный подход широко применяется при построении множеств достижимости (см., например, [18–21]). Для нахождения функции цены применяются методы динамического программирования, использующие минимаксные и вязкостные решения уравнений Гамильтона — Якоби [22; 23].

В данном разделе статьи не рассматривается алгоритм вычисления функции цены, а обсуждается только возможность снятия фазовых ограничений при помощи штрафных функций. Рассмотрим произвольную неотрицательную непрерывную функцию $p(\xi) : (0, a] \to [0, \infty)$ такую, что $p(\xi) \to \infty$ при $\xi \to 0$. Здесь a — некоторое положительное число. В качестве барьерной функции будем брать функцию вида $p(-g(x))$, где $g(x)$ задает фазовые ограничения. Очевидно, $p(-g(x))$ определена при $g(x) < 0$. В качестве a можно взять любое число $a \geq \max(-g(x))$. В качестве функции $p(\xi)$ можно брать, например, $\max\{-\ln(\xi), 0\}$, $1/\xi$.

Для заданного $x \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим следующую задачу оптимального управления с терминальным функционалом:

$$\|x(T) - x\| \to \min, \tag{3.1}$$

$$J(u(\cdot)) + \varepsilon \int\limits_0^T p\bigl(-g(x(t))\bigr)\, dt \leq \mu^p \tag{3.2}$$

на траекториях системы (1.1). Здесь $J(u(\cdot)) = \int_0^T \|u(t)\|^p dt$, $\varepsilon > 0$ — параметр штрафа. В отличие от классического метода штрафных функций мы добавляем функцию штрафа к ограничениям задачи.

В данном разделе в отличие от предыдущего нам не потребуется использовать условия, связывающее градиент функции $g(x)$ и правую часть управляемой системы. Функцию $g(x)$ будем считать непрерывной. Единственное условие налагаемое на фазовые ограничения — это предположение о существовании внутренней траектории.

Предположение 2. *Существует управление $u^*(t)$ и отвечающая этому управлению траектория $x^*(t)$ системы* (1.1) *такие, что*

$$J(u^*(\cdot)) < \mu^p, \quad g(x^*(t)) < 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x^*(0) = x^0. \tag{3.3}$$

Если выполнено данное предположение, то $G_0(T) \neq \varnothing$.

Утверждение 1. *Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ задача* (3.1), (3.2) *имеет решение $u^0(t), x^0(t)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество пар $u(t), x(t)$, для которых выполняется неравенство (3.2), непусто. Действительно, пусть $u^*(t), x^*(t)$ удовлетворяют условиям (3.3). Поскольку $\int_0^T p\bigl(-g(x^*(t))\bigr)dt < \infty$, то достаточно выбрать $\bar{\varepsilon}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\bar{\varepsilon} \int\limits_0^T p\bigl(-g(x^*(t))\bigr)dt \leq \mu^p - J(u^*(\cdot)).$$

Тогда $u^*(t), x^*(t)$ удовлетворяют ограничениям для всех $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$.

Пусть $(u_k(\cdot), x_k(\cdot))$ — минимизирующая последовательность в задаче (3.1), (3.2). Так как $J(u_k(\cdot)) \le \mu^p$, то множество управлений слабо компактно в $\mathbb{L}_p$, а множество траекторий компактно в $\mathbb{C}$ [11;16]. Найдется подпоследовательность $(u_{k_m}(\cdot), x_{k_m}(\cdot))$ такая, что $u_{k_m}(\cdot)$ сходится слабо к $u_0(\cdot)$, $J(u_0(\cdot)) \le \mu^p$, $x_{k_m}(t)$ сходится равномерно к $x_0(t)$ и пара $u_0(t), x_0(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1).

Траектория $x_0(t)$ не может попасть на границу множества фазовых ограничений S. Действительно, допустим, что $g(x_0(\bar t)) = 0$ для некоторого $\bar t \in [0,T]$. Множество траекторий $x_{k_m}(t)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Задав достаточно малое $\sigma > 0$, найдем $\delta > 0$ такое, что $\|x_{k_m}(t) - x_{k_m}(\bar t)\| \le \sigma$ для всех m, где $|\bar t - t| \le \delta$, $t \in [0,T]$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется $\bar m \in \mathbb{N}$ такое, что $p\big(-g(x_{k_m}(t))\big) \ge N$ для всех $m \ge \bar m$, $|\bar t - t| \le \delta$. Следовательно,

$$J(u_{k_m}(\cdot)) + \varepsilon \int\limits_0^T p\big(-g(x_{k_m}(t))\big)dt \ge J(u_{k_m}(\cdot)) + \varepsilon N > \mu^p$$

для достаточно больших N, и, значит, $(u_{k_m}(\cdot), x_{k_m}(\cdot))$ не удовлетворяют ограничению (3.2).

Так как $g(x)$ непрерывна, то $g(x_{k_m}(t))$ равномерно сходится к $g(x_0(t))$. Учитывая, что в силу слабой сходимости $u_{k_m}(\cdot)$ к $u_0(\cdot)$ при $k \to \infty$ $J(u_0(\cdot)) \le \underline{\lim}\, J(u_{k_m}(\cdot))$ и в силу неравенства $g(x_0(t)) < 0$, $0 \le t \le T$,

$$\int\limits_0^T p\big(-g(x_0(t))\big)dt = \lim \int\limits_0^T p\big(-g(x_{k_m}(t))\big)dt,$$

получим, что $u_0(t), x_0(t)$ — решение рассматриваемой задачи оптимального управления. $\square$

Обозначим оптимальное значение задачи, зависящее от x и ε, символом $V_\varepsilon(x)$. Далее устанавливается связь функции $V_\varepsilon(x)$ с множеством достижимости исходной задачи управления.

Утверждение 2. *Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ $V_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию Липшица по x с константой равной 1. Для каждого x существует предел $\lim_{\varepsilon\to+0} V_\varepsilon(x) =: V_0(x)$. Функция $V_0(x)$ также липшицева и справедливы следующие соотношения:*

$$G_\varepsilon^-(T) := \{x\colon V_\varepsilon(x) \le 0\} \subseteq G_0^-(T) := \{x\colon V_0(x) \le 0\} \subseteq G_0(T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$. Обозначим через $x_1(t), x_2(t)$ оптимальные траектории в задаче (3.1), (3.2) при $x = x_1$, $x = x_2$ соответственно. Тогда

$$V_\varepsilon(x_1) = \|x_1 - x_1(T)\| \le \|x_1 - x_2(T)\| \le \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - x_2(T)\| = \|x_1 - x_2\| + V_\varepsilon(x_2),$$

откуда следует, что $V_\varepsilon(x_1) - V_\varepsilon(x_2) \le \|x_1 - x_2\|$. Аналогично доказывается неравенство $V_\varepsilon(x_2) - V_\varepsilon(x_1) \le \|x_1 - x_2\|$. Таким образом,

$$|V_\varepsilon(x_1) - V_\varepsilon(x_2)| \le \|x_1 - x_2\|. \tag{3.4}$$

При фиксированном x $V_\varepsilon(x)$ — ограниченная снизу монотонно невозрастающая с убыванием $\varepsilon > 0$ функция. Отсюда следует существование конечного предела $V_0(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} V_\varepsilon(x)$. Переходя к пределу в (3.4), получим, что данное неравенство выполняется и для $V_0(x)$.

Включение $G_\varepsilon^-(T) \subseteq G_0^-(T)$ является прямым следствием неравенства $V_0(x) \le V_\varepsilon(x)$. Докажем второе из включений. Пусть $x \in G_0^-(T)$, т.е. $V_0(x) = 0$. Это означает, что найдется последовательность $\varepsilon_k \to 0$ такая, что $V_\varepsilon(x) \to 0$. Для каждого ε_k выберем пару $u_k(\cdot), x_k(\cdot)$, на которой достигается минимум в задаче (3.1), (3.2). Полученная последовательность содержит сходящуюся к некоторой траектории $u_0(\cdot), x_0(\cdot)$ подпоследовательность. Не ограничивая общности можно считать, что $u_k(\cdot)$ слабо сходится к $u_0(\cdot)$, $x_k(\cdot)$ равномерно сходится к $x_0(\cdot)$.

Тогда $J(u_0(\cdot)) \le \varliminf J(u_k(\cdot))$, $x_k(T) \to x_0(T) = x$, так как $\|x_k(T) - x\| \to 0$, $k \to \infty$. Из условия $g(x_k(t)) < 0$ вытекает, что $g(x_0(t)) \le 0,\ 0 \le t \le T$. Таким образом, $x = x_0(T) \in G_0(T)$, что завершает доказательство. □

Каждое из множеств $G_\varepsilon^-(T)$ является внутренней оценкой множества достижимости системы с фазовым ограничением, $G_0^-(T)$ — максимальная по включению оценка. В общем случае $G_0^-(T)$ не совпадает с множеством достижимости. Однако для систем с линейной динамикой и выпуклыми фазовыми ограничениями имеет место совпадение.

Теорема 2. *Пусть динамика управляемой системы описывается линейным уравнением* $\dot{x} = Ax + Bu, x(t_0) = x^0$, *и фазовые ограничения заданы выпуклой функцией* $g(x)$. *Если выполнено предположение* 2 *о существовании внутренней траектории, то справедливо равенство* $G_0^-(T) = G_0(T)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $G_0(T) \subseteq G_0^-(T)$. Пусть $x \in G_0(T)$ и пусть $u_0(t)$ — управление такое, что $J(u_0(\cdot)) \le \mu^p$, $g(x_0(t)) \le 0, 0 \le t \le T, x_0(T) = x$. Здесь $x_0(t)$ — траектория, порожденная управлением $u_0(t)$. Рассмотрим внутреннюю траекторию $u^*(t), x^*(t)$ и для $0 < \alpha \le 1$ обозначим $u_\alpha(t) = (1-\alpha)u_0(t) + \alpha u^*(t)$. Ввиду линейности управляемой системы соответствующая $u_\alpha(t)$ траектория имеет вид $x_\alpha(t) = (1-\alpha)x_0(t) + \alpha x^*(t)$. Из выпуклости J и g следует

$$J(u_\alpha(\cdot)) \le (1-\alpha)J(u_0(\cdot)) + \alpha J(u^*(\cdot)) \le \mu^p - \alpha(\mu^p - J(u^*(\cdot)),$$

$$g(x_\alpha(t)) \le (1-\alpha)g(x_0(t)) + \alpha g(x^*(t)) \le \alpha g(x^*(t)) \le -\alpha\bar{g},$$

где $\bar{g} = \min_t |g(x^*(t))|$. Для фиксированного $\alpha > 0$ выберем $\varepsilon(\alpha) > 0$ так, чтобы $\varepsilon(\alpha) \le \alpha$ и выполнялось неравенство

$$J(u_\alpha(\cdot)) + \varepsilon(\alpha)\int_0^T p\big(-g(x_\alpha(t))\big)dt \le \mu^p.$$

В силу того, что $\int_0^T p\big(-g(x_\alpha(t))\big)dt < \infty$, для этого достаточно выбрать $\varepsilon(\alpha)$ из условия

$$\varepsilon(\alpha)\int_0^T p\big(-g(x_\alpha(t))\big)dt \le \alpha\big(\mu^p - J(u^*(\cdot))\big).$$

Управление $u_\alpha(t)$ и траектория $x_\alpha(t)$ удовлетворяют ограничениям (3.2) при $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$, следовательно, $\|x_\alpha(T) - x\| \ge V_{\varepsilon(\alpha)}(x) \ge V_0(x)$. Учитывая, что $x_\alpha(T) \to x$ при $\alpha \to 0$, получаем $V_0(x) \le 0$. Таким образом, $x \in G_0^-(T)$. □

4. Примеры

Пример 1. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x(0) = (0,0), \quad \int_0^2 u^2(t)dt \le 2, \quad 0 \le t \le 2,$$

пусть фазовые ограничения заданы неравенством $|x_2(t)| \le 1$. В данном примере $g(x) = |x_2| - 1$ не дифференцируема при $x_2 = 0$. Это не ограничивает применение предлагаемого метода, так как по сути дифференцируемость $g(x)$ нужна только в окрестности границы S, т. е. при x_2, близких к 1 и -1. Таким образом, $\nabla g(x) = (1,0)$ при $x_2 > 0$, $\nabla g(x) = (-1,0)$ при $x_2 < 0$.

Следовательно, $a(x) = (\nabla g(x), (x_2, 0)) \equiv 0$, $b(x) = (\nabla g(x), (0, 1)) = \mathrm{sign}(x_2)$, и, значит, условия предположения 1 в данном примере выполнены.

Выберем функцию $h_\varepsilon(\tau)$ в виде кусочно-квадратичной функции [3]. Так как $p(x) \equiv 1$, то управление $\bar{u}(x)$, обеспечивающее разворот вектора скорости системы внутрь фазовых ограничений, задается формулой $\bar{u}_(x) = -g(x)p(x)b(x) = -(|x_2| - 1)\mathrm{sign}(x_2)$.

Аппроксимирующая система (2.2) задана уравнениями $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = s_\varepsilon(x_2, u)$, где

$$s_\varepsilon(x_2, u) = h_\varepsilon(|x_2| - 1)\, u - (1 - h_\varepsilon(|x_2| - 1))(|x_2| - 1)\mathrm{sign}(x_2).$$

Результаты численного моделирования по приведенному во втором разделе алгоритму показывают, что множества достижимости $G_0(T)$ и $G_\varepsilon(T)$ оказываются близкими при малых ε. Построение множеств достижимости проводилось при помощи метода Монте-Карло, использующего представление управлений в виде линейной комбинации ортогональных многочленов со случайным выбором коэффициентов.

Если рассмотреть множества достижимости этой же системы, но при фазовых ограничениях на первую координату системы: $g(x) = |x_1| - 1$, то в этом случае $a(x) = x_2$ при $x_1 > 0$, $a(x) = -x_2$ при $x_1 < 0$, $b(x) \equiv 0$, и условия предположения 1 не выполняются. Численное моделирование показывает, что $G_0(T)$ и $G_\varepsilon(T)$, построенное при $\varepsilon = 0.1$, отстоят далеко друг от друга.

П р и м е р 2. Рассмотрим управляемую систему (рис. 1)

$$\dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x(0) = (0, 0), \quad \int\limits_0^T u^2(t)dt \le 1, \quad 0 \le t \le T, \quad T = 2.4 \tag{4.5}$$

с фазовым ограничением $|x_2(t)| \le \phi(x_1)$, где $\phi(x_1) = (x_1 - T/2)^2 + 0.1$. Так как $x_1(t) = t$, то фактически мы имеем дело с системой первого порядка $\dot{x} = u$ с нестационарным фазовым ограничением $|x| \le \phi(t)$. В силу линейности и симметрии системы (4.5) и в силу ограничений относительно оси x_1 множество достижимости $G_0(T)$ — отрезок $G_0(T) = \{(x_1, x_2)\colon x_1 = T, |x_2| \le \gamma\}$.

Величину γ можно найти, решив задачу оптимального управления $x_2(T) \to \max$ для системы (4.5) при фазовом ограничении $x_2 \le \phi(x_1)$. Путем ее дискретизации и решения получившейся задачи квадратичного программирования было найдено приближенное значение $\gamma = \max x_2(T) = 1.11$.

Посмотрим, что дает снятие фазовых ограничений при помощи использования системы вида (2.3). В дальнейшем мы будем рассматривать траекторию, выходящую за верхнюю часть границы фазовых ограничений, вблизи нее $g(x) = x_2 - \phi(x_1)$. В этом случае имеем

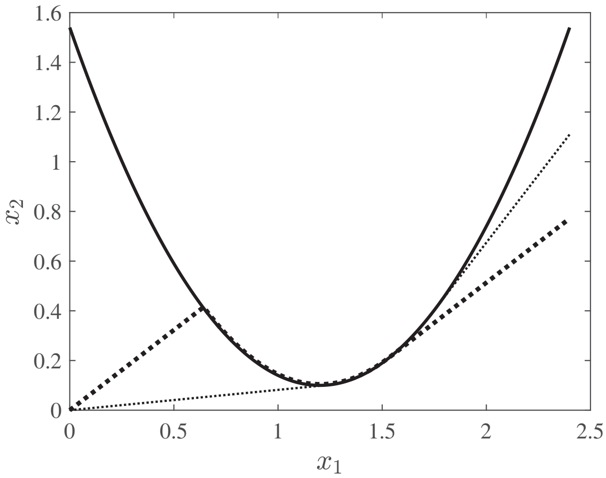

Рис. 1.

$a(x) = -\phi'(x_1)$, $b(x) = 1$, $p(x) = a(x) + \sqrt{a^2(x)+1}$. Так как условие $a(x) < 0$ при $b(x) = 0$ здесь выполнено, управление $\bar{u}(x) = -p(x)$ обеспечивает выполнение неравенства $dg(x)/dt < 0$ вблизи границы фазового ограничения. Любая траектория системы

$$\dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = h_\varepsilon(x_2 - \phi(x_1))u + \bigl(1 - h_\varepsilon(x_2 - \phi(x_1))\bigr)\bar{u}(x), \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \tag{4.6}$$

не выходит за пределы множества $\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 \le \phi(x_1) + \varepsilon\}$. Численное моделирование, проведенное с помощью метода Монте Карло при $\varepsilon = 0.01$ для 50000 траекторий системы (4.6), показывает, что для всех полученных траекторий выполняется неравенство $x_2(T) \le \gamma$. То есть в данном примере множества $G_\varepsilon(T)$ аппроксимируют $G_0(T)$, хотя условие 2) предположения 1 и не выполняется. На рис. 1 жирной сплошной линией изображено фазовое ограничение, пунктиром — траектория системы (4.5), удовлетворяющая фазовым ограничениям и максимизирующая величину $x_2(T)$. Жирным пунктиром обозначена траектория системы (4.6), отвечающая управлению $u(t) \equiv 1/\sqrt{T}$. Это управление удовлетворяет интегральному ограничению и переводит систему (4.5) на границу множества достижимости $G(T)$ без фазовых ограничений. При этом фазовые ограничения нарушаются. В системе (4.6) соответствующая траектория удовлетворяет фазовым ограничениям с точностью ε и приходит во внутреннюю точку отрезка $G_0(T)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц.уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1303–1315.
2. **Асеев С.М.** Задача оптимального управления для дифференциального включения с фазовым ограничением. Гладкие аппроксимации и необходимые условия оптимальности// Тр. Междунар. конф., посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 31 августа — 6 сентября 1998 г.) Т. 3: Геометрическая теория управления. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. М.: ВИНИТИ, 1999. Т. 64. С. 57–81.
3. **Gusev M.I.** On reachability analysis for nonlinear control systems with state constraints // DCDS Suppl. 2015. Vol. 2015, Iss. special. P. 579–587. doi: 10.3934/proc.2015.0579 .
4. **Bressan A., Facchi G.** Trajectories of differential inclusions with state constraints // J. Diff. Eq. 2011. Vol. 250, no. 4. C. 2267–2281. doi: 10.1016/j.jde.2010.12.021 .
5. **Гусев М.И.** О методе штрафных функций в задаче построения множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 81–86.
6. **Гусев М.И.** Внутренние аппроксимации множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 73–88.
7. **Дарьин А.Н., Куржанский А.Б.** Управление в условиях неопределенности при двойных ограничениях // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 1474–1486.
8. **Субботин А.И., Ушаков В.Н.** Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при интегральных ограничениях на управления игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, № 3. С. 387–396.
9. **Ухоботов В.И.** Об одном классе дифференциальных игр с интегральными ограничениями // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 819–824.
10. **Polyak B.T.** Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Ser. A: Math. Anal. 2004. Vol. 11, no. 2-3. C. 255–267.
11. **Huseyin N., Huseyin A.** Compactness of the set of trajectories of the controllable system described by an affineintegral equation // Appl. Math. Comp. 2013. Vol. 219, no. 16. P. 8416–8424 . doi: 10.1016/j.amc.2013.03.005 .
12. **Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N.** The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Diff. Eq. Appl. 2007. Vol. 14, no. 1-2. P. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
13. **Guseinov Kh.G.** Approximation of the attainable sets of the nonlinear control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2009. Vol. 71, iss. 1-2. P. 622–645. doi: 10.1016/j.na.2008.10.097 .

14. **Kostousova E.K.** State estimates of bilinear discrete-time systems with integral constraints through polyhedral techniques // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 245–250. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.389 .
15. **Rousse P., Garoche P.L., Henrion D.** Parabolic set simulation for reachability analysis of linear time-invariant systems with integral quadratic constraint // European J. Control. 2021. Vol. 58. P. 152–167. doi: 10.1016/j.ejcon.2020.08.002 .
16. **Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филиппова Т.Ф.** Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018. 193 с.
17. **Sontag E.D.** A “universal” construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization // System and Control Letters 1989. Vol. 13, no. 2. P. 117–123. doi: 10.1016/0167-6911(89)90028-5 .
18. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. (Ser. Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85.) doi: 10.1007/978-3-319-10277-1 .
19. **Baier R., Gerdts M., Xausa I.** Approximation of reachable sets using optimal control algorithms // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2013. Vol. 3, no. 3. P. 519–548. doi: 10.3934/naco.2013.3.519 .
20. **Helsen R., Van Kampen E.-J., De Visser C., Chu Q.P.** Distance-fields-over-grids method for aircraft envelope determination // J. Guidance Control and Dynamics. 2016. Vol. 39, no. 7. P. 1–11. doi: 10.2514/1.G000824 .
21. **Rasmussen M., Rieger J., Webster K.N.** Approximation of reachable sets using optimal control and support vector machines // J. Comp. Appl. Math. 2017. Vol. 311. P. 68–83. doi: 10.1016/j.cam.2016.06.015 .
22. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first-order PDE’s. The Dynamic optimization Perspective. Birkhauser, Boston, 1995, 314 p. doi:10.1007/978-1-4612-0847-1 .
23. **Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.** Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhäuser, 1997. 574 p. doi: 10.1007/978-0-8176-4755-1 .

Поступила 31.05.2021
После доработки 15.06.2021
Принята к публикации 2.08.2021

Гусев Михаил Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: gmi@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kurzhanskii A.B., Filippova T.F. Description of the pencil of viable trajectories of a control system. *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 8, pp. 1303–1315 (in Russian).
2. Aseev S.M. An optimal control problem for a differential inclusion with state constraints. Smooth approximations and necessary optimality conditions. *J. Math. Sci.*, 2001, vol. 103, no. 6, pp. 670–685. doi: 10.1023/A:1009546316482 .
3. Gusev M. On reachability analysis for nonlinear control systems with state constraints. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2015, vol. 2015, pp. 579–587. doi: 10.3934/proc.2015.0579 .
4. Bressan A., Facchi G. Trajectories of differential inclusions with state constraints. *J. Diff. Eq.*, 2011, vol. 250, no. 4, pp. 2267–2281. doi: 10.1016/j.jde.2010.12.021 .
5. Gusev M.I. On the penalty function method in the problem of constructing reachable sets for control systems with state constraints. *Trudy Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 81–86 (in Russian).
6. Gusev M.I. Internal approximations of reachable sets of control systems with state constraints. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 287, suppl. 1, pp. 77–92. doi: 10.1134/S0081543814090089 .
7. Dar’in A.N., Kurzhanskii A.B. Control under indeterminacy and double constraints. *Diff. Eq.*, 2003, vol. 39, no. 11, pp. 1554–1567. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000019347.24930.a3 .
8. Subbotin A.I., Ushakov V.N. Alternative for an encounter-evasion differential game with integral constraints on the players’ controls. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 367–375. doi: 10.1016/0021-8928(75)90001-5 .

9. Ukhobotov V.I. On a class of differential games with an integral constraint. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 838–844. doi: 10.1016/0021-8928(77)90166-6 .
10. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Ser. A: Math. Anal.*, 2004, vol. 11, no. 2-3, pp. 255–267.
11. Huseyin N., Huseyin A. Compactness of the set of trajectories of the controllable system described by an affine integral equation. *Appl. Math. Comp.*, 2013, vol. 219, no. 16, pp. 8416–8424. doi: 10.1016/j.amc.2013.03.005 .
12. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *Nonlinear Diff. Eq. Appl.*, 2007, vol. 14, no. 1-2, pp. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
13. Guseinov Kh. G. Approximation of the attainable sets of the nonlinear control systems with integral constraint on controls. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, vol. 71, no. 1, pp. 622–645. doi: 10.1016/j.na.2008.10.097 .
14. Kostousova E.K State estimates of bilinear discrete-time systems with integral constraints through polyhedral techniques. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 245–250. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.389 .
15. Rousse P., Garoche P.L., Henrion D. Parabolic set simulation for reachability analysis of linear time-invariant systems with integral quadratic constraint. *European J. Control*, 2021, vol. 58, pp. 152–167. doi: 10.1016/j.ejcon.2020.08.002 .
16. Anan'ev B.I., Gusev M.I., Filippova T.F. *Upravlenie i otsenivanie sostoyanii dinamicheskikh sistem s neopredelennost'yu* [Control and estimation of states of dynamical systems with uncertainty]. Novosibirsk: SO RAN Publ., 2018, 193 p. ISBN: 978-5-7692-1624-4 .
17. Sontag E.D. A 'universal' construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems and Control Letters*, 1989, vol. 13, no. 2, pp. 117–123. doi: 10.1016/0167-6911(89)90028-5 .
18. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation.* Basel: Birkhäuser, 2014, Ser. Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85, 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1 .
19. Baier R., Gerdts M., Xausa I. Approximation of reachable sets using optimal control algorithms. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2013, vol. 3, no. 3, pp. 519–548. doi: 10.3934/naco.2013.3.519 .
20. Helsen R., Van Kampen E.-J., De Visser C., Chu Q.P. Distance-fields-over-grids method for aircraft envelope determination. *J. Guidance Control and Dynamics*, 2016, vol. 39, no. 7, pp. 1–11. doi: 10.2514/1.G000824 .
21. Rasmussen M., Rieger J., Webster K. N. Approximation of reachable sets using optimal control and support vector machines. *J. Comp. Appl. Math.*, 2017, vol. 311, pp. 68–83. doi: 10.1016/j.cam.2016.06.015 .
22. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDE's. The dynamic optimization perspective.* Boston: Birkhauser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 .
23. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhäuser, 1997, 574 p. doi: 10.1007/978-0-8176-4755-1 .

Received May 31, 2021
Revised June 15, 2021
Accepted August 2, 2021

Mikhail Ivanovich Gusev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: gmi@imm.uran.ru .

Cite this article as: M. I. Gusev. On the method of penalty functions for control systems with state constraints under integral constraints on the control, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 59–70 .