ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 3 2021

УДК 517.9

МЕТОД ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ И ПРОБЛЕМА РЕЛАКСАЦИИ

А. Г. Ченцов

Рассматриваются вопросы, связанные с дифференциальной игрой (ДИ) сближения-уклонения: альтернативная разрешимость, построение релаксаций игровой задачи сближения, конструкции решения на основе метода программных итераций (МПИ). Исследуется случай, когда в исходной ДИ при замкнутом целевом множестве (ЦМ) множество, определяющие фазовые ограничения (ФО), может не обладать замкнутостью в пространстве позиций, но имеет замкнутые сечения. Для упомянутой ситуации устанавливается альтернатива, подобная в идейном отношении альтернативе Красовского — Субботина при некоторой коррекции классов стратегий. Рассматривается вопрос о построении релаксаций задачи сближения с ЦМ при наличии ФО; при этом допускается, что ослабление условий в части приведения на ЦМ и в части соблюдения ФО может быть различным, что достигается посредством введения специального коэффициента приоритетности. При фиксации позиции игры определяется наименьший размер окрестности ЦМ, для которого при пропорциональном (в смысле упомянутого коэффициента) ослаблении ФО игрок, заинтересованный в сближении, еще может его гарантировать в надлежащем классе стратегий (здесь — неупреждающие стратегии или квазистратегии). Для получающейся таким образом основной функции позиции на основе варианта МПИ, действующего в пространстве множеств с элементами в виде позиций игры, вводится последовательность функций (позиции), сходящаяся к упомянутой основной функции. Позднее конструируется специальный оператор на пространстве функций (программный оператор), который реализует данную последовательность посредством "прямой" итерационной процедуры и для которого сама основная функция оказывается неподвижной точкой. Тем самым реализуется новый вариант МПИ. Указан тип функционала качества со следующим свойством: при фиксации позиции значение основной функции является ценой игры на минимакс-максимин упомянутого функционала.

Ключевые слова: альтернатива, дифференциальная игра, метод программных итераций, релаксация.

A. G. Chentsov. The program iteration method and the relaxation problem.

The issues related to an approach–evasion differential game are considered: alternative solvability, construction of relaxations of an approach game problem, and construction of a solution based on the program iteration method. The case is considered when the set defining the phase constraints in a differential game with a closed target set may be nonclosed in the position space but has closed sections. For this situation, an alternative is established that is ideologically similar to the Krasovskii–Subbotin alternative under a certain correction of the classes of strategies. The question of constructing relaxations of the problem of approaching the target set in the presence of phase constraints is considered; it is assumed that the weakening of the conditions in terms of bringing the system to the target set and in terms of observing the phase constraints may be different, which is achieved by introducing a special priority coefficient. When a position of the game is fixed, the smallest size of a neighborhood of the target set is determined for which, with a proportional (in the sense of the mentioned coefficient) weakening of the phase constraints, the player interested in the approach can still guarantee it in an appropriate class of strategies (here, nonanticipation strategies or quasi-strategies). For the resulting main function of the position, a sequence of functions (positions) converging to this function is introduced based on a variant of the program iteration method operating in the space of sets with elements in the form of game positions. After that, a special operator on the function space (a program operator) is constructed, which implements this sequence by means of a "direct " iterative procedure and for which the main function itself is a fixed point. Thus, a new version of the program iteration method is implemented. A type of the quality functional with the following property is proposed: when a position is fixed, the value of the main function is the value of a game for the minimax–maximin of this functional.

Keywords: alternative, differential game, program iteration method, relaxation.

MSC: 49J15, 49K15, 93C15, 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-211-226

Введение

В статье рассматривается вопрос, связанный с исследованием дифференциальной игры (ДИ) сближения-уклонения, для которой Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным была установлена фундаментальная теорема об альтернативе (см. [1; 2]). На основе этой теоремы было установлено (см. [2]) существование седловой точки для ДИ с типичными функционалами качества. В связи с прикладными задачами, приводящими к постановкам теории ДИ, отметим особо монографию Р. Айзекса (см. [3]), где наряду с содержательными примерами указаны и некоторые методы решения ДИ. Ситуация, возникающая в ДИ сближения-уклонения, типична для многих задач, обсуждаемых в [3]: в постановке [1; 2] для ДИ на конечном промежутке предполагались заданными замкнутые в пространстве позиций целевое множество (ЦМ) и множество, определяющее фазовые ограничения (ФО). Игрок I стремится к достижению ЦМ при соблюдении ФО (задача сближения); цель игрока II противоположна (задача уклонения). Из альтернативы Красовского — Субботина следует, что множество, определяющее ФО, допускает разбиение в сумму множеств успешной разрешимости игроков I и II в соответствующих классах позиционных стратегий. Исследования по методу программных итераций (МПИ) приводят (см. [4–6]) к альтернативе в ситуации, когда множество, определяющие ФО, может быть незамкнутым (в пространстве позиций), но имеет замкнутые сечения; данная альтернатива реализуется для специальных классов стратегий игроков. Наряду с этим обсуждается вопрос о релаксации задачи сближения, что реализуется посредством ослабления условий окончания игры. Данный вопрос (см. [6;7]) является основным в статье, которая представляет собой (как и [6;7]) логическое продолжение работ [8–10]. Речь идет о различном, вообще говоря, ослаблении условий окончания игры в части прихода на ЦМ и соблюдения ФО, что отличает настоящую работу от [8–10]. Полученные утверждения согласуются с [6] и базируются на использовании МПИ.

Заметим, что применение программных конструкций традиционно для теории ДИ (см. [2; 11–13]) и является наиболее успешным при условиях регулярности (см. [2; 11]). В общем случае ДИ использовались конструкции на основе МПИ (см. [4–7; 14–17] и др.); они играют важную роль и в настоящем исследовании. В частности, построен вариант МПИ, определяющий итерационную процедуру в пространстве неотрицательных функций позиции. Искомая функция значения релаксированных задач оказывается наименьшей в порядковом смысле неподвижной точкой оператора, определяющего итерационную процедуру, и одновременно функцией цены для ДИ на минимакс-максимин со специальными функционалами качества. В связи с другими подходами к решению позиционных ДИ особо отметим фундаментальные результаты А. И. Субботина, связанные с построением обобщенных решений уравнения Гамильтона — Якоби (см. [18–20]). Эти результаты находят применение не только в теории ДИ, но и в задачах управления и в теории дифференциальных уравнений, а также в негладком анализе. Отметим работы [21; 22], в которых конструкции, подобные применяемым в МПИ, использовались при исследовании обобщенных решений уравнений в частных производных.

1. Общие понятия и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика; $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. *Семейством* называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Объектам x и y сопоставляем их неупорядоченную пару $\{x; y\}$ в виде множества, содержащего x и y и не содержащего никаких других элементов. Для каждого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон, содержащий z: $z \in \{z\}$. Если α и β — объекты, то $(\alpha, \beta) \triangleq \{\{\alpha\}; \{\alpha; \beta\}\}$ есть (см. [23, гл. II, §2]) упорядоченная пара с первым элементом α и вторым элементом β. Если u, v и w — объекты, то (см. [24, гл. I]) $(u, v, w) \triangleq ((u, v), w)$. Для множеств A, B и C полагается $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$ (см. [23, гл. II]).

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H; $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$. Семейству $\mathcal{X}$ и множеству Y сопоставляем след $\mathcal{X}|_Y \triangleq \{X \cap Y : X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ этого семейства на Y. Если $\mathbb{H}$ — множество и $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$, то $\mathbf{C}_{\mathbb{H}}[\mathcal{H}] \triangleq$

$\{\mathbb{H}\setminus H\colon H\in\mathcal{H}\}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$ — семейство, двойственное к $\mathcal{H}$. Множествам A и B сопоставляем (см. [23, гл. II]) множество B^A всех отображений (функций) из A в B. Для функций часто используем индексную форму записи (семейство с индексом).

Полагаем $\mathbb{R}_+\triangleq\{\xi\in\mathbb{R}\mid 0\leqslant\xi\}$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая), $\mathbb{N}\triangleq\{1;2;\ldots\}$, $\mathbb{N}_0\triangleq\{0\}\cup\mathbb{N}=\{0;1;2;\ldots\}$ и $\overline{1,k}\triangleq\{j\in\mathbb{N}\mid j\leqslant k\}$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Если $\mathcal{S}$ — непустое множество, то $\mathcal{R}_+[\mathcal{S}]\triangleq(\mathbb{R}_+)^{\mathcal{S}}$. Полагаем также, что натуральные числа — элементы $\mathbb{N}$ — множествами не являются. С учетом этого для произвольного множества H и числа $k\in\mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,k}}$ используем более традиционное обозначение H^k для множества всех отображений из $\overline{1,k}$ в H (т. е. кортежей в H “длины” k). Семейству $\mathcal{H}$ сопоставлено множество $\mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ всех последовательностей в $\mathcal{H}$; если $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{H}$ — множество, то, как обычно, $((H_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow\mathbb{H})\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\bigl((\mathbb{H}=\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}}H_i)\,\&\,(H_{k+1}\subset H_k\ \forall k\in\mathbb{N})\bigr)$. Если (X,τ) — топологическое пространство (ТП) и $Y\in\mathcal{P}(X)$, то $(Y,\tau|_Y)$ есть подпространство (X,τ); топологию $\tau|_Y$ называем *относительной* (индуцированной из (X,τ)).

Каждому множеству E сопоставляем семейство $(\sigma-\mathrm{alg})[E]$ всех σ-алгебр п/м E; если $\mathcal{E}\in(\sigma-\mathrm{alg})[E]$, то $(E,\mathcal{E})$ — измеримое пространство (ИП). Для $\mathfrak{E}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ через $\sigma_E^0(\mathfrak{E})$ обозначаем σ-алгебру п/м E, порожденную семейством $\mathfrak{E}$. Если X — множество, $\mathcal{X}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ и $Y\in\mathcal{P}(X)$, то $\sigma_Y^0(\mathcal{X}|_Y)=\sigma_X^0(\mathcal{X})|_Y$ и $(Y\in\sigma_X^0(\mathcal{X}))\Leftrightarrow(\sigma_Y^0(\mathcal{X}|_Y)=\{\Sigma\in\sigma_X^0(\mathcal{X})\mid\Sigma\subset Y\})$. Для ТП (X,τ) $\sigma_X^0(\tau)$ — σ-алгебра борелевских п/м X. Если $(E,\mathcal{E})$ есть ИП, то через $(\sigma-\mathrm{add})_+[\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) счетно-аддитивных мер на $\mathcal{E}$; при $\mathcal{E}=\sigma_E^0(\tau)$, где τ — топология на E, меры из $(\sigma-\mathrm{add})_+[\mathcal{E}]$ называем *борелевскими*. Для метризуемого ТП (E,τ) все меры из $(\sigma-\mathrm{add})_+[\sigma_E^0(\tau)]$ регулярны (см. [25, гл. 1; 26, гл. IV]).

2. Обобщенные программные управления и траектории

Ниже рассматривается конфликтно-управляемая система, удовлетворяющая условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности программных движений, подобным используемым А. В. Кряжимским (см. [27]) при распространении альтернативы Красовского — Субботина на случай систем, не удовлетворяющих условию Липшица по фазовой переменной.

Пусть $T\triangleq[t_0,\vartheta_0]$, где $t_0\in\mathbb{R}$, $\vartheta_0\in\mathbb{R}$ и $t_0<\vartheta_0$. Фиксируя непустые компакты P и Q в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, где $p\in\mathbb{N}$ и $q\in\mathbb{N}$, рассматриваем при $t\in T$ компакты $[t,\vartheta_0]$, $Y_t\triangleq[t,\vartheta_0]\times P$, $Z_t\triangleq[t,\vartheta_0]\times Q$ и $\Omega_t\triangleq[t,\vartheta_0]\times P\times Q$, оснащаемые σ-алгебрами борелевских множеств $\mathcal{T}_t\in(\sigma-\mathrm{alg})[[t,\vartheta_0]]$, $\mathcal{K}_t\in(\sigma-\mathrm{alg})[Y_t]$, $\mathcal{D}_t\in(\sigma-\mathrm{alg})[Z_t]$ и $\mathcal{C}_t\in(\sigma-\mathrm{alg})[\Omega_t]$ соответственно; если $I\in\mathcal{T}_t$, то $I\times P\in\mathcal{K}_t$, $I\times Q\in\mathcal{D}_t$ и $I\times P\times Q\in\mathcal{C}_t$, $K\times Q\in\mathcal{C}_t$ при $K\in\mathcal{K}_t$ и $D\underline{\times}P\triangleq\{(\tau,u,v)\in\Omega_t\mid(\tau,v)\in D\}\in\mathcal{C}_t$ при $D\in\mathcal{D}_t$. Далее, при $t\in T$ полагаем, что λ_t — след меры Лебега на σ-алгебру $\mathcal{T}_t$,

$$
\begin{aligned}
&\bigl(\mathcal{H}_t\triangleq\{\eta\in(\sigma-\mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t]\mid\eta(I\times P\times Q)=\lambda_t(I)\ \ \forall I\in\mathcal{T}_t\}\bigr)\\
&\&\ \bigl(\mathcal{R}_t\triangleq\{\mu\in(\sigma-\mathrm{add})_+[\mathcal{K}_t]\mid\mu(I\times P)=\lambda_t(I)\ \ \forall I\in\mathcal{T}_t\}\bigr)\\
&\&\ \bigl(\mathcal{E}_t\triangleq\{\nu\in(\sigma-\mathrm{add})_+[\mathcal{D}_t]\mid\nu(I\times Q)=\lambda_t(I)\ \ \forall I\in\mathcal{T}_t\}\bigr);
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bigl(\pi_t(\mu)\triangleq\{\eta\in\mathcal{H}_t\mid\eta(K\times Q)=\mu(K)\ \ \forall K\in\mathcal{K}_t\}\ \ \forall\mu\in\mathcal{R}_t\bigr)\\
&\&\ \bigl(\Pi_t(\nu)\triangleq\{\eta\in\mathcal{H}_t\mid\eta(D\underline{\times}P)=\nu(D)\ \ \forall D\in\mathcal{D}_t\}\ \ \forall\nu\in\mathcal{E}_t\bigr).
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Элементы $\mathcal{H}_t$ — совокупные обобщенные управления (ОУ), элементы $\mathcal{R}_t$ суть ОУ игрока I, элементы $\mathcal{E}_t$ — ОУ игрока II. Обычные управления соответствующего типа (функции со значениями в P и Q) допускают погружение в множества (2.1) (см. [28, гл. IV, §2]). С учетом теоремы Рисса (см. [26, гл. IV]) оснащаем множества (2.1) относительными $*$-слабыми топологиями (см. также [4, разд. 4]), получая метризуемые компакты; множества (2.2) $*$-слабо компактны, т. е.

компактны в $\mathcal{H}_t$ с относительной $*$-слабой топологией ($t \in T$). Через $\mathfrak{F}_t^*$ обозначаем семейство всех $*$-слабо замкнутых п/м $\mathcal{H}_t$. Если $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_0]$, то множества $[t, \theta[\times P \times Q$ и $[t, \theta[\times Q$ оснащаем σ-алгебрами $\mathcal{C}_t^\theta \triangleq \mathcal{C}_t|_{[t,\theta[\times P\times Q} = \{H \in \mathcal{C}_t \mid H \subset [t, \theta[\times P \times Q\}$, $\mathcal{D}_t^\theta \triangleq \mathcal{D}_t|_{[t,\theta\,[\,\times Q} = \{D \in \mathcal{D}_t \mid D \subset [t, \theta\,[\,\times Q\}$ соответственно. При $t \in T$ полагаем

$$\tilde{A}_t \triangleq \Big\{\alpha \in \prod_{\nu\in\mathcal{E}_t} \mathcal{P}'(\Pi_t(\nu)) \mid \forall \nu_1 \in \mathcal{E}_t\ \forall \nu_2 \in \mathcal{E}_t\ \forall \theta \in [t, \vartheta_0]\ \big((\nu_1 \mid \mathcal{D}_t^\theta) = (\nu_2 \mid \mathcal{D}_t^\theta)\big)$$

$$\Rightarrow\ \big(\{(\eta \mid \mathcal{C}_t^\theta)\colon \eta \in \alpha(\nu_1)\} = \{(\eta \mid \mathcal{C}_t^\theta)\colon \eta \in \alpha(\nu_2)\}\big)\Big\}, \tag{2.3}$$

получая множество всех квазистратегий игрока I на $[t, \vartheta_0]$ (см. [4, (10.1)]). В виде

$$\tilde{A}_t^\Pi \triangleq \Big\{\alpha \in \tilde{A}_t \mid \bigcup_{\nu\in\mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \in \mathfrak{F}_t^*\Big\} \in \mathcal{P}(\tilde{A}_t) \tag{2.4}$$

имеем (см. [4, разд. 10]) множество всех квазипрограмм игрока I на $[t, \vartheta_0]$. Множества (2.3), (2.4) непусты, так как $\Pi_t(\cdot) \triangleq (\Pi_t(\nu))_{\nu\in\mathcal{E}_t} \in \tilde{A}_t^\Pi\ \ \forall t \in T$.

Обозначим через $\mathcal{B}$ σ-алгебру борелевских п/м Q и при $v \in Q$ через δ_v — след меры Дирака, сосредоточенной в точке v, на σ-алгебру $\mathcal{B}$. Заметим, что при $t \in T$ в виде $\mathcal{K}_t\{\times\}\mathcal{B} \triangleq \{K \times B\colon K \in \mathcal{K}_t,\ B \in \mathcal{B}\}$ имеем полуалгебру со свойством $\mathcal{C}_t = \sigma^0_{\Omega_t}(\mathcal{K}_t\{\times\}\mathcal{B})$ (см. [25, добавление 2]). Если $t \in T$, $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $v \in Q$, то через $\mu \otimes v$ обозначим единственную меру на $\mathcal{C}_t$ со свойством $(\mu \otimes v)(K \times B) = \mu(K)\delta_v(B)\ \ \forall K \in \mathcal{K}_t\ \ \forall B \in \mathcal{B}$; ясно, что $\mu \otimes v \in \pi_t(\mu)$. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и непрерывную функцию $f\colon T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$. Рассматриваем функционирование системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q \tag{2.5}$$

на промежутках $[t_*, \vartheta_0]$, $t_* \in T$. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, то

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) \triangleq \Big\{x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \mid x(\theta) = x_* + \int\limits_{[t_*,\theta[\times P\times Q} f(t, x(t), u, v)\,\eta\,(d(t, u, v))\ \ \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0]\Big\}.$$

Следуя [27], полагаем далее, что $\Phi(t_*, x_*, \eta)$ одноэлементно при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$: $\Phi(t_*, x_*, \eta) = \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\}$, где $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) = (\varphi(t, t_*, x_*, \eta))_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ — обобщенная траектория, соответствующая (t_*, x_*, η). Пусть $\|\cdot\|$ есть евклидова норма в $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{B}_n(c) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant c\}$ при $c \in \mathbb{R}_+$. Как и в [27], полагаем, что $\forall a \in \mathbb{R}_+\ \ \exists b \in \mathbb{R}_+\colon \varphi(\tau, t, x, \eta) \in \mathbb{B}_n(b)\ \ \forall t \in T\ \ \forall x \in \mathbb{B}_n(a)\ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_t\ \ \forall \tau \in [t, \vartheta_0]$. Итак, система (2.5) удовлетворяет условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности программных движений; при $t \in T$ отображение $(x, \eta) \mapsto \varphi(\cdot, t, x, \eta)\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_t \to C_n([t, \vartheta_0])$ непрерывно. Как следствие, при $t \in T$ и $v \in Q$ отображение $(x, \mu) \mapsto \varphi(\cdot, t, x, \mu \otimes v)\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{R}_t \to C_n([t, \vartheta_0])$ непрерывно. Получаем, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ множества $(\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\colon \eta \in \Pi_{t_*}(\nu)\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0]))\ \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*})\,\&\,(\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu\otimes v)\colon \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0]))\ \forall v \in Q)$ компактны в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости. При $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$

$$\mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \triangleq \Big\{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\colon \eta \in \bigcup_{\nu\in\mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)\Big\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])). \tag{2.6}$$

При $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi$ в виде (2.6) реализуется непустой компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$.

3. Метод программных итераций, 1

Отождествляем $T \times \mathbb{R}^n$ с пространством позиций. Обычная топология $\mathbf{t}$ покоординатной сходимости в $T \times \mathbb{R}^n$ порождается, в частности, метрикой $\rho \in \mathcal{R}_+[(T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n)]$, для которой $\rho((t_1, x_1), (t_2, x_2)) = \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\})$ $\forall (t_1, x_1) \in T \times \mathbb{R}^n$ $\forall (t_2, x_2) \in T \times \mathbb{R}^n$. В виде $\mathcal{F} \overset{\triangle}{=} \mathbf{C}_{T\times\mathbb{R}^n}[\mathbf{t}]$ имеем семейство всех $\mathbf{t}$-замкнутых (замкнутых в обычном смысле) п/м $T \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}' \overset{\triangle}{=} \mathcal{F} \backslash \{\varnothing\}$. Полагая, что $\tau_\partial \overset{\triangle}{=} \mathcal{P}(T)$ (дискретная топология на T) и $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ есть $\|\cdot\|$-топология $\mathbb{R}^n$ (топология покоординатной сходимости), через $\tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ обозначим метризуемую топологию на $T \times \mathbb{R}^n$, отвечающую стандартному произведению ТП (T, τ_∂) и $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$; $\mathfrak{F} \overset{\triangle}{=} \mathbf{C}_{T\times\mathbb{R}^n}[\tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}]$ и $\mathfrak{F}' \overset{\triangle}{=} \mathfrak{F} \setminus \{\varnothing\}$. При $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $t \in T$ имеем в виде $H\langle t\rangle \overset{\triangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in H\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ t-сечение H. Полагая $\mathbf{F} \overset{\triangle}{=} \mathbf{C}_{\mathbb{R}^n}[\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}]$, получаем, что $\mathfrak{F} = \{F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \mid F\langle t\rangle \in \mathbf{F} \ \forall t \in T\}$; $(\mathcal{F} \subset \mathfrak{F})\,\&\,(\mathcal{F}' \subset \mathfrak{F}')$. Множеству $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ сопоставляем оператор $\mathbf{A}[M]$, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ по правилу (см. [4, (5.5)])

$$\mathbf{A}[M](S) \overset{\triangle}{=} \big\{(t, x) \in S \mid \forall \nu \in \mathcal{E}_t \ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, \nu) \ \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0]:$$
$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in M)\,\&\,((\tau, x(\tau)) \in S \ \forall \tau \in [t, \vartheta\,[\,)\big\} \quad \forall S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \tag{3.1}$$

Отметим [4, предложения 5.1, 5.2] и ограничимся следствиями; при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ определены (см. [4, разд. 6]) последовательность $(W_k(M, N))_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}_0}$: $(W_0(M, N) \overset{\triangle}{=} N)\,\&\,(W_{s+1}(M, N) = \mathbf{A}[M](W_s(M, N)) \ \forall s \in \mathbb{N}_0)$, а также предельное множество

$$W(M, N) \overset{\triangle}{=} \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} W_k(M, N) \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

Отметим лишь некоторые положения из [4, разд. 6]. Так, при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$

$$(W_k(M, N) \in \mathfrak{F} \ \forall k \in \mathbb{N}_0)\,\&\,(W(M, N) = \mathbf{A}[M](W(M, N)) \in \mathfrak{F}). \tag{3.3}$$

Кроме того, если $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и при этом

$$((M_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow M)\,\&\,((N_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow N), \tag{3.4}$$

то $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathfrak{F}$ и, самое главное,

$$((W_s(M_i, N_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow W_s(M, N) \ \forall s \in \mathbb{N}_0)\,\&\,((W(M_i, N_i))_{i\in N} \downarrow W(M, N)). \tag{3.5}$$

Важно, что (3.4) $\Rightarrow$ (3.5). Оператор $\mathbb{A}[M]$ (см. [5, (4.8)]), $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, действует в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$:

$$\mathbb{A}[M](S) \overset{\triangle}{=} \big\{(t, x) \in S \mid \forall v \in Q \ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t, x, v) \ \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0]:$$
$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in M)\,\&\,((\tau, x(\tau)) \in S \ \forall \tau \in [t, \vartheta\,[\,)\big\} \quad \forall S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n);$$

общие свойства $\mathbb{A}[M]$ см. в [5, §4]. Для нас важно, что (см. [5, §5]) при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ определена последовательность $(\mathcal{W}_k(M, N))_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}_0}$, $(\mathcal{W}_0(M, N) \overset{\triangle}{=} N)\,\&\,(\mathcal{W}_{s+1}(M, N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}_s(M, N)) \ \forall s \in \mathbb{N}_0)$, а также предельное множество

$$\mathcal{W}(M, N) \overset{\triangle}{=} \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(M, N). \tag{3.6}$$

Заметим, что (см. [5]) справедливо свойство, подобное (3.3): при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$

$$(\mathcal{W}_s(M, N) \in \mathfrak{F} \ \forall s \in \mathbb{N}_0)\,\&\,(\mathcal{W}(M, N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}(M, N)) \in \mathfrak{F}).$$

Кроме того, имеем свойство, аналогичное (3.4), (3.5), а именно: если $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (3.4), то $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathfrak{F}$ и при этом

$$((\mathcal{W}_s(M_i, N_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}_s(M, N) \ \forall s \in \mathbb{N}_0)\,\&\,((\mathcal{W}(M_i, N_i))_{i\in N} \downarrow \mathcal{W}(M, N)). \tag{3.7}$$

Итак, (3.4) $\Rightarrow$ (3.7). Отметим (см. [29, §11]), что $W(M, N) = \mathcal{W}(M, N)$ $\forall M \in \mathcal{F}$ $\forall N \in \mathfrak{F}$.

4. Свойство альтернативной разрешимости и проблема релаксации

Всюду в дальнейшем фиксируем $\mathbf{M} \in \mathcal{F}'$ и $\mathbf{N} \in \mathfrak{F}'$, рассматривая $\mathbf{M}$ как ЦМ игрока I, $\mathbf{N}$ — как множество, формирующее его ФО. Тогда (см. [4, теорема 10.1])

$$W(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \big\{(t,x) \in \mathbf{N} \mid \exists \alpha \in \tilde{A}_t \ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t;x;\alpha] \ \exists \vartheta \in [t,\vartheta_0]\colon$$
$$((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\,\&\,((\tau,\mathbf{x}(\tau)) \in \mathbf{N} \ \forall \tau \in [t,\vartheta[)\big\}$$
$$= \big\{(t,x) \in \mathbf{N} \mid \exists \alpha \in \tilde{A}_t^{\Pi} \ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t;x;\alpha] \ \exists \vartheta \in [t,\vartheta_0]\colon$$
$$((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\,\&\,((\tau,\mathbf{x}(\tau)) \in \mathbf{N} \ \forall \tau \in [t,\vartheta[)\big\} \tag{4.1}$$

(здесь и ниже для обозначения промежутков в $\mathbb{R}$ используем только квадратные скобки, следуя [30, §1.3]) есть множество разрешимости задачи игрока I. При $(t_*,x_*) \in W(\mathbf{M},\mathbf{N})$ квазипрограмма, гарантирующая $(\mathbf{M},\mathbf{N})$-сближение, указана в [4, разд. 10].

Кратко коснемся процедур, используемых игроком II в задаче уклонения. Пусть $\mathfrak{V} \triangleq \mathcal{P}'(Q)^{T\times\mathbb{R}^n}$; элементы $\mathfrak{V}$ — многозначные позиционные стратегии, подобные [1; 2]. При $t \in T$

$$G^*(t) \triangleq \big\{g^* \in \mathcal{P}'([t,\vartheta_0])^{C_n([t,\vartheta_0])} \mid \forall g_1 \in C_n([t,\vartheta_0]) \ \forall g_2 \in C_n([t,\vartheta_0]) \ \forall \theta \in [t,\vartheta_0]\colon$$
$$((g_1 \mid [t,\theta]) = (g_2 \mid [t,\theta])) \Rightarrow (g^*(g_1) \cap [t,\theta] = g^*(g_2) \cap [t,\theta])\big\}$$

и $\mathbb{G}_0^*(t) \triangleq G^*(t)^{\mathbb{R}^n}$ (множество всех отображений из $\mathbb{R}^n$ в $G^*(t)$). Наконец, $\mathbb{G}_\theta^*$ при $\theta \in T$ есть по определению декартово произведение всех множеств $\mathbb{G}_0^*(t)$, $t \in [\theta,\vartheta_0]$. В виде процедур управления игрока II на отрезке $[t_*,\vartheta_0]$, где $t_* \in T$, используем стратегии-тройки $(V,\beta,k) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}$; $\mathfrak{V} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N} \neq \varnothing$. При $(t_*,x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\beta \in \mathbb{G}_{t_*}^*$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем (см. [5, (7.8), предложение 7.3]) пучок $\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\beta;m] \in \mathcal{P}'(C_n([t_*,\vartheta_0]))$ траекторий, порожденных стратегий-тройкой (V,β,m) из (t_*,x_*); $\mathfrak{X}[t_*;x_*;V;\beta;1]$ есть объединение всех множеств $\mathcal{X}_\pi(t_*,x_*,v)$, $v \in V(t_*,x_*)$. Из (3.6) и [5, теорема 9.2] вытекает, что $\mathbf{N} \setminus W(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \{(t,x) \in \mathbf{N} \mid \exists V \in \mathfrak{V} \ \exists \beta \in \mathbb{G}_t^* \ \exists m \in \mathbb{N} \ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t;x;V;\beta;m] \ \forall \vartheta \in [t,\vartheta_0] \ ((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \Rightarrow (\exists \tau \in [t,\vartheta[\colon (\tau,\mathbf{x}(\tau)) \notin \mathbf{N})\}$. С учетом (4.1) имеем свойство альтернативной разрешимости ДИ сближения-уклонения с незамкнутым в традиционном смысле множеством $\mathbf{N}$.

При $z \in T \times \mathbb{R}^n$ полагаем, что $\rho(z;\mathbf{M}) \triangleq \inf(\{\rho(z;m)\colon m \in \mathbf{M}\})$, получая расстояние от позиции z до ЦМ $\mathbf{M}$. Тогда $\rho(\cdot;\mathbf{M}) \triangleq (\rho(z;\mathbf{M}))_{z\in T\times\mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ есть соответствующая функция расстояния. При $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ полагаем

$$S_0(\mathbf{M},\varepsilon) \triangleq \big\{z \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho(z;\mathbf{M}) \leqslant \varepsilon\big\} = \rho(\cdot;\mathbf{M})^{-1}([0,\varepsilon]); \tag{4.2}$$

понятно, что $S_0(\mathbf{M},\varepsilon) \in \mathcal{F}'$ и $\mathbf{M} \subset S_0(\mathbf{M},\varepsilon)$. При этом $\mathbf{M} = S_0(\mathbf{M},0)$. Если $H \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$, то $(\|\cdot\| - \inf)[x;H] \triangleq \inf(\{\|x-h\| : h \in H\})$. Исходя из этого, для $H \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ имеем $B_n^0(H,\varepsilon) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\|\cdot\| - \inf)[x;H] \leqslant \varepsilon\} \in \mathbf{F}'$, где $\mathbf{F}' \triangleq \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\}$. В дальнейшем полагаем, что $\mathbf{N}\langle t\rangle \neq \varnothing \ \forall t \in T$. Отсюда $\mathbf{N}\langle t\rangle \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и определены множества $B_n^0(\mathbf{N}\langle t\rangle,\varepsilon)$ при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и $t \in T$. Тогда

$$\mathbb{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \triangleq \big\{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid x \in B_n^0(\mathbf{N}\langle t\rangle,\varepsilon)\big\} \in \mathfrak{F}' \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+. \tag{4.3}$$

Ясно, что $\mathbb{S}(\mathbf{N},0) = \mathbf{N}$. Легко видеть, что $T \times \mathbb{R}^n$ есть объединение всех множеств $S_0(\mathbf{M},\varepsilon) \cap \mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, где $\kappa \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ — фиксированный в дальнейшем параметр приоритетности (в смысле приближенной реализации наведения на ЦМ и соблюдения ФО). Тогда при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\Big(T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} W(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbb{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon))\Big)$$

$$\& \Big(T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} W_k\big(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)\big) \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\Big). \tag{4.4}$$

Согласно (4.4) получаем, что (см. [6; 7]) при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\big(\Sigma_0^{(k)}(t, x \mid \kappa) \stackrel{\triangle}{=} \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t, x) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+) \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big)$$

$$\& \big(\Sigma_0(t, x \mid \kappa) \stackrel{\triangle}{=} \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t, x) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)\big), \tag{4.5}$$

а при (4.5) имеем для $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\big(\varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa) \stackrel{\triangle}{=} \inf(\Sigma_0^{(k)}(t, x \mid \kappa)) \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big) \& \big(\varepsilon_0(t, x \mid \kappa) \stackrel{\triangle}{=} \inf(\Sigma_0(t, x \mid \kappa)) \in \mathbb{R}_+\big). \tag{4.6}$$

Учитывая (4.6), введем в рассмотрение функции

$$\big(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \stackrel{\triangle}{=} (\varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big)$$

$$\& \big(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \stackrel{\triangle}{=} (\varepsilon_0(t, x \mid \kappa))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]\big).$$

Дальнейшие положения аналогичны [6]; их, как правило, приводим без доказательств, отсылая к [6]. Через $\leqq$ обозначаем поточечную упорядоченность в $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, получая частично упорядоченное множество (ЧУМ) $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leqq)$. Тогда $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \leqq \varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot \mid \kappa) \ \forall k \in \mathbb{N}_0$. При $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ в виде пересечения всех множеств $\Sigma_0^{(k)}(t, x \mid \kappa)$, $k \in \mathbb{N}_0$, реализуется $\Sigma_0(t, x \mid \kappa)$; подобно [6]

$$\big(\varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa) \in \Sigma_0^{(k)}(t, x \mid \kappa) \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big) \& \big(\varepsilon_0(t, x \mid \kappa) \in \Sigma_0(t, x \mid \kappa)\big). \tag{4.7}$$

Предложение 1. *Функция* $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ *есть точная верхняя грань множества* $\{\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)\colon k \in \mathbb{N}_0\}$ *в* ЧУМ $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leqq)$.

В силу (3.1), (3.3) имеем, что при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ множества (4.5) являются лучами:

$$\big(\Sigma_0(t, x \mid \kappa) = [\,\varepsilon_0(t, x \mid \kappa), \infty\,[\,\big) \& \big(\Sigma_0^{(k)}(t, x \mid \kappa) = [\,\varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa), \infty\,[\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big).$$

Отметим связь функций (4.6) с итерационной процедурой на основе (3.1): если $b \in \mathbb{R}_+$, то

$$\big(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]) = W_k(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b)) \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big)$$

$$\& \big(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]) = W(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b))\big).$$

Полагая $\mathfrak{M} \stackrel{\triangle}{=} \{g \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \mid g^{-1}([0, b]) \in \mathfrak{F} \ \ \forall b \in \mathbb{R}_+\}$, имеем из (3.3), что $(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M} \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \& (\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M})$. Введем в рассмотрение функцию $\zeta_\kappa \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$:

$$\zeta_\kappa(t, x) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{\kappa}\,(\|\cdot\| - \inf)[x; \mathbf{N}\langle t\rangle] \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{4.8}$$

Подобно [6], имеем $(\zeta_\kappa)^{-1}([0, b]) = \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b) \in \mathfrak{F}' \ \ \forall b \in \mathbb{R}_+$. Через ψ_κ обозначим точную верхнюю грань неупорядоченной пары $\{\rho(\cdot; \mathbf{M}); \zeta_\kappa\}$ в ЧУМ $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leqq)$: $\psi_\kappa \in \mathfrak{M}$ и при этом $\psi_\kappa(t, x) \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{\rho((t, x); \mathbf{M}); \zeta_\kappa(t, x)\}) \ \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$. Как легко видеть,

$$\varepsilon_0^{(0)}(\cdot \mid \kappa) = \zeta_\kappa, \tag{4.9}$$

а ψ_κ является мажоринтой $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$: $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leqq \psi_\kappa$. Полагая $\mathfrak{M}_\psi \stackrel{\triangle}{=} \{g \in \mathfrak{M} \mid g \leqq \psi_\kappa\}$, получаем

$$\big(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big) \& \big(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi\big). \tag{4.10}$$

Введем в рассмотрение следующий порядковый интервал:

$$[\zeta_\kappa; \psi_\kappa]^{(0)}_{\leqq} \stackrel{\triangle}{=} \big\{g \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \mid (\zeta_\kappa \leqq g) \& (g \leqq \psi_\kappa)\big\}. \tag{4.11}$$

Из (4.9), (4.11) и предложения 1 вытекает, что

$$\big(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \in [\zeta_\kappa; \psi_\kappa]^{(0)}_{\leqq} \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big) \& \big(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in [\zeta_\kappa; \psi_\kappa]^{(0)}_{\leqq}\big). \tag{4.12}$$

5. Программный оператор и вспомогательный функционал качества

Мы располагаем последовательностью в $\mathfrak{M}_\psi$ (см. (4.10)) и “предельной” функцией $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$. Всюду в дальнейшем полагаем, что для некоторого $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+$ выполнено

$$\mathbb{B}_n(\mathbf{c}) \cap \mathbf{N}\langle t\rangle \neq \varnothing \ \ \forall t \in T.$$

При $t_* \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$ согласно (4.8) получаем, что

$$\zeta_\kappa(\tau, x(\tau)) \leqslant \frac{1}{\kappa}\big[\mathbf{c} + \max_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \|x(t)\|\big]. \tag{5.1}$$

При $t \in T$ полагаем, что мультифункционал $\mathbb{I}_t \in \mathcal{P}'([t, \vartheta_0])^{[t,\vartheta_0]}$ определяется условиями

$$\big(\mathbb{I}_t(t) \stackrel{\triangle}{=} \{t\}\big) \,\&\, \big(\mathbb{I}_t(\vartheta) \stackrel{\triangle}{=} [t, \vartheta\,[\ \ \forall \vartheta \in]\,t, \vartheta_0]\big). \tag{5.2}$$

С учетом (5.1) получаем, что при $t_* \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \leqslant \sup\Big(\big\{\rho((\tau, x(\tau));\, \mathbf{M});\ \frac{1}{\kappa}\big[\mathbf{c} + \max_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \|x(t)\|\big]\big\}\Big); \tag{5.3}$$

при этом $\xi \longmapsto \rho((\xi, x(\xi); \mathbf{M})\colon [t_*, \vartheta_0] \to \mathbb{R}_+$ есть непрерывная функция и достигает максимума. Поэтому (см. (5.3)) при $t_* \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \leqslant \sup\Big(\big\{\max_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \rho((t, x(t));\, \mathbf{M});\ \frac{1}{\kappa}\big[\mathbf{c} + \max_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \|x(t)\|\big]\big\}\Big); \tag{5.4}$$

если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, то (см. (5.4)) функция $\xi \longmapsto g(\xi, x(\xi))\colon [t_*, \vartheta_0] \to \mathbb{R}_+$ ограничена и при $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\sup\big(\big\{\sup_{\xi\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} g(\xi, x(\xi));\ \rho((\vartheta, x(\vartheta));\, \mathbf{M})\big\}\big)$$

$$\leqslant \sup\Big(\big\{\max_{\xi\in[t_*,\vartheta_0]} \rho((\xi, x(\xi));\, \mathbf{M});\ \frac{1}{\kappa}\big[\mathbf{c} + \max_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \|x(t)\|\big]\big\}\Big). \tag{5.5}$$

Исходя из этого, полагаем при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, что $\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]]$ определяется правилом

$$\forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$$

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\mathbf{x}(\cdot), \vartheta) \stackrel{\triangle}{=} \sup\big(\big\{\sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} g(t, x(t));\ \rho((\vartheta, x(\vartheta));\, \mathbf{M})\big\}\big). \tag{5.6}$$

Используя (5.5) и условия равномерной ограниченности, получаем, что при $t_* \in T$ и $x_* \in \mathbb{R}^n$

$$\exists b \in \mathbb{R}_+ \colon \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\mathbf{x}(\cdot), \vartheta) \leqslant b \ \ \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \ \ \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{5.7}$$

Как и в [6], при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\exists \bar{\mathbf{x}}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \colon \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\bar{\mathbf{x}}(\cdot), \vartheta) = \inf_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta);$$

поэтому для зависимости $x(\cdot) \longmapsto \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta)\colon \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \to \mathbb{R}_+$ достигается минимум. Ввиду (5.7) полагаем, что оператор $\Gamma\colon \mathfrak{M}_\psi \to \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ определяется следующим правилом: если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, то функция $\Gamma(g) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ такова, что

$$\Gamma(g)(t_*, x_*) \stackrel{\triangle}{=} \sup_{\nu\in\mathcal{E}_{t_*}} \ \inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]} \ \min_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{5.8}$$

Отметим, что (см. (4.9), (4.10)) $\varepsilon_0^{(0)}(\cdot \mid \kappa) = \zeta_\kappa \in \mathfrak{M}_\psi$, а потому $\Gamma(\zeta_\kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(0)}(\cdot \mid \kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. При $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ имеем $\mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]]$. С другой стороны, по аналогии с [6] выводим (см. (5.1))

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \overset{\triangle}{=} \sup\bigl(\bigl\{\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}); \sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\kappa(t, x(t))\bigr\}\bigr) \in \mathbb{R}_+$$

при $t_* \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$. В силу (5.2) имеем $\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), t_*) = \psi_\kappa(t_*, x(t_*))$. С учетом (5.6) $\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) = \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta)$ при $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$. Далее при $t_* \in T$ по аналогии с [6] для значений функционала

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)} \overset{\triangle}{=} \bigl(\inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta)\bigr)_{x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])} \in \mathcal{R}_+[C_n([t_*, \vartheta_0])] \tag{5.9}$$

получаем, в частности, следующее представление: при $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta); \tag{5.10}$$

вместе с тем из (5.8) вытекает, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\Gamma(\varepsilon_0^{(0)}(\cdot \mid \kappa))(t_*, x_*) = \Gamma(\zeta_\kappa)(t_*, x_*) = \sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta). \tag{5.11}$$

Пусть $\|\cdot\|_{t_*}^{\mathbf{C}}$ есть норма равномерной сходимости на $C_n([t_*, \vartheta_0])$, где $t_* \in T$. Тогда $\forall t \in T \;\; \forall \varepsilon \in]0, \infty[\;\; \exists \delta \in]0, \infty[\;\; \forall x_1(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0]) \;\; \forall x_2(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$

$$\bigl(\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_t^{\mathbf{C}} < \delta\bigr) \Rightarrow \bigl(|\,\omega_\kappa(t, x_1(\cdot), \vartheta) - \omega_\kappa(t, x_2(\cdot), \vartheta)\,| < \varepsilon \;\; \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0]\bigr). \tag{5.12}$$

В силу (5.9) и (5.12) имеем, что при $t_* \in T$ функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ равномерно непрерывен на $(C_n([t_*, \vartheta_0]), \|\cdot\|_{t_*}^{\mathbf{C}})$. Как следствие (см. (5.7) и (5.10)), при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$

$$\min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \tag{5.13}$$

Предложение 2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то*

$$\Gamma(\zeta_\kappa)(t_*, x_*) = \sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \tag{5.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся (5.10), (5.11) и (5.13):

$$\Gamma(\zeta_\kappa)(t_*, x_*) = \sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta)$$

$$= \sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)).$$

С учетом (5.13) получаем равенство (5.14). □

Отметим, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ зависимость $\nu \longmapsto \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \colon \mathcal{E}_{t_*} \to \mathrm{comp}(C_n([t_*, \vartheta_0]))$, где $\mathrm{comp}(C_n([t_*, \vartheta_0]))$ — семейство всех непустых компактов в $C_n([t_*, \vartheta_0])$, непрерывна в метрике Хаусдорфа, отвечающей метризации $C_n([t_*, \vartheta_0])$ посредством нормы $\|\cdot\|_{t_*}^{\mathbf{C}}$ (см. [29, лемма 10.1]). Как следствие, в силу равномерной непрерывности $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ получаем в виде

$$\nu \longmapsto \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \colon \mathcal{E}_{t_*} \to \mathbb{R}_+$$

непрерывный функционал на метризуемом компакте, который достигает максимума, а потому (см. предложение 2) имеет место следствие.

Следствие 1. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то* $\Gamma(\zeta_\kappa)(t_*, x_*)$ *есть программный максимин функционала* $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$: $\Gamma(\zeta_\kappa)(t_*, x_*) = \max_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot))$.

6. Метод программных итераций, 2

В настоящем разделе рассматриваются вопросы итерационной реализации последовательности $(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa))_{k\in\mathbb{N}_0}$ и свойство неподвижной точки функции $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$. Отметим сначала два простых свойства оператора Г. Прежде всего, как и в [6], имеем, что

$$\big(g \leqq \Gamma(g)\ \ \forall g \in \mathfrak{M}_\psi\big) \,\&\, \big(\forall g_1 \in \mathfrak{M}_\psi\ \ \forall g_2 \in \mathfrak{M}_\psi\ \ (g_1 \leqq g_2) \Rightarrow (\Gamma(g_1) \leqq \Gamma(g_2))\big). \tag{6.1}$$

Теорема 1. *Если* $k \in \mathbb{N}_0$, *то* $\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы использует (6.1) и подобно обоснованию аналогичного положения в [6]. □

Итак, получили итерационную процедуру (см. (4.9), теорему 1)

$$\big(\varepsilon_0^{(0)}(\cdot \mid \kappa) = \zeta_\kappa\big) \,\&\, \big(\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa))\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big). \tag{6.2}$$

В силу (4.9), (6.2) и следствия 1 $\varepsilon_0^{(1)}(\cdot \mid \kappa) = \Gamma(\zeta_\kappa)$ — функция программного максимина.

Теорема 2. *Функция* $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ *есть неподвижная точка* Γ: $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $(a_* \triangleq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \,\&\, (b_* = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa))(t_*, x_*))$. Тогда в силу (6.1) $a_* \leqslant b_*$. По сути, здесь имеет место равенство. В самом деле, из (4.5), (4.7) вытекает $(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*))$, а потому (см.(3.3)) получаем, что $(t_*, x_*) \in \mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](W(S_0(\mathbf{M}, a_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa a_*)))$. Поэтому $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}\ \ \exists \mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)\ \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$\big(\rho((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant a_*\big) \,\&\, \big(\varepsilon_0(t, \mathbf{x}(t) \mid \kappa) \leqslant a_*\ \ \forall t \in [t_*, \vartheta\,[\big); \tag{6.3}$$

мы учли здесь (3.1), (4.5), (4.6). В свою очередь, из (5.6) и (6.3) имеем

$$\inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]}\ \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa); t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant a_* \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}. \tag{6.4}$$

При выводе (6.4) учитываем две возможности, связанные с (5.2). Из (6.4) вытекает, что $b_* = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa))(t_*, x_*)) \leqslant a_*$, чем завершается проверка равенства $a_* = b_*$. Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, получаем совпадение $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ и $\Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa))$. □

Введем в рассмотрение $\mathfrak{M}_\psi^{(\Gamma)} \triangleq \{g \in \mathfrak{M}_\psi \mid g = \Gamma(g)\}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)} \triangleq \{g \in \mathfrak{M}_\psi^{(\Gamma)} \mid \zeta_\kappa \leqq g\}$. Тогда имеем, что $\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)} \subset [\zeta_\kappa; \psi_\kappa]_{\leqq}^{(0)}$ и согласно (4.10) и теореме 2 $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi^{(\Gamma)}$.

Теорема 3. *Функция* $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ *есть* $\leqq$*-наименьший элемент* $\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$, *т. е.* $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$ *и при этом* $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leqq g\ \ \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (4.12) получаем свойство $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$. Пусть $\mathbf{g} \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$. Тогда, в частности, $\mathbf{g} \in \mathfrak{M}_\psi^{(\Gamma)}$, т. е. $\mathbf{g} \in \mathfrak{M}_\psi$ и $\mathbf{g} = \Gamma(\mathbf{g})$. При этом (см. (4.11)) $\mathbf{g} \in [\zeta_\kappa; \psi_\kappa]_{\leqq}^{(0)}$. Мы получили, в частности, свойства

$$\big(\mathbf{g} = \Gamma(\mathbf{g})\big) \,\&\, \big(\zeta_\kappa \leqq \mathbf{g}\big). \tag{6.5}$$

Пусть $\mathfrak{N} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid \varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \leqq \mathbf{g}\}$. Отсюда ввиду (4.9) и (6.5) $0 \in \mathfrak{N}$. Пусть $\mathbf{n} \in \mathfrak{N}$, т. е. $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0$ и $\varepsilon_0^{(\mathbf{n})}(\cdot \mid \kappa) \leqq \mathbf{g}$. Тогда $\mathbf{n} + 1 \in \mathbb{N}_0$ и при этом $\varepsilon_0^{(\mathbf{n+1})}(\cdot \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(\mathbf{n})}(\cdot \mid \kappa))$ в силу теоремы 1. По выбору $\mathbf{n}$ имеем из (6.1), что $\Gamma(\varepsilon_0^{(\mathbf{n})}(\cdot \mid \kappa)) \leqq \Gamma(\mathbf{g})$. Из (6.5) следует, что $\varepsilon_0^{(\mathbf{n+1})}(\cdot \mid \kappa) \leqq \mathbf{g}$, а тогда $\mathbf{n} + \mathbf{1} \in \mathfrak{N}$. Получили, что $(0 \in \mathfrak{N}) \,\&\, (k + 1 \in \mathfrak{N}\ \ \forall k \in \mathfrak{N})$. По индукции имеем равенство $\mathfrak{N} = \mathbb{N}_0$, следовательно, $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \leqq \mathbf{g}\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0$. Ввиду предложения 1 $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leqq \mathbf{g}$. Поскольку выбор $\mathbf{g}$ был произвольным, установлено, что $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leqq g\ \ \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$. □

Возвращаясь к (4.12), отметим, что, как легко видеть, $\forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n\ \ (\kappa\, \rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \leqslant (\|\cdot\| - \inf)[x_*; \mathbf{N}\langle t_* \rangle]) \Rightarrow (\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \zeta_\kappa(t_*, x_*))$.

7. Минимакс в классе квазистратегий

Фиксируем позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ в пределах настоящего раздела и расмотрим игровую задачу на минимакс $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ в классе квазистратегий игрока I. Поскольку $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \in \mathcal{F}'$ и $\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \in \mathfrak{F}'$ при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, имеем в силу (4.5) и (4.7), что (см. [4, предложение 10.3])

$$\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*) \overset{\triangle}{=} \pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \cdot \mid S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \rangle \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}, \tag{7.1}$$

где $\varepsilon_* \overset{\triangle}{=} \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \in \mathbb{R}_+$. Согласно [4, (10.22)] и (7.1) имеем при $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, что

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)(\nu) = \big\{\eta \in \Pi_{t_*}(\nu) \mid \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \big((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)\big) \\ \&\big((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta\,[\,)\big\}.\end{aligned} \tag{7.2}$$

Предложение 3. *Справедливо неравенство*

$$\max_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*. \tag{7.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (2.6), (4.5), (4.7) и (7.2) имеем

$$\forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)] \ \ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]\colon (\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant \varepsilon_*) \,\&\, (\zeta_\kappa(t, x(t)) \leqslant \varepsilon_* \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta\,[\,)$$

(учтены также (3.2) и (4.8)). Получаем, что $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*$ $\forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]$ (при доказательстве учитываем две возможности, отмеченные в (5.2)). Установлено (7.3). □

В силу непрерывности $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ и компактности $\mathcal{H}_{t_*}$ функционал $(\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)))_{\eta \in \mathcal{H}_{t_*}} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{H}_{t_*}]$ ограничен, а потому при $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$ имеем (конечное) значение $\sup\limits_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}_+$. Поскольку $\tilde{A}_{t_*}^{\Pi} \neq \varnothing$ и $\tilde{A}_{t_*}^{\Pi} \subset \tilde{A}_{t_*}$, определены значения

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \overset{\triangle}{=} \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}_+\big) \\ \&\big(\mathbf{v}_\kappa^{\Pi}(t_*, x_*) \overset{\triangle}{=} \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}} \max_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}_+\big);\end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \leqslant \mathbf{v}_\kappa^{\Pi}(t_*, x_*) \leqslant \max_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*. \tag{7.5}$$

Предложение 4. *Если* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+$ *и* $\mathbf{b} < \varepsilon_*$, *то* $\mathbf{b} \leqslant \sup\limits_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot)) \ \ \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*}$.

При доказательстве учитываем, что $\mathbf{b} \notin \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$, $(t_*, x_*) \notin W(S_0(\mathbf{M}, b_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa b_*))$ и можно использовать [4, теорема 10.1], отдельно рассматривая две возможности в (5.2). □

Из предложения 4 выводим, что $\varepsilon_* \leqslant \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*)$, а тогда (см. (7.4), (7.5)) имеем

Предложение 5. *Справедлива цепочка равенств*

$$\varepsilon_* = \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) = \mathbf{v}_\kappa^{\Pi}(t_*, x_*) = \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot)).$$

Поскольку $\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*) \in \tilde{A}_{t_*}$ в силу (7.1), получаем, что (см. (7.4), предложение 5)

$$\varepsilon_* = \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot)).$$

Теорема 4. *Справедлива цепочка равенств*

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \\ = \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)).\end{aligned}$$

8. Свойство функции цены

Рассмотрим связь $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ с функцией максимина в классе стратегий-троек игрока II. Будем использовать положения [5], восходящие к [29, §11].

Предложение 6. *Если* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, *то справедливо равенство*

$$\mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = \big\{(t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \;\big|\; \exists V \in \mathfrak{V}\ \exists \beta \in \mathbb{G}_t^*\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t; x; V; \beta; m]\ \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0]\ \big(\rho((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant \varepsilon\big) \Rightarrow \big(\exists \tau \in \mathbb{I}_t(\vartheta)\colon \varepsilon < \zeta_\kappa(\tau, \mathbf{x}(\tau))\big)\big\}. \tag{8.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Через Ω обозначим множество в правой части (8.1). С учетом (3.6) и [5, теорема 9.2] имеем, как легко видеть, цепочку равенств

$$\Omega_0 \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = \big\{(t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \;\big|\; \exists V \in \mathfrak{V}\ \exists \beta \in \mathbb{G}_t^*\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t; x; V; \beta; m]\ \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0]\ \big((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)\big) \Rightarrow \big(\exists \tau \in [t, \vartheta\, [\colon (\tau, \mathbf{x}(\tau)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)\big)\big\}.$$

Пусть $(t_*, x_*) \in \Omega$. В силу (4.2) для некоторых $V_* \in \mathfrak{V}$, $\beta_* \in \mathbb{G}_{t_*}^*$ и $r \in \mathbb{N}$ имеем свойство: $\forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V_*; \beta_*; r]\ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\big((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)\big) \Rightarrow \big(\exists \tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)\colon \varepsilon < \zeta_\kappa(\tau, \mathbf{x}(\tau))\big), \tag{8.2}$$

при этом $(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)$. Пусть $\bar{\mathbf{x}}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V_*; \beta; r]$. Тогда в силу (5.2) $\forall \vartheta \in]\, t_*, \vartheta_0]$

$$\big((\vartheta, \bar{\mathbf{x}}(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists \tau \in [t_*, \vartheta\, [\colon \varepsilon < \zeta_\kappa(\tau, \bar{\mathbf{x}}(\tau))\big), \tag{8.3}$$

при этом $\bar{\mathbf{x}}(t_*) = x_*$, а потому имеем согласно (5.2) и (8.2) импликацию $((t_*, \bar{\mathbf{x}}(t_*)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\varepsilon < \zeta_\kappa(t_*, \bar{\mathbf{x}}(t_*)))$ и с учетом (4.3) и (4.8) получаем, что $((t_*, \bar{\mathbf{x}}(t_*)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow ((t_*, x_*) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))$.

По выбору (t_*, x_*) имеем, что $(t_*, \bar{\mathbf{x}}(t_*)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$. С учетом (8.3) получаем теперь, что $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]\ \ ((\vartheta, \bar{\mathbf{x}}(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists \tau \in [t_*, \vartheta\, [\colon \varepsilon < \zeta_\kappa(\tau, \bar{\mathbf{x}}(\tau)))$. Согласно (4.3) и (4.8) имеем с очевидностью, что $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]\ \ ((\vartheta, \bar{\mathbf{x}}(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists \tau \in [t_*, \vartheta\, [\colon (\tau, \bar{\mathbf{x}}(\tau)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))$. Поскольку выбор $\bar{\mathbf{x}}(\cdot)$ был произвольным, установлено, что $(t_*, x_*) \in \Omega_0$. Итак, $\Omega \subset \Omega_0$. Пусть $(t^*, x^*) \in \Omega_0$, т. е. $(t^*, x^*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)$ и для некоторых $V^* \in \mathfrak{V}$, $\beta^* \in \mathbb{G}_{t^*}^*$ и $l \in \mathbb{N}$ справедливо следующее свойство: $\forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t^*; x^*; V^*; \beta^*; l]\ \ \forall \vartheta \in [t^*, \vartheta_0]$

$$\big((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)\big) \Rightarrow \big(\exists \tau \in [t^*, \vartheta\, [\colon (\tau, \mathbf{x}(\tau)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)\big). \tag{8.4}$$

Пусть $x^0(\cdot) \in \mathfrak{X}[t^*; x^*; V^*; \beta^*; l]$. Из (8.4) имеем, в частности, с учетом (5.2), что $\forall \vartheta \in]\, t^*, \vartheta_0]$ $((\vartheta, x^0(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists \tau \in \mathbb{I}_{t^*}(\vartheta)\colon \varepsilon < \zeta_\kappa(\tau, x^0(\tau)))$ (см. (4.3), (4.8)). При этом $[t^*, t^*\, [= \varnothing$, а потому (см. (8.4)) $(t^*, x^0(t^*)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$, т. е. $\varepsilon < \rho((t^*, x^0(t^*)); \mathbf{M})$. Ввиду (4.2) получаем, что $\forall \vartheta \in [t^*, \vartheta_0]\ \ (\rho((\vartheta, x^0(\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant \varepsilon) \Rightarrow (\exists \tau \in \mathbb{I}_{t^*}(\vartheta)\colon \varepsilon < \zeta_\kappa(\tau, x^0(\tau)))$. Поскольку $x^0(\cdot)$ выбиралось произвольно, установлено, что $(t^*, x^*) \in \Omega$, чем завершается проверка вложения $\Omega_0 \subset \Omega$ и равенства $\Omega_0 = \Omega$. □

Предложение 7. *Если* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $t_* \in T$ *и* $\mathbf{x}(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, *то истинна импликация*

$$\big(\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]\ \ (\rho((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant \varepsilon) \Rightarrow (\exists \tau \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)\colon \varepsilon < \zeta_\kappa(\tau, \mathbf{x}(\tau)))\big) \Rightarrow \big(\varepsilon \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot))\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из определений. □

Из предложений 6 и 7 вытекает, что $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \forall (t, x) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\ \exists V \in \mathfrak{V}\ \exists \beta \in \mathbb{G}_t^*\ \exists m \in \mathbb{N}\colon \varepsilon \leqslant \gamma_t^{(\kappa)}(\mathbf{x}(\cdot))\ \ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t; x; V; \beta; m]$.

Следствие 2. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ *и* $\mathbf{b} \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)\,[$, *то* $\exists V \in \mathfrak{V}\ \exists \beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}\ \exists m \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{b} \leqslant \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; m]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)). \tag{8.5}$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+$ со свойством $\mathbf{b} < \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)$. В силу (4.5), (4.6) $(t_*, x_*) \notin W(S_0(\mathbf{M}, \mathbf{b}), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\mathbf{b}))$. Поэтому $\exists V \in \mathfrak{V}\ \exists \beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}\ \exists m \in \mathbb{N}$: $\mathbf{b} \leqslant \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot))\ \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; m]$. Получили (8.5). $\square$

Предложение 8. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ *и* $m \in \mathbb{N}$, *то*

$$\exists x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; m]\colon \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(\mathbf{x}(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa).$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$ и $m \in \mathbb{N}$; тогда $\varepsilon_* \stackrel{\triangle}{=} \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$ в силу (4.7) и $(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$; согласно (3.6) $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_m(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Из [5, предложение 7.5] вытекает, что $((\vartheta^0, x^0(\vartheta^0)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*))\,\&\,((t, x^0(t)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)\ \forall t \in [t_*, \vartheta^0\,[)$ для некоторых $x^0(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; m]$ и $\vartheta^0 \in [t_*, \vartheta_0]$. Ясно, что $x^0(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $x^0(t_*) = x_*$; $(\vartheta^0 = t_*) \vee (\vartheta^0 \in]\,t_*, \vartheta_0])$. Легко видеть, что в обоих случаях $\omega_\kappa(t_*, x^0(\cdot), \vartheta^0) \leqslant \varepsilon_*$ (в первом случае следует учесть то, что $(t_*, x^0(t_*)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)$). С учетом (5.9) выводим, что $\gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x^0(\cdot)) \leqslant \varepsilon_*$. $\square$

Согласно предложению 8 имеем, что $\inf\limits_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t; x; V; \beta; m]} \gamma^{(\kappa)}_t(\mathbf{x}(\cdot)) \leqslant \varepsilon_0(t, x \mid \kappa)\ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n\ \forall V \in \mathfrak{V}\ \forall \beta \in \mathbb{G}^*_t\ \forall m \in \mathbb{N}$. Как следствие, получаем при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, что

$$\sup_{(V, \beta, m) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{G}^*_t \times \mathbb{N}}\ \inf_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t; x; V; \beta; m]} \gamma^{(\kappa)}_t(\mathbf{x}(\cdot)) \in [0, \varepsilon_0(t, x \mid \kappa)]. \tag{8.6}$$

Из (8.6) и следствия 2 вытекает

Теорема 5. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то справедливо равенство*

$$\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \sup_{(V, \beta, m) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{G}^*_{t_*} \times \mathbb{N}}\ \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; m]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)).$$

Из теорем 4 и 5 выводим следующее свойство функции цены: если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}}\ \sup_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(\mathbf{x}(\cdot)) = \min_{\alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}}\ \max_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(\mathbf{x}(\cdot))$$

$$= \sup_{(V, \beta, m) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{G}^*_{t_*} \times \mathbb{N}}\ \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; m]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
2. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
4. **Ченцов А. Г.** Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 304–321.
5. **Ченцов А. Г.** Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений формируемого управления // Изв. ИМИ Удмурт. гос. ун-та. 2017. Т. 49. С. 17–54. doi: 10.20537/2226-3594-2017-49-02 .
6. **Ченцов А. Г.** Некоторые вопросы теории дифференциальных игр с фазовыми ограничениями // Изв. ИМИ Удмурт. гос. ун-та. 2020. Т. 56. С. 138–184. doi: 10.35634/2226-3594-2020-56-10 .

7. **Ченцов А. Г.** Релаксации игровой задачи сближения, связанные с альтернативой в дифференциальной игре сближения-уклонения // Вестн. российских ун-тов. Математика. 2020. Т. 25, № 130. С. 196–244. doi: 10.20310/2686-9667-2020-25-130-196-244 .
8. **Ченцов А. Г., Хачай Д. М.** Оператор программного поглощения и релаксация дифференциальной игры сближения-уклонения // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, № 1. С. 64–91. doi: 10.35634/vm200106 .
9. **Chentsov A. G., Khachay D. M.** Program iterations method and relaxation of a pursuit-evasion differential game // Advanced control techniques in complex engineering systems: Theory and applications. 2019. P. 129–161. (Studies in Systems, Decision and Control; vol. 203). doi: 10.1007/978-3-030-21927-7_7 .
10. **Chentsov A. G., Khachay D. M.** Relaxation of a dinamic game of guidance and program constructions of control // Minimax theory and its applications. 2020. Vol. 5, №. 2. P. 275–304.
11. **Красовский Н. Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Физматлит, 1970. 420 p.
12. **Красовский Н. Н.** Дифференциальная игра сближения-уклонения. I // Изв. АН СССР: Техническая кибернетика. 1973. № 2. С. 3–18.
13. **Красовский Н. Н.** Дифференциальная игра сближения-уклонения. II // Изв. АН СССР: Техническая кибернетика. 1973. № 3. С. 22–42.
14. **Ченцов А. Г.** О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 6. С. 1272–1275.
15. **Ченцов А. Г.** К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 1. С. 73–76.
16. **Чистяков С. В.** К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 825–832.
17. **Ухоботов В. И.** Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 358–364.
18. **Субботин А. И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
19. **Subbotin A. I.** Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p. (Systems & Control: Foundations & Appl.).
20. **Субботин А. И.** Непрерывные и разрывные решения краевых задач для уравнений с частными производными первого порядка // Докл. РАН. 1992. Т. 323, № 1. С. 30–34.
21. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 6. С. 736–739.
22. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона — Якоби и ее обобщения // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 311–334.
23. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
24. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
25. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 352 с.
26. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы: Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 895 с.
27. **Кряжимский А. В.** К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
28. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
29. **Ченцов А. Г.** Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения. Деп. в ВИНИТИ 04.06.79, №1933-79 / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1979. 103 с.
30. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры. I. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. 388 с.

Поступила 12.03.2021
После доработки 13.05.2021
Принята к публикации 17.05.2021

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук
член-корреспондент РАН, профессор
главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
профессор
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965. doi: 10.1016/0021-8928(70)90158-9 .
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* NY: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Isaacs R. *Differential games.* NY: John Wiley and Sons, 1965, 384 p. ISBN: 0471428604 . Translated to Russian under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir Publ., 1967, 479 p.
4. Chentsov A.G. The program iteration method in a game problem of guidance. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 297, no. 1, pp. 43–61. doi: 10.1134/S0081543817050066 .
5. Chentsov A.G. Iterations of stability and the evasion problem with a constraint on the number of switchings of the formed control. *Izv. IMI UdGU*, 2017, vol. 49, pp. 17–54 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2017-49-02 .
6. Chentsov A.G. Some questions of differential game theory with phase constraints. *Izv. IMI UdGU*, 2020, vol. 56, pp. 138–184 (in Russian). doi: 10.35634/2226-3594-2020-56-10 .
7. Chentsov A.G. Relaxation of the game problem of guidance connected with alternative in guidance-evasion differential game. *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 196–244. doi: 10.20310/2686-9667-2020-25-130-196-244 . (in Russian)
8. Chentsov A.G., Khachay D.M. Relaxation of pursuit-evasion differential game and program absorption operator. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2020, vol. 30, no. 1, pp. 64–91 (in Russian). doi: 10.35634/vm200106 .
9. Chentsov A.G., Khachay D.M. Program iterations method and relaxation of a pursuit-evasion differential game. In: Kondratenko Y., Chikrii A., Gubarev V., Kacprzyk J. (eds), *Advanced Control Techniques in Complex Engineering Systems: Theory and Applications*, Ser. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 203, Cham: Springer, 2019, pp. 129–161. doi: 10.1007/978-3-030-21927-7_7 .
10. Chentsov A.G., Khachay D.M. Relaxation of a dynamic game of guidance and program constructions of control. *Minimax Theory and its Applications*, 2020, vol. 5, no. 2, pp. 275–304.
11. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow: Nauka Publ., 1970, 420 p.
12. Krasovskii N.N. A differential game of approach and evasion. I. *Engrg. Cybernetics*, 1973, vol. 11, no. 2, pp. 189–203.
13. Krasovskii N.N. A differential game of approach and evasion. II. *Engrg. Cybernetics*, 1973, vol. 11, no. 3, pp. 376–394.
14. Chentsov A.G. The structure of a certain game-theoretic approach problem. *Soviet Math. Dokl.*, 1975, vol. 16, no. 5, pp. 1404–1408.
15. Chentsov A. On a game problem of guidance. *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
16. Chistyakov S.V. On solutions for game problems of pursuit. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 825–832 (in Russian).
17. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 350–354. doi: 10.1016/0021-8928(77)90021-1 .
18. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* [Minimax Inequalities and Hamilton–Jacobi Equations]. Moscow: Nauka Publ., 1991, 216 p. ISBN: 5-02-000139-2 .
19. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective.* Basel: Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 .
20. Subbotin A.I. Continuous and discontinuous solutions of boundary value problems for first-order partial differential equations. *Russ. Acad. Sci., Dokl., Math.*, 1992, vol. 45, no. 2, pp. 257–261.
21. Subbotin A.I., Chentsov A.G. An iteration procedure for constructing minimax and viscous solutions to Hamilton–Jacobi equations. *Dokl. Math.*, 1996, vol. 53, no. 3, pp. 416–419.

22. Subbotin A.I., Chentsov A.G. An iterative procedure for constructing minimax and viscosity solutions to the Hamilton–Jacobi equations and its generalization. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1999, vol. 224, pp. 286–309.
23. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory.* Warszawa: PWN - Polish Scientific Publ., 1968, 417 p. ISBN: 9780444534170. Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv.* Moscow: Mir Publ., 1970, 416 p.
24. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis.* NY: Acad. Press, 1960, 361 p. Translated to Russian under the title *Osnovy sovremennogo analiza.* Moscow: Mir Publ., 1964, 430 p.
25. Billingsley P. *Convergence of probability measures.* NY: Wiley, 1968, 253 p. ISBN: 0471072427. Translated to Russian under the title *Skhodimost' veroyatnostnykh mer.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 352 p.
26. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear Operators. I. General Theory.* NY: Interscience Publ., 1958, 858 p. ISBN: 0470226056. Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.* Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962, 896 p.
27. Kryazhimskii A.V. On the theory of positional differential games of approach-evasion. *Soviet Math. Dokl.*, 1978, vol. 19, no. 2, pp. 408–412.
28. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 288 p.
29. Chentsov A.G. *Metod programmnykh iteratsii dlya differentsial'noi igry sblizheniya-ukloneniya* [The method of program iterations for a differential approach-evasion game]. Sverdlovsk, 1979. Available from VINITI, no. 1933-79, 102 p.
30. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery*, I [Elements of Finitely Additive Measure Theory, I]. Yekaterinburg: USTU-UPI Publ., 2008, 388 p. ISBN: 978-5-321-01408-0.

Received March 12, 2021
Revised May 13, 2021
Accepted May 17, 2021

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru.

Cite this article as: A. G. Chentsov. The program iteration method and the relaxation problem, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 211–226.