ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 3 2021

УДК 517.977.8

ЗАМЕТКИ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

С. В. Чистяков

В статье обсуждаются некоторые вопросы теории неантагонистических дифференциальных игр. В первом разделе приводится пример бескоалиционной дифференциальной игры двух лиц, в которой в классе рекурсивных стратегий имеется бесконечное множество исходов, порождаемых ситуациями ε-равновесия в смысле Нэша при $\varepsilon \to 0$. Более того, в этом примере найдены две такие ситуации равновесия в классе программных стратегий, что порождаемые ими исходы не доминируют друг друга, а любой отличный от них исход доминируется по крайней мере одним из этих двух исходов. Таким образом, показано, что в рассматриваемой дифференциальной игре имеет место проблема, которая ранее была обнаружена в биматричной игре «семейный спор». Все это в общем случае подчеркивает невозможность корректного определения функции значения бескоалиционной дифференциальной игры. Во втором разделе статьи обсуждается так называемая проблема динамической устойчивости в теории кооперативных дифференциальных игр. В том числе приводится пример, опровергающий известное утверждению о динамической устойчивости (или, иначе, состоятельности во времени) принципа оптимальности Парето.

Ключевые слова: неантагонистические дифференциальные игры, равновесие и ε-равновесие в смысле Нэша, принцип оптимальности Парето, динамическая неустойчивость.

S. V. Chistyakov. Notes on differential games.

Some problems of the theory of nonzero-sum differential games are discussed. An example of a coalition-free differential two-person game with infinitely many outcomes generated by Nash ε-equilibrium as $\varepsilon \to 0$ in the class of recursive strategies is presented in the first section. Moreover, for this example, two equilibrium situations are found in the class of program strategies such that the corresponding outcomes do not dominate each other, while all the other outcomes are dominated by at least one of these two outcomes. Thus, it is proved that in this game the same problem is present that was revealed earlier for the known bimatrix game Battle of the Sexes. In the general case, all this emphasizes the impossibility of the correct definition of the value function in a coalition-free differential game. The so-called dynamic stability problem in the theory of cooperative differential games is discussed in the second section. In particular, an example disproving the known statement on the dynamic stability (or, in other words, time consistency) of the Pareto optimality principle is given.

Keywords: nonzero-sum differential games, Nash equilibrium, Nash ε-equilibrium, Pareto optimality principle, dynamic instability.

MSC: 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-227-236

1. О бескоалиционных дифференциальных играх

Под бескоалиционной дифференциальной игрой далее понимается та или иная дифференциальная игра с ненулевой суммой, в которой игроки придерживаются принципа равновесия или ε-равновесия в смысле Нэша (при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$).

В общем случае предполагается, что рассматриваемые здесь бескоалиционные дифференциальные игры описываются следующими условиями:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u_1, u_2, \ \dots, u_m) \tag{1.1}$$

$$(x \in \mathbb{R}^n,\ u_i \in P_i \in \operatorname{Comp} \mathbb{R}^{k_i},\ u_i - \text{управляющее воздействие игрока } i),$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

$$H_i(x(T)) \longrightarrow \text{“}\max_{u_i}\text{”} \ \ \forall i = \overline{1, m} \ \ (t_0 < T). \tag{1.3}$$

Последнее условие означает, что каждый из игроков заинтересован в возможно большем значении своего терминального функционала. Для краткости игру (1.1)–(1.3) обозначим через $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$. При не очень стеснительных предположениях к таким играм сводятся и дифференциальные игры с более общими функционалами качества, в частности дифференциальные игры, подобные задаче Больца в вариационном исчислении.

Первой работой, в которой затрагивался вопрос о существовании решения игры $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$, по-видимому, была работа А. Ф. Кононенко [1]. В ней при $m = 2$ сформулировано достаточное и, по утверждению автора, почти необходимое условие существования решения игры $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$ в классе позиционных стратегий. Условие сформулировано в терминах движений (или траекторий) управляемой системы (1.1) [2], что непосредственно проверить практически невозможно. Кроме того, представленный в [1] набросок доказательства этого достаточного условия предполагает существование универсальных оптимальных позиционных стратегий игроков в описываемых ниже антагонистических дифференциальных играх $\Gamma_i(D)$, $i = \overline{1, m}$. Однако, как установлено Н. Н. Субботиной [3], такие универсальные стратегии могут и не существовать.

Вместе с тем в статье [4] доказано, что при выполнении следующих шести условий в игре $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$ с $m \geq 2$ при любом $\varepsilon > 0$ существует ситуация ε-равновесия в смысле Нэша в классе рекурсивных стратегий с памятью о предыстории по управлениям:

1) $f(\cdot) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times P \times Q)$;
2) $f(\cdot)$ — локально липшицева по x;
3) $\exists\, \lambda > 0\ \ \forall (t, x, u_1,\ \ldots, u_m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times P_1 \times \cdots \times P_m$
$$\|f(t, x, u_1,\ \ldots, u_m)\| \leq \lambda(1 + \|x\|);$$
4) $f(\cdot)$ представима в виде
$$f(t, x, u_1, u_2,\ \ldots, u_m) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x, u_i);$$
5) $\forall (t,\ x) \in (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ множество $F(t, x) = \{f(t, x, u_1,\ \ldots, u_m) \mid u_i \in P_i,\ i = \overline{1, m}\}$ — выпуклое;
6) $H_i(\cdot) \in C(\mathbb{R}^n) \quad \forall i \in I = \{1, 2,\ \ldots, m\}$.

Из представленного в [4] доказательства теоремы существования решения игры $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$ следует, что при $m = 2$ ситуация ε-равновесия в смысле Нэша при любом $\varepsilon > 0$ существует также и в классе рекурсивных стратегий с информацией игроков только о текущих позициях игры.

Формальное определение рекурсивных стратегий с памятью о предыстории по управлениям можно найти в [5], где в расширенной форме были анонсированы результаты статьи [4]. Более содержательное определение рекурсивных стратегий, но уже с информацией игроков о текущих позициях игры приведено в [6].

Пусть $A(t_0, x_0)$ — множество всех абсолютно непрерывных решений
$$x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, u_1(\cdot),\ \ldots,\ u_m(\cdot))$$
задачи Коши (1.1), (1.2) на сегменте $[t_0, T]$, которые соответствуют всевозможным измеримым по Лебегу программным управлениям $u_i(t) \in P_i$ при почти всех $t \in [t_0, T]$, а $D = D(t_0, x_0)$ — отрезок интегральной воронки системы (1.1) на сегменте $[t_0, T]$, исходящей из позиции (t_0, x_0), т. е.
$$D(t_0, x_0) = \{(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \mid x = x(t),\ x(\cdot) \in A(t_0,\ x_0)\}.$$

Для иллюстрации идеи доказательства теоремы о существовании решения игры $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$ и анализа последующего частного ее примера при каждом $i \in I$ рассмотрим семейство антагонистических дифференциальных игр:
$$\Gamma_i(D) = \{\Gamma_i(t_*, x_*) \mid t_*, \in [t_0, T],\ x_* = x(t_*),\ x(\cdot) \in A(t_0, x_0)\}.$$

Здесь каждая игра $\Gamma_i(t_*, x_*)$, помимо, быть может, своей начальной позиции (t_*, x_*), отличается от игры $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$ только тем, что в ней все игроки $j \in I \backslash \{i\}$ действуют как один игрок и имеют цель, противоположную цели игрока i, которая остается той же, что и в игре $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$. Семейства игр $\Gamma_i(D)$, $i \in I$ будем называть *сопутствующими игре* $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$ *семействами антагонистических игр.*

Сделанные выше предположения 1–6 гарантируют, что при любом $i \in I$ каждая игра $\Gamma_i(t_*, x_*)$ семейства $\Gamma_i(D)$ имеет значение (цену) и, следовательно, для любого $i \in I$ можно говорить о функции значения семейства игр $\Gamma_i(D)$. Учитывая это, для каждого $i \in I$ рассмотрим функцию значения $w_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ семейства игр $\Gamma_i(D)$:

$$w_i(t_*, x_*) = Val\ \Gamma_i(t_*, x_*).$$

Как показано в [4], справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (основная лемма). *Существует такая траектория* $x^*(\cdot) \in A(t_0, x_0)$*, что каждая из функций*

$$\varphi_i(t) = w_i(t, x^*(t)), \quad i \in I,$$

не убывает на отрезке $[t_0, T]$.

Следствие. *Существует такая траектория* $x^{'}(\cdot) \in A(t_0, x_0)$*, что*

$$w_i(t, x^{'}(t)) \leq H_i(x^{'}(T)) \ \ \forall i \in I, \ \ \forall t \in [t_0, T].$$

Пусть $X^*(t_0, x_0)$ — множество всех траекторий, описанных в теореме 1, а $X^{'}(t_0, x_0)$ – множество всех траекторий, описанных в ее следствии. Поскольку

$$w_i(T, x^{'}(T)) = H_i(x^{'}(T)) \ \ \forall i \in I,$$

то ясно, что $X^*(t_0, x_0) \subset X^{'}(t_0, x_0)$.

Следствие из теоремы, как и сама теорема, служит естественной основой доказательства существования решения игры $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$. Образно говоря, оба эти утверждения гласят, что при движении вдоль любой из траекторий $x^{'}(\cdot) \in X^{'}(t_0, x_0)$, и в частности вдоль $x^*(\cdot) \in X^*(t_0, x_0)$, каждый из игроков гарантировано получит в ее конце выигрыш не меньший, чем по пути вдоль этой траектории. При этом, отклонившись от нее, ни один из игроков самостоятельно не может гарантировать себе выигрыш больший, чем в конце этой траектории. Соответственно если до начала игры все игроки пришли к соглашению использовать такие свои управления, которые порождают ту или иную траекторию $x^{'}(\cdot) \in X^{'}(t_0, x_0)$, а стало быть, возможно, и траекторию $x^*(\cdot) \in X^*(t_0, x_0)$, то ни одному из них не выгодно отклоняться от этой траектории (по крайней мере, в одиночку).

На этой содержательной основе в [4] доказано, что всякая траектория $x(\cdot) \in X^{'}(t_0, x_0)$ при любом $\varepsilon > 0$ может быть порождена определенной ситуацией ε-равновесия в смысле Нэша в классе рекурсивных стратегий. Более того, как отмечалось в [5], если $\{U^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность ситуаций ε_k-равновесия в игре $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$ в классе рекурсивных стратегий, где $\varepsilon_k > 0 \ \ \forall k$ и $\varepsilon_k \to 0$, а $x^{(k)}(\cdot) \in A(t_0, x_0)$ — траектория системы (1.1), порождаемая ситуацией $U^{(k)}$, то всякая равномерно сходящаяся на сегменте $[t_0, T]$ подпоследовательность последовательности $\{x^{(k)}(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ имеет своим пределом некоторую траекторию $x(\cdot) \in X^{'}(t_0, x_0)$.

Всякую траекторию $x(\cdot) \in X^{'}(t_0, x_0)$ будем называть *равновесной* в игре $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$, а соответствующий ей вектор выигрышей (исход)

$$H(x(T)) = (H_1(x(T)),\ \ldots, H_m(x(T)))$$

— *равновесным исходом* в этой игре. Легко убедиться в том, что если в игре $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$ существует ситуация равновесия, то порождаемая ей траектория $x^*(\cdot) \in A(t_0, x_0)$ является равновесной в смысле этого определения; то же относится и к исходу $H(x^*(T))$.

Всякую траекторию $x(\cdot) \in X^*(t_0, x_0)$ далее будем называть *стабильно равновесной.*

Рассмотрим теперь пример бескоалиционной дифференциальной игры, характеризующий возможное многообразие всех равновесных исходов и наличие в ней известной в теории статических игр проблемы, которая имеет место в игре “семейный спор” [7].

П р и м е р 1 (*Игра “двойная рогатка”*). Определим функции $h_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$h_1(x) = \begin{cases} 0.5|x|, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

— и $h_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$h_2(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } x < 0, \\ 0.5x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

График каждой из этих функций напоминает рогатку, чем и объясняется выбор названия бескоалиционной дифференциальной игры двух лиц, которая описывается следующими условиями:

$$\frac{dx}{dt} = u_1 + u_2 \tag{1.4}$$

$$(x \in \mathbb{R},\ |u_i| \leq 1,\ \ i = 1, 2),$$

$$x(0) = 0, \tag{1.5}$$

$$h_i(x(1)) \to \text{“}\max_{u_i}\text{”} \quad (i = 1, 2). \tag{1.6}$$

Игру (1.4)–(1.6) обозначим через $\gamma(0, 0)$. Заметим, что в ней $t_0 = 0, x_0 = 0$, а $T = 1$.

Пусть $A(0, 0)$ — множество всех решений задачи Коши (1.4), (1.5) на отрезке $[0, 1]$, которые соответствуют всевозможным допустимым, измеримым по Лебегу, программным управлениям в игре $\gamma(0, 0)$, а $D = D(0, 0) \triangleq \{(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \mid x = x(t),\ x(\cdot) \in A(0, 0)\}$.

Рассмотрим два семейства антагонистических дифференциальных игр

$$\gamma_1(D) = \{\gamma_1(t_*, x_*) \mid (t_*, x_*) \in D\} \ \text{ и } \ \gamma_2(D) = \{\gamma_2(t_*, x_*) \mid (t_*, x_*) \in D\},$$

сопутствующих бескоалиционной дифференциальной игре $\gamma(0, 0)$.

Предложение 1. *Для любой позиции $(t_*, x_*) \in D = D(0, 0)$ имеют место равенства*

$$Val\ \gamma_1(t_*, x_*) = h_1(x_*) \ \ \text{и} \ \ Val\ \gamma_2(t_*, x_*) = h_2(x_*).$$

Иными словами, это предложение гласит, что функция значения $w_i(\cdot)$ любого из двух семейств антагонистических игр $\gamma_i(D)$, $i = 1, 2$, имеет вид $w_i(t, x) = h_i(x)\ \ \forall (t, x) \in D$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства предложения 1 достаточно заметить, что в каждой из игр $\gamma_1(t_*, x_*)$ и $\gamma_2(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in D$, каждый из игроков при активном противодействии своего противника может удерживать состояние управляемой системы (1.4) в любой сколь угодно малой окрестности точки x_* вплоть до окончания игры, т. е. вплоть до момента времени $T = 1$. □

Из теоремы 1, предложения 1 и определений множеств равновесных и стабильно равновесных траекторий следует, что справедливы следующие два утверждения.

Предложение 2. *Для того чтобы траектория $x(\cdot) \in A(0, 0)$ была стабильно равновесной траекторией в игре $\gamma(0, 0)$, необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций*

$$\lambda_1(t) = h_1(x(t)) \ \ \text{и} \ \ \lambda_2(t) = h_2(x(t))$$

была неубывающей на отрезке $[0, 1]$.

Предложение 3. *Для того чтобы траектория $x(\cdot) \in A(0,0)$ была равновесной траекторией в игре $\gamma(0,0)$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла неравенствам*

$$h_i(x(t)) \leq \ h_i(x(1)) \ \ \forall i = 1,2, \ \ \forall t \in [0,1].$$

Заметим теперь, что класс программных стратегий в игре общего вида $\Gamma^{(m)}(t_0, x_0)$ и в частном случае в игре $\gamma(0,0)$ является подклассом класса рекурсивных стратегий.

Теорема 2. 1. *Множество всех равновесных исходов в игре $\gamma(0,0)$ совпадает с множеством всевозможных значений вектор-функции $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$ на отрезке $[-2,2]$ и, следовательно, имеет мощность континуума.*

2. *Каждая из ситуаций в программных стратегиях*

$$u^-(\cdot) = (u_1^-(\cdot), u_2^-(\cdot)) \ \ \text{и} \ \ u^+(\cdot) = (u_1^+(\cdot), u_2^+(\cdot)),$$

где

$$u_1^-(t) = u_2^-(t) = -1 \text{ при почти всех } t \in [0,1], \quad \text{а} \ \ u_1^+(t) = u_2^+(t) = +1 \text{ при почти всех } t \in [0,1],$$

является ситуацией равновесия в игре $\gamma(0,0)$ в классе программных стратегий. При этом исходы

$$h(-2) = (h_1(-2), h_2(-2)) = (1,2) \ \ \text{и} \ \ h(2) = (h_1(2), h_2(2)) = (2,1),$$

порождаемые данными ситуациями, — единственные два равновесных исхода, которые в игре $\gamma(0,0)$ не доминируются по Парето никакими другими исходами в этой игре. Вместе с тем любой другой исход в игре $\gamma(0,0)$ доминируется по Парето по крайней мере одним из этих двух равновесных исходов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ситуацию $u^-(\cdot) = (u_1^-(\cdot), u_2^-(\cdot))$ и произвольную ситуацию $\hat{u}(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2^-(\cdot))$, в которой $u_1(\cdot)$ — некоторое допустимое программное управление 1-го игрока в игре $\gamma(0,0)$. Так как

$$u_1(t) \geq u_1^-(t) = -1 \text{ для почти всех } t \in [0,1],$$

то для порождаемых ситуациями $u^-(\cdot)$ и $\hat{u}(\cdot)$ траекторий $x^-(\cdot) = x(\cdot\ , u^-(\cdot)) \in A(0,0)$ и соответственно $\hat{x}(\cdot) = x(\cdot\ , \hat{u}(\cdot)) \in A(0,0)$

$$x^-(1) = \int\limits_0^1 (u_1^-(t) + u_2^-(t))dt = -2 \leq \int\limits_0^1 (u_1(t) + u_2^-(t))dt = \hat{x}(1) \leq 0.$$

Следовательно, $h_1(x^-(1)) = 0,5\,|x^-(1)| \geq 0,5\,|\hat{x}(1)| = h_1(\hat{x}(1))$.

Таким образом, 1-му игроку невыгодно отклоняться от ситуации $u^-(\cdot) = (u_1^-(\cdot), u_2^-(\cdot))$.

Аналогично устанавливается, что 2-му игроку также невыгодно отклоняться от этой ситуации. Таким образом, ситуация $u^-(\cdot)$ является ситуацией равновесия в игре $\gamma(0,0)$ в классе программных стратегий игроков. Следовательно, порождаемые ей траектория $x^-(\cdot) = x(\cdot, u^-(\cdot)) \in A(0,0)$ и исход

$$h\left(x^-(1)\right) = \left(h_1\left(x^-(1)\right), h_2\left(x^-(1)\right)\right) = \left(h_1(-2), h_2(-2)\right) = (1,2) \tag{1.7}$$

являются равновесными в игре $\gamma(0,0)$.

Подобным образом доказывается, что ситуация $u^+(\cdot) = (u_1^+(\cdot), u_2^+(\cdot))$, траектория $x^+(\cdot) = x(\cdot\ , u^+(\cdot)) \in A(0,0)$ и исход

$$h\left(x^{+}(1)\right)=\left(h_1\left(x^{+}(1)\right), h_2\left(x^{+}(1)\right)\right)=\left(h_1(2), h_2(2)\right)=(2,1) \tag{1.8}$$

также являются равновесными в игре $\gamma(0,0)$.

Выберем теперь произвольное $\beta \in [0,1)$ и рассмотрим ситуацию в программных стратегиях

$$\beta u^{-}(\cdot): \quad \beta u^{-}(t)=(-\beta,-\beta) \text{ при почти всех } t \in [0,1],$$

которая, хотя и не является в игре $\gamma(0,0)$ ни ситуацией равновесия, ни ситуацией ε-равновесия при достаточно малом $\varepsilon>0$, тем не менее порождает в этой игре равновесную траекторию. Действительно, для порождаемой ситуацией $\beta u^{-}(\cdot)$ траектории $x^{\beta-}(\cdot)$ при любом $t \in [0,1]$ имеем

$$x^{\beta-}(t)=\int_0^t(\beta u_1^{-}(t)+\beta u_2^{-}(t))dt=\int_0^t(-2\beta)dt= -2\beta t,$$

и так как функции

$$\lambda_1(t)=h_1(x^{\beta-}(t))=0.5\left|x^{\beta-}(t)\right|=\beta t \text{ и } \lambda_2(t)=h_2(x^{\beta-}(t))=\left|x^{\beta-}(t)\right|=2\beta t$$

очевидно не убывают на сегменте $[0,1]$, то в силу предложения 2 траектория $x^{\beta-}(\cdot) \in A(0,0)$ является стабильно равновесной и тем более равновесной в игре $\gamma(0,0)$. Таким образом, каждый из исходов

$$h(x^{\beta-}(1))=\left(h_1\left(x^{\beta-}(1)\right), h_2\left(x^{\beta-}(1)\right)\right)=(\beta,2\beta), \quad \beta \in [0,1), \tag{1.9}$$

является равновесным исходом в игре $\gamma(0,0)$.

Аналогично рассматривая траекторию $x^{\beta+}(\cdot)$, $\beta \in (0,1)$, порождаемую ситуацией в программных стратегиях

$$\beta u^{+}(\cdot): \quad \beta u^{+}(t)=(\beta,\beta) \text{ при почти всех } t \in [0,1],$$

легко убедиться в том, что каждая из них, а следовательно, и каждый из исходов

$$h\left(x^{\beta+}(1)\right)=\left(h_1\left(x^{\beta+}(1)\right), h_2\left(x^{\beta+}(1)\right)\right)=(2\beta,\beta), \quad \beta \in (0,1], \tag{1.10}$$

также являются равновесными в игре $\gamma(0,0)$.

Очевидно, что совокупность всех равновесных исходов (1.7)–(1.10) в игре $\gamma(0,0)$ совпадает с множеством всевозможных значений вектор-функции $h(x)=(h_1(x),h_2(x))$ на отрезке $[-2,2]$, при этом любой из исходов (1.9) доминируется по Парето исходом (1.7), а любой из исходов (1.10) — исходом (1.8).

Теорема доказана.

Теорема 2 в общем случае ставит под сомнение эффективность поиска всех ситуаций равновесия и тем более ε-равновесия (при $\varepsilon \to 0$) в игре $\Gamma^{(m)}(t_0,x_0)$ путем решения определенной системы дифференциальных уравнений [8], подобных уравнению Беллмана — Айзекса [9].

2. О кооперативных дифференциальных играх

Обычно формальное описание кооперативной дифференциальной игры мало отличается от описания бескоалиционной дифференциальной игры и разница между ними обнаруживается, лишь когда речь заходит о принципах оптимальности, которых, как предполагается, игроки в той или иной мере придерживаются по предварительному (кооперативному) соглашению. Существенный на практике вопрос о силе этих соглашений, как правило, даже не затрагивается.

В современных разработках теории кооперативных дифференциальных игр одно из центральных мест последние десятилетия занимает вопрос о так называемой динамической устойчивости принципов оптимальности или решений этих игр на основе соответствующих принципов. При этом сами понятия динамической устойчивости являются еще далеко не устоявшимися и спорными. Краткому обсуждению упомянутого вопроса и посвящен настоящий раздел.

Как и в теории статических кооперативных игр в дифференциальных, кооперативных играх различают игры с побочными платежами и игры без побочных платежей. Рассмотрим следующий пример кооперативной дифференциальной игры без побочных платежей.

П р и м е р 2 (*Упрощенный вариант задачи «Лебедь, рак и щука»*). Пусть $\|x\|$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^2$ и $g: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — скалярная функция,

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \|x\|, & \text{если } \|x\| \le 1, \\ 0, & \text{если } \|x\| > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую кооперативную дифференциальную игру 2 лиц:

$$\frac{dx}{dt} = u_1 + g(x)u_2 \quad (x, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2), \tag{2.1}$$

$$x(0) = \mathbb{O} \ (\mathbb{O} = (0,0)), \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} \|u_i\| \le 1, \quad i = 1,2, \\ (u_i - \text{управление игрока } i), \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$H_i(x(T)) = \rho(x(T), M_i) \to \text{“}\min_{u_i}\text{”} \quad (i = 1,2). \tag{2.4}$$

Здесь ρ — евклидово расстояние в $\mathbb{R}^2$, T — заданный момент времени, $M_1 = M(0, m_1)$ $(m_1 > 0)$ и $M_2 = M(m_2, 0)$ $(m_2 > 0)$ — заданные целевые точки, соответственно 1-го и 2-го игроков, лежащие на оси абсцисс Ox_1 и на оси ординат Ox_2.

Цель каждого из игроков $i = 1,2$ в игре (2.1)–(2.4) — оказаться как можно ближе в заданный момент времени $T > 0$ к своей целевой точке, при этом в принятии решения о достижении компромисса игроки руководствуются принципом оптимальности Парето [7, с. 166].

Из соображений симметрии ясно, что область достижимости управляемой системы (2.1) в момент времени T при начальном ее состоянии (2.2) представляет собой замкнутый круг $S_R(\mathbb{O})$ с центром в нуле. Момент времени T будем считать достаточно большим, а именно таким, чтобы выполнялось включение

$$S_1(\mathbb{O}) \subset S_R(\mathbb{O}),$$

где $S_1(\mathbb{O})$ — замкнутый единичный круг с центром в нуле. Легко показать, что для этого достаточно взять $T > \ln 2$. Чтобы убедиться в этом, в свою очередь, достаточно проинтегрировать уравнение (2.1) с начальным условием (2.2) при управлениях $u_1 = u_2 = (1,0)$ и затем найти тот момент времен t_*, в который управляемая система (2.1) перейдет из начального состояния $x(0) = \mathbb{O} = (0,0)$ в состояние $x(t_*) = (1,0)$. В итоге получим $t_* = \ln 2$.

Далее будем считать, что целевые точки M_1 и M_2 лежат во внешности круга достижимости $S_R(\mathbb{O})$ и их выпуклая оболочка — отрезок M_1M_2 — не пересекается с этим кругом. Кроме того, будем считать, что точки M_1 и M_2 лежат на своих осях координат на одном и том же расстоянии от начала координат.

Рассмотрим часть границы $\partial S_R(\mathbb{O})$ круга достижимости $S_R(\mathbb{O})$, которая расположена в первом квадранте плоскости Ox_1x_2. Эту часть границы $\partial S_R(\mathbb{O})$ будем называть положительной четвертью окружности $\partial S_R(\mathbb{O})$ и обозначим ее через $\partial^+ S_R(\mathbb{O})$. Очевидно, она является ортогональной проекцией отрезка M_1M_2 на круг $S_R(\mathbb{O})$. Вместе с тем, как следует из [10, теорема 2.12] эта проекция, т. е. $\partial^+ S_R(\mathbb{O})$, совпадает с множеством Парето-оптимальных, конечных состояний $x(T)$ в игре (2.1)–(2.4).

Наряду с этим в [10, теорема 2.13] утверждается, что в любой кооперативной игре сближения, к которым, в частности, относится и игра (2.1)–(2.4), множество оптимальных по Парето векторов выигрышей является динамически устойчивым. Кроме того, в [10, стр.4] говорится: "Динамическая устойчивость ... определяет важное свойство, согласно которому вдоль траектории движения в каждый момент времени игроки ... не имеют оснований для отклонения от ранее принятого способа поведения до окончания игры". Однако рассматриваемый пример иллюстрирует несостоятельность этого заключения, а именно: такие основания все-таки могут иметь место.

Допустим, что в игре (2.1)–(2.4) игроки до начала игры договорились двигаться с максимальной скоростью на некоторую, оптимальную по Парето точку $N \in \partial^+ S_R(\mathbb{O})$. Для простоты будем считать, что она лежит на биссектрисе 1-го координатного угла системы координат. Тогда нетрудно убедиться, что так выбранная точка $N \in \partial^+ S_R(\mathbb{O})$, а точнее, ведущая в нее траектория приводит к индивидуально рациональному исходу для обоих игроков. Очевидно, в точку $N \in \partial^+ S_R(\mathbb{O})$ из начала координат ведет единственная, допустимая в задаче (2.1)–(2.4) траектория — отрезок $\mathbb{O}N$. Пусть Q — точка пересечения этой траектории с границей единичного круга $S_1(\mathbb{O})$, а t_Q — момент перехода управляемой системы (2.1) вдоль этой траектории в точку $Q \in \partial S_1(\mathbb{O})$. Тогда если игроки вплоть до момента времени t_Q будут следовать упомянутому соглашению, то, учитывая, что за пределами внутренности единичного круга $S_1(\mathbb{O})$ 2-й игрок уже никак не влияет на процесс управления системой (2.1), 1-й игрок, начиная с момента времени t_Q, может использовать такое свое экстремальное управление, которое нацеливает движение управляемой системы не на точку N, а непосредственно на его целевую точку M_1. Такое отклонение от траектории $\mathbb{O}N$ после перехода в точку Q обеспечит 1-му игроку наибольшее сближение с его целевой точкой M_1 на отрезке времени $[t_{Q,}\ T]$. В итоге будет реализована более предпочтительная для 1-го игрока траектория, представляющая собой ломаную $\mathbb{O}QP$, а отнюдь не отрезок $\mathbb{O}N$ (здесь $|QP| = |QN|$). Следовательно, у 1-го игрока имеются все основания для отклонения от траектории $\mathbb{O}N$.

Таким образом, динамическая устойчивость принципа оптимальности или соответствующего ему кооперативного решения в смысле ее определения в [10, с. 105], вообще говоря, не обладает упомянутым выше свойством, сформулированным в [10, с. 4].

Заметим, что определение Парето оптимальных исходов (Парето оптимальных векторов выигрышей) в [10, с. 106] не исключает, что среди них имеются такие исходы, которые не являются индивидуально рациональными для того или иного из игроков. Отклонение от траектории, ведущей к такому исходу, заведомо произойдет по инициативе того игрока, для которого соответствующий исход не является индивидуально рациональным (более того, этот игрок с самого начала не пойдет на соглашение о реализации траектории, приводящей к индивидуально нерациональному для него исходу). Поэтому из приведенного выше анализа игры (2.1)–(2.4) ясно, что даже исключение из множества оптимальных по Парето исходов всех тех векторов выигрышей, которые не являются индивидуально рациональными хотя бы для одного из игроков, не гарантирует того, что от траектории, приводящей к тому или иному из оставшихся Парето-оптимальных исходов, нет оснований отклоняться ни одному из игроков.

Иной, чем в [10], подход к построению теории кооперативных дифференциальных игр с нетрансферабельными полезностями ранее был, в частности, описан в [11]. Его ядром является то, что кооперативная теория возникает не сама по себе, а в известной мере ориентирована на преодоления недостатков стратегической, а именно бескоалиционной теории.

Касаясь игр с побочными платежами или, иначе, игр с трансферабельными полезностями, заметим, что в статической кооперативной теории механизм побочных платежей явным образом никем не описывался. А уже в первых работах, посвященных кооперативным дифференциальным играм, этот механизм исследователи пытаются вводить в конструируемые ими модели именно с целью обеспечения определенной динамической устойчивости рассматриваемых принципов оптимальности или соответствующих им решений конфликтных задач управления. Несмотря на обилие последователей работы [10], более предпочтительным направлением исследования кооперативных дифференциальных игр с побочными платежами видится развитие модели из статьи [12], наиболее приближенной к возможным экономическим приложениям.

Автор благодарит канд. физ.-мат. наук М. Е. Васецова и профессора М. А. Скопину за помощь при подготовке рукописи настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кононенко А.Ф.** О равновесных позиционных стратегиях в неантагонистических дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 2. С. 285–288.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Субботина Н.Н.** Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, вып. 11. С. 1890–1896.
4. **Чистяков С.В.** О существовании решения бескоалиционных дифференциальных игр. Управление в динамических системах. Л., 1979 / Рук. деп. ВИНИТИ 24.07.1979, № 2794 — 79 деп./ (РЖ Мат., 1979, 10Б733 деп.).
5. **Чистяков С.В.** О бескоалиционных дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 5. С. 1052–1055.
6. **Чистяков С.В.** Об уравнениях метода программных итераций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 288–296.
7. **Воробьев Н.Н.** Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985. 272 с.
8. **Basar T., Olsder G. J.,** Dynamic noncooperative game theory. 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 1999. 511 p. doi: 10.1137/1.9781611971132 .
9. **Isaacs R.** Differential games. NY: John Wiley and Sons, 1965, 384 p.
10. **Петросян Л. А., Данилов Н.Н.** Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1985. 275 с.
11. **Адрианов А.А., Чистяков С.В.** К теории кооперативных дифференциальных игр // Вестн. СПбГУ. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2008. Вып. 1. С. 3–15.
12. **Скитович В.В.** Кооперативные дифференциальные игры с ограниченными ресурсами у игроков // Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. по матер. 29-й Междунар. науч.-практ. конф. № 4 (28). Новосибирск: СибАК, 2015.

Поступила 26.03.2021
После доработки 21.05.2021
Принята к публикации 15.06.2021

Чистяков Сергей Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет
г. Санкт-Петербург
e-mail: svch50@mail.ru

REFERENCES

1. Kononenko A.F. Equilibrium positional strategies in non-antagonistic differential games. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1976, vol. 231, no. 2, pp. 285–288 (in Russian).
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Subbotina N.N. Universal optimal strategies in positional differential games. *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 11, pp. 1890–1896 (in Russian).
4. Chistyakov S.V. *O Sushchestvovanii resheniya beskoalizionnyh differentsial'nyh igr. Upravlenie v dinamicheskih sistemah.* [On the existence of a solution to coalition-free differential games. Control in dynamic systems]. Leningrad, 1979. Available from VINITI, no. N2794–79, 24.07.1979. (RZh Mat., 1979, 10B733 dep.)

5. Chistyakov S.V. On coalition-free differential games. *Soviet Math. Dokl.*, 1981, vol. 24, no. 1, pp. 166–169.
6. Chistyakov S.V. On equations of the program iteration method. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2019, vol. 305, suppl. 1, pp. S40–S48. doi: 10.1134/S0081543819040060 .
7. Vorob'ev N.N. *Game theory: Lectures for economists and systems scientists.* Ser. Applications of Mathematics, vol. 7, N Y: Springer-Verlag, 1977, 178 p. ISBN: 0387902384 . Original Russian text published in Vorob'ev N.N. *Teoriya igr dlya ekonomistov-kibernetikov.* Moscow: Nauka Publ., 1985, 272 p.
8. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic noncooperative game theory, 2nd edition.* Philadelphia: SIAM, 1999, 511 p. doi: 10.1137/1.9781611971132 .
9. Isaacs R. *Differential games.* N Y: John Wiley and Sons, 1965, 384 p. ISBN: 0471428604 . Translated to Russian under the title *Differentsial'nye igry.* Moscow: Mir Publ., 1967, 479 p.
10. Petrosyan L.A., Danilov N.N. *Kooperativnye differentsial'nye igry i ikh prilozheniya* [Cooperative differential games and their applications]. Tomsk: Tomskii Gos. Univ. Publ., 1985, 273 p.
11. Adrianov A.A., Chistyakov S.V. On cooperative differential games theory. *Vestn. SPbGU. Ser. 10: Prikladnaya matematika, informatika, protsessy upravleniya*, 2008, no. 1, pp. 3–15 (in Russian).
12. Skitovich V.V. Cooperative differential games with limited resources at players. In: *Proc. 29 Int. Sci.-Pract. Conf. "Estestvennye i matematicheskie nauki v sovremennom mire"* [Natural and mathematical sciences in the modern world], Novosibirsk: SibAK Publ., 2015, no. 4 (28) (in Russian).

Received March 26, 2021
Revised May 21, 2021
Accepted June 15, 2021

Chistyakov Sergey Vladimirovich, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., St. Petersburg State University, Saint-Petersburg, 199034 Russia, e-mail: svch50@mail.ru .

Cite this article as: S. V. Chistyakov. Notes on differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 227–236 .