ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 3 2021

УДК 517.977

О ПОСТРОЕНИИ РАЗРЫВНОГО КУСОЧНО-АФФИННОГО СИНТЕЗА В ЗАДАЧЕ ЦЕЛЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

П. А. Точилин, И. А. Чистяков

В данной работе предложен новый метод приближенного решения задач разрешимости и синтеза управлений для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод основывается на кусочной линеаризации (гибридизации) уравнений, а также на использовании подхода динамического программирования и принципа сравнения. Основная идея состоит в построении кусочно-аффинных функций цены и позиционного управления специального вида. При этом рассмотрены случаи, когда указанные функции должны быть непрерывными либо могут иметь разрывы на определенных множествах в фазовом пространстве. В обоих случаях получены внутренние оценки множеств разрешимости исходной нелинейной системы, а также управление в форме обратной связи, которое переводит фазовый вектор системы в целевое множество на заданном конечном интервале времени.

Ключевые слова: нелинейная динамика, синтез управлений, динамическое программирование, принцип сравнения, линеаризация, система с переключениями, кусочно-аффинная функция цены.

P. A. Tochilin, I. A. Chistyakov. On the construction of a discontinuous piecewise affine synthesis in a target control problem.

A new method is proposed for the approximate solution of problems of solvability and control synthesis for a nonlinear system of ordinary differential equations. The method is based on the piecewise linearization (hybridization) of equations and on the use of the dynamic programming approach and the comparison principle. The main idea is to construct piecewise affine value functions and a feedback control of a special form. Two cases are considered: when these functions are continuous and when they may have discontinuities on certain sets in the state space. In both cases, we obtain internal estimates for the solvability sets of the original nonlinear system and a feedback control that takes the system's state vector to the target set on a given finite time interval.

Keywords: nonlinear dynamics, control synthesis, dynamic programming, comparison principle, linearization, switched system, piecewise affine value function.

MSC: 93C10, 49L20, 34A38

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-194-210

Введение

Работа посвящена методам приближенного решения задачи управления системой нелинейных дифференциальных уравнений на конечном отрезке времени в классе позиционных стратегий. Основная идея состоит в сочетании методов теории динамического программирования (и в частности, *принципа сравнения*, [1; 2]) с аппаратом кусочно-аффинных функций цены и управления, заданных на совокупностях симплексов в фазовом пространстве [3; 4].

Задача синтеза управлений может быть решена за счет использования *уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана* (ГЯБ) [2; 5] для вспомогательной функции цены с заданными краевыми условиями. В общем случае такую функцию необходимо искать в классе обобщенных решений указанного уравнения (см. [6–8]). При этом нулевое множество уровня построенной функции определяет *множество разрешимости* рассматриваемой системы, содержащее все стартовые позиции, из которых можно решить *задачу синтеза управлений*. Построение такого множества, а также соответствующего многозначного отображения — трубки разрешимости —

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19–01–00613а) и при содействии Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение №075-15-2019-1621).

является непростой актуальной проблемой. Трубка разрешимости или ее внутренние аппроксимации могут быть использованы для нахождения целевого управления в форме обратной связи за счет "прицеливания" на нее (см. [9]). В данной работе функцию цены предлагается оценивать сверху при помощи кусочно-аффинных функций специального вида. Это позволяет получить внутренние оценки искомого множества разрешимости и искомый синтез управлений.

Представленные здесь результаты являются продолжением исследований, начало которых содержится в [10; 11]. В частности, в [10] была описана общая схема построения непрерывных и разрывных кусочно-аффинных функций цены для задачи разрешимости. Такие функции предлагалось строить на совокупности симплексов в фазовом пространстве. Однако построенные при помощи таких методов оценки впоследствии удалось сделать более точными за счет более тщательного анализа погрешностей линеаризации, а также дополнительного отбора симплексов, содержащих искомую оценку множества разрешимости.

Предложенный в настоящей работе подход предполагает построение кусочно-аффинной аппроксимации исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений на заданном разбиении области фазового пространства на симплексы. Такой подход принято называть "гибридизацией" [12; 13]. Далее при помощи принципа сравнения необходимо построить кусочно-аффинную функцию цены для полученной системы с переключениями [14]. Основной сложностью здесь является выбор адекватной схемы пересчета значений функции цены в вершинах симплексов одновременно с построением соответствующего управления в форме обратной связи, которое должно быть допустимым, т. е. порождающим траектории исходной системы, продолжаемые на рассматриваемом отрезке времени. Указанные проблемы в работе решены двумя разными методами. Сначала приведено описание алгоритма построения непрерывной кусочно-аффинной функции цены и соответствующего ей непрерывного кусочно-аффинного управления. Затем полученные результаты обобщены на случай, когда функции цены и управления могут иметь конечные разрывы на границах симплексов.

Работа алгоритмов, основанных на предложенных схемах приближенного построения множеств разрешимости и синтеза управлений, продемонстрирована на вычислительном примере.

1. Математическая модель системы управления

В пространстве $\mathbb{R}^{n_x}$ рассмотрим компактное множество Ω, которое может быть представлено в виде объединения конечного набора симплексов.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \mathbf{f}(t, x) + \mathbf{g}(t, x)u, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

где вектор-функция $\mathbf{f}(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по $x \in \Omega$, матричнозначная функция $\mathbf{g}(t, x)$ непрерывно дифференцируема по $x \in \Omega$, обе функции непрерывны по $t \in [t_0, t_1]$. Начальный и конечный моменты времени t_0, t_1 фиксированы. На управление $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ наложено "жесткое" поточечное ограничение: $u = u(t, x) \in \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ — выпуклое, компактное множество.

Обозначим через $\mathcal{U}_f$ *класс допустимых позиционных управлений*, содержащий многозначные отображения $\mathcal{U} = \mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{P}$, при подстановке которых в уравнение (1.1) должны быть получены дифференциальные включения, имеющие решения при любом начальном векторе фазовых переменных $x_0 \in \Omega$. При этом под решением системы (1.1), замкнутой управлением в форме обратной связи $\mathcal{U}(t, x) \in \mathcal{U}_f$, понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая начальному условию $x(t_0) = x_0$ и для почти всех $t \in (t_0, t_1)$ соответствующему дифференциальному включению, полученному из (1.1). Далее рассматриваются только решения системы (1.1), которые не покидают множество Ω при $t \in [t_0, t_1]$. Предполагается, что множество Ω задано таким образом, что указанные решения существуют.

2. Задача синтеза управлений

Зафиксируем некоторое компактное множество $\mathcal{X}_1 \subset \Omega$. Будем далее считать, что это множество представимо в виде $\mathcal{X}_1 = \{x \in \Omega : \varphi(x) \leq 0\}$, где $\varphi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Основной задачей, решаемой в данной работе, является построение управления в позиционной форме $\mathcal{U}(\cdot) \in \mathcal{U}_f$, которое переводит траекторию системы (1.1) из заданной позиции $(\tau, x(\tau))$, $\tau \in [t_0, t_1]$, в целевое множество $\mathcal{X}_1$. Если попасть во множество $\mathcal{X}_1$ нельзя, то необходимо достичь как можно меньшей его окрестности.

Для любого фиксированного управления $\mathcal{U}(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ обозначим через $x(t, t_0, x_0)|_{\mathcal{U}}$, $t \in [t_0, t_1]$, траекторию замкнутой этим управлением системы (1.1), выпущенную из начальной позиции (t_0, x_0).

Возможный подход к решению поставленной задачи синтеза управлений состоит ([2]) в построении вспомогательных *множеств разрешимости* $\mathcal{W}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, системы (1.1), соответствующих целевому множеству $\mathcal{X}_1$. Далее управление с нужными свойствами может быть определено в результате *прицеливания* на множества $\mathcal{W}(t)$ либо за счет использования соответствующей ему функции цены $V(t, x)$ и уравнения типа ГЯБ.

Множеством разрешимости в классе позиционных управлений $\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ в фиксированный момент времени $t \in [t_0, t_1]$ называется совокупность всех векторов $x \in \Omega$, для каждого из которых существует такое управление $\mathcal{U}(\cdot) \in \mathcal{U}_f$, что для любой траектории $x(\tau) = x(\tau, t, x)|_{\mathcal{U}}$, $\tau \in [t, t_1]$, справедливо включение $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$.

Рассмотрим вспомогательную *функцию цены*

$$V(t, x) = \min_{\mathcal{U}(\cdot) \in \mathcal{U}_f} \max_{x(\cdot)} \left\{ \varphi(x(t_1)) \middle| x(t) = x \right\},$$

где $x(\cdot)$ — компоненты всевозможных траекторий, выпущенных из начальной позиции $\{t, x\}$ при фиксированном управлении $\mathcal{U}(\cdot)$. Функция цены связана со множеством разрешимости соотношением $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1) = \{x \in \Omega : V(t, x) \leq 0\}$. Также будем рассматривать μ-окрестность множества разрешимости $\mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1) = \{x \in \Omega : V(t, x) \leq \mu\}, \mu \geq 0$.

В точках дифференцируемости функция $V(t, x)$ удовлетворяет уравнению ГЯБ следующего вида:

$$\min_{u \in \mathcal{P}} V'(t, x; (1, (\mathbf{f}(t, x) + \mathbf{g}(t, x)u)^T)^T) = 0, \tag{2.1}$$

где $V'(t, x; l)$ — производная функции $V(t, x)$ в точке (t, x) по направлению $l \in \mathbb{R}^{n_x+1}$. В конечный момент времени справедливо соотношение $V(t_1, x) = \varphi(x)$. Функция $V(t, x)$ может не быть непрерывно дифференцируемой, а решение уравнения (2.1) следует понимать в обобщенном смысле [6–8].

3. Система с кусочно-аффинной динамикой

Рассмотрим некоторое разбиение области Ω на симплексы $\Omega^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$, пересекающиеся друг с другом только по граничным точкам. Каждая грань симплекса $\Omega^{(i)}$, являющаяся выпуклой оболочкой n_x его вершин, является либо частью границы самого множества Ω, либо гранью соседнего симплекса $\Omega^{(k)}, k \neq i$. Кроме того, предположим, что $\cup_{i=1}^N \Omega^{(i)} = \Omega$. Занумеруем все вершины симплексов $g_1, \ldots, g_S$, где S — количество уникальных вершин. Здесь и далее верхний индекс (i) обозначает соответствие рассматриваемого понятия (функции, вектора, матрицы) области $\Omega^{(i)}$.

Зафиксируем некоторый симплекс $\Omega^{(i)}$, и пусть $g_1^{(i)}, \ldots, g_{n_x+1}^{(i)}$ — его вершины. Для каждого $x \in \Omega^{(i)}$ найдется единственный вектор $\alpha^{(i)}(x) = (\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{n_x+1}^{(i)})^T$ барицентрических координат, такой что

$$\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)} = 1, \quad \alpha_k^{(i)} \geqslant 0 \ \ \forall k, \quad \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)} g_k^{(i)} = x.$$

В [15] показано, что найдутся такие матрица $H^{(i)}$ и вектор $h^{(i)}$, для которых $\alpha^{(i)}(x) = H^{(i)}x + h^{(i)}$, причем вектор $H^{(i)}x + h^{(i)}$ имеет все неотрицательные компоненты тогда и только тогда, когда $x \in \Omega^{(i)}$.

При $x \in \Omega^{(i)}$ для функции $\mathbf{f}(t,x) + \mathbf{g}(t,x)u$ из (1.1) справедливо представление

$$\mathbf{f}(t,x) + \mathbf{g}(t,x)u = F^{(i)}(t)\alpha^{(i)}(x) + B^{(i)}(t)u + R(t,x) = A^{(i)}(t)x + B^{(i)}(t)u + f^{(i)}(t) + R(t,x), \quad (3.1)$$

где

$$F^{(i)}(t) = (\mathbf{f}(t,g_1^{(i)}), \ldots, \mathbf{f}(t,g_{n_x+1}^{(i)})) \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)}, \quad A^{(i)}(t) = F^{(i)}(t)H^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x},$$

$$B^{(i)} = \frac{1}{n_x+1} \sum_{k=1}^{n_x+1} \mathbf{g}(t, g_k^{(i)}), \quad f^{(i)}(t) = F^{(i)}(t)h^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x},$$

$R(t,x)$ — погрешность локальной линеаризации, для s-й компоненты которой справедлива следующая оценка при $x \in \Omega^{(i)}$:

$$R_s(t,x) \leqslant R_{s,+}^{(i)}(t) = M_{s,+}^{(i)}(t)D_+^{(i)} + N_{s,+}^{(i)}(t), \quad R_s(t,x) \geqslant R_{s,-}^{(i)}(t) = M_{s,-}^{(i)}(t)D_-^{(i)} + N_{s,-}^{(i)}(t).$$

Здесь $s = 1, \ldots, n_x$;

$$M_{s,+}^{(i)}(t) = \max\left\{\lambda_{\max}\Big(\frac{\partial^2 \mathbf{f}_s(t,x)}{\partial x^2}\Big) \colon x \in \Omega^{(i)}\right\}; \quad M_{s,-}^{(i)}(t) = \min\left\{\lambda_{\min}\Big(\frac{\partial^2 \mathbf{f}_s(t,x)}{\partial x^2}\Big) \colon x \in \Omega^{(i)}\right\};$$

$$d_+^{(i)} = \max\left\{ \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k \Big\| \sum_{r=1}^{n_x+1} \alpha_r (g_r^{(i)} - g_k^{(i)}) \Big\|^2 \colon \alpha_k \in [0,1], \ \forall k, \ \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k = 1 \right\};$$

$$d_-^{(i)} = \min\left\{ \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k \Big\| \sum_{r=1}^{n_x+1} \alpha_r (g_r^{(i)} - g_k^{(i)}) \Big\|^2 \colon \alpha_k \in [0,1], \ \forall k, \ \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k = 1 \right\};$$

$$D_{s,+}^{(i)}(t) = \begin{cases} d_+^{(i)}, & M_{s,+}^{(i)}(t) \geq 0, \\ d_-^{(i)}, & M_{s,+}^{(i)}(t) < 0; \end{cases} \quad D_{s,-}^{(i)}(t) = \begin{cases} d_-^{(i)}, & M_{s,-}^{(i)}(t) \geq 0, \\ d_+^{(i)}, & M_{s,-}^{(i)}(t) < 0; \end{cases}$$

$$N_{s,+}^{(i)}(t) = \frac{1}{n_x+1} \max\left\{ \rho\Big(\sum_{k=1}^{n_x+1} \Big(\frac{\partial \mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(t,\zeta_k)\Big)^T (g_k^{(i)} - x) \big| \mathcal{P} \Big) \colon x, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n_x+1} \in \Omega^{(i)} \right\};$$

$$N_{s,-}^{(i)}(t) = \frac{1}{n_x+1} \min\left\{ -\rho\Big(\sum_{k=1}^{n_x+1} \Big(\frac{\partial \mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(t,\zeta_k)\Big)^T (x - g_k^{(i)}) \big| \mathcal{P} \Big) \colon x, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n_x+1} \in \Omega^{(i)} \right\};$$

$\lambda_{\max}(R)$, $\lambda_{\min}(R)$ — максимальное и минимальное собственные значения симметричной матрицы R.

Теперь положим $\mathcal{Q}^{(i)}(t) = [R_{1,-}^{(i)}(t), R_{1,+}^{(i)}(t)] \times [R_{2,-}^{(i)}(t), R_{2,+}^{(i)}(t)] \times \ldots \times [R_{n_x,-}^{(i)}(t), R_{n_x,+}^{(i)}(t)]$. Подробнее о линеаризации системы (1.1) внутри симплекса написано в [10;15]. В данной статье, однако, приведены более точные оценки погрешности.

4. Непрерывная кусочно-аффинная функция цены

На совокупности симплексов $\Omega^{(i)}$ рассмотрим кусочно-аффинную функцию

$$V(t,x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) v_k^{(i)}(t), \text{ если } x \in \Omega^{(i)}. \tag{4.1}$$

Здесь $v_k^{(i)}(t) = V(t, g_k^{(i)})$ дифференцируемы по $t \in [t_0, t_1]$. Для нескольких разных симплексов $\Omega^{(j_1)},\ldots,\Omega^{(j_r)}$, имеющих общую вершину g_k, соответствующие значения функции в этой вершине $v_{k_1}^{(j_1)}(t),\ldots,v_{k_r}^{(j_r)}(t)$ будут совпадать между собой; обозначим их через $v_k(t)$. Таким образом, функция $V(t,x)$ однозначно задается совокупностью величин $v_1(t),\ldots,v_S(t)$. Пусть $v^{(i)}(t) = (v_1^{(i)}(t),\ldots,v_{n_x+1}^{(i)}(t))^T \in \mathbb{R}^{n_x+1}$. Тогда (4.1) можно переписать в виде

$$V(t,x) = (v^{(i)}(t))^T (H^{(i)}x + h^{(i)}), \text{ если } x \in \Omega^{(i)}.$$

Функция $V(t,x)$ является аффинной внутри каждого из симплексов, непрерывна по $x \in \Omega$ при любом фиксированном $t \in [t_0, t_1]$, дифференцируема по любому направлению. Производные по направлениям могут иметь разрывы при переходе точки x через границы соседних симплексов.

Зафиксируем некоторый симплекс $\Omega^{(i)}$. Рассмотрим выражение из уравнения (2.1) при подстановке в него функции $V(t,x)$, $x \in \operatorname{int}\Omega^{(i)}$, а также (3.1):

$$\begin{gathered}\Big[(\dot v^{(i)})^T(H^{(i)}x + h^{(i)}) + (\gamma^{(i)}(t))^T(A^{(i)}(t)x + f^{(i)}(t)) - \rho(-(B^{(i)}(t))^T\gamma^{(i)}(t)|\mathcal{P})\Big] \\ + (\gamma^{(i)}(t))^T R(t,x) = 0, \quad \gamma^{(i)}(t) = (H^{(i)})^T v^{(i)}(t).\end{gathered}$$

Выражение в квадратных скобках является функцией, аффинной по x, а потому принимает экстремальные значения в вершинах $\Omega^{(i)}$.

Далее будут использованы кусочно-аффинные управления следующего вида:

$$u(t,x) = Y^{(i)}(t)(H^{(i)}x + h^{(i)}) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) y_k^{(i)}(t) \text{ при } x \in \Omega^{(i)}, \tag{4.2}$$

где $Y^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+1)}$ — матрица, составленная из столбцов $y_1^{(i)}(t),\ldots,y_{n_x+1}^{(i)}(t)$ — значений управления в вершинах $\Omega^{(i)}$. Если для каждого из векторов $y_k^{(i)}(t)$ справедливо включение $y_k^{(i)}(t) \in \mathcal{P}$, то в силу выпуклости $\mathcal{P}$ $u(t,x) \in \mathcal{P}$ для любого $x \in \Omega$. Управление $u(t,x)$ однозначно определяется совокупностью вектор-функций $y_1(t),\ldots,y_S(t)$, сопоставленных вершинам симплексов. Кроме того, управление $u(t,x)$ непрерывно по x.

Будем использовать также многозначные кусочно-аффинные управления, аналогичные (4.2):

$$\mathcal{U}(t,x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) \mathcal{Y}_k^{(i)}(t) \text{ при } x \in \Omega^{(i)}, \tag{4.3}$$

где каждое из $\mathcal{Y}_k^{(i)}(t) \subseteq \mathcal{P}$ является многозначным отображением с выпуклыми компактными значениями. Отображение $\mathcal{U}(t,x)$ непрерывно по x в смысле хаусдорфовой метрики, если $\mathcal{Y}_k^{(i)}(t) = \mathcal{Y}_k^{(j)}(t)$, $\forall i,j$: $g_k \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$.

Пусть $\eta_1,\ldots,\eta_S$ — такие числа, что

$$\varphi(x) \le (\eta^{(i(x))})^T(H^{(i(x))}x + h^{(i(x))}) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x)\eta_k^{(i(x))} \;\forall x \in \Omega^{(i(x))},$$

где $\eta^{(i(x))} = (\eta_{j_1}^{(i(x))}, \ldots, \eta_{j_{n_x+1}}^{(i(x))})^T$, $g_{j_1}, \ldots, g_{j_{n_x+1}}$ — вершины симплекса $\Omega^{(i(x))}$. В [15] было показано, что для каждого $k = 1, \ldots, S$ в качестве η_k можно взять

$$\eta_k = \varphi(g_k) + \max_{i,s}\{K_s^{(i)} : g_s^{(i)} = g_k\}, \quad K_k^{(i)} = \max_{\xi\in\Omega^{(i)}} \rho_{\max}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(\xi)\Big) \max_{j=1,\ldots,n_x+1} \|g_k^{(i)} - g_j^{(i)}\|^2. \quad (4.4)$$

Пусть

$$\mathcal{K} = \{(i,k)\colon i \in \{1, \ldots, N\},\ k \in \{1, \ldots, S\},\ g_k \in \Omega^{(i)}\}.$$

Теорема 1. *Пусть для любых $t \in [t_0, t_1]$, $k = 1, \ldots, S$*

$$\zeta_k(t,u) = \max_i \Big\{(\gamma^{(i)}(t))^T \big(A^{(i)}(t)g_k + f^{(i)}(t)\big) + \rho\big(\gamma^{(i)}(t)\big|\mathcal{Q}^{(i)}(t)\big) + \big\langle (B^{(i)}(t))^T\gamma^{(i)}(t), u\big\rangle \big| (i,k) \in \mathcal{K}\Big\},$$

$$\gamma^{(i)}(t) = (H^{(i)})^T v^{(i)}(t), \quad \zeta_k(t) = \min\{\zeta_k(t,u)\colon u \in \mathcal{P}\}.$$

Для некоторых непрерывных $\delta_k(t)$ функции $v_k(t)$, $k = 1, \ldots, S$, являются решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot v_k(t) = -\zeta_k(t) + \delta_k(t), & t \in [t_0, t_1], \\ v_k(t_1) = \eta_k, \end{cases} \quad (4.5)$$

а $V(t,x)$ — непрерывная кусочно-аффинная функция, определенная в (4.1).

Для фиксированных $\mu \geq 0$, $t \in [t_0, t_1]$, а также функции $\chi(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, рассмотрим вспомогательное множество

$$\mathcal{I}(\mu, t, \chi(\cdot)) = \Big\{ i = 1, \ldots, N \Big| \exists k = 1, \ldots, n_x+1\colon v_k^{(i)}(t) \leq \mu - \int_t^{t_1} \chi(\tau)d\tau \Big\}. \quad (4.6)$$

Пусть для каждого $t \in [t_0, t_1]$ значение функции $\chi(t)$ определено как наименьшая величина, удовлетворяющая равенству

$$\chi(t) = \max_k \big\{\delta_k(t) \big| (i,k) \in \mathcal{K},\ i \in \mathcal{I}(\mu, t, \chi(\cdot))\big\}. \quad (4.7)$$

Тогда для достаточно большого $\mu > 0$ множество

$$\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0) = \Big\{ x \in \Omega \Big| V(t_0, x) \leq \mu - \int_{t_0}^{t_1} \chi(\tau)d\tau \Big\}$$

является внутренней оценкой множества разрешимости: $\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0) \subseteq \mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1)$.

Доказательство. Предположим, что величина $\mu > 0$ достаточно велика, а потому уравнения (4.7) имеют решения при каждом $t \in [t_0, t_1]$, а множество $\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0)$ не пусто.

Для произвольных $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \Omega$ рассмотрим кусочно-аффинное непрерывное по t, x управление

$$\mathcal{U}^*(t,x) = \sum_{s=1}^{n_x+1} \alpha_s(x)\mathcal{Y}_s^{(i)}(t), \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad (4.8)$$

где

$$\mathcal{Y}_s^{(i)}(t) = \operatorname{Argmin}\{\zeta_k(t,u)\colon u \in \mathcal{P}\}, \quad k \in \{1, \ldots, S\}\colon g_k = g_s^{(i)}.$$

Множества $\mathcal{Y}_s^{(i)}(t)$ при фиксированном t являются выпуклыми компактными подмножествами $\mathcal{P}$, а потому $\mathcal{U}^*(\cdot) \in \mathcal{U}_f$.

Для произвольного вектора $x_0 \in \mathcal{W}_\mu^{int}(t_0)$ определим некоторое решение системы $x(t) = x(t,t_0,x_0)|_{\mathcal{U}^*(\cdot)}$, $t \in [t_0,t_1]$. Пусть

$$u^*(t,x) = \sum_{s=1}^{n_x+1} \alpha_s(x) y_s^{(i)}(t) = (Y^{(i)}(t))^T (H^{(i)}x + h^{(i)}) \in \mathcal{U}^*(t,x)$$

— однозначный селектор многозначного отображения, соответствующий построенной траектории. Здесь матрица $Y^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+1)\times n_u}$ составлена из строк $(y_s^{(i)}(t))^T$: $y_s^{(i)}(t) \in \mathcal{Y}_k^{(i)}(t)$, причем $y_s^{(i)}(t) \equiv y_k(t), \forall i,k\colon g_k = g_s^{(i)}$. Оценим сверху производную функции $V(t,x)$ вдоль построенной траектории[2]:

$$\begin{gathered} V'\big(t,x;(1,A^{(i)}x + B^{(i)}u^*(t,x) + f^{(i)} + R(t,x))^T\big) \le (\dot v^{(i)})^T \big(H^{(i)}x + h^{(i)}\big) \\ + (\gamma^{(i)}(t))^T\big(A^{(i)}x + B^{(i)}(Y^{(i)}(t))^T(H^{(i)}x + h^{(i)}) + f^{(i)}\big) + \rho\big(\gamma^{(i)}(t)|\mathcal{Q}^{(i)}(t)\big) \\ \le \max_k\big\{\dot v_k(t) + (\gamma^{(i)}(t))^T\big(A^{(i)}g_k + B^{(i)}y_k(t) + f^{(i)}\big)\colon (i,k) \in \mathcal{K}\big\} \\ + \rho\big(\gamma^{(i)}(t)|\mathcal{Q}^{(i)}(t)\big) \le \max_k\big\{\dot v_k(t) + \zeta_k(t,y_k)\colon (i,k)\in\mathcal{K}\big\} \\ = \max_k\big\{\dot v_k(t) + \zeta_k(t)\colon (i,k)\in\mathcal{K}\big\} = \max_k\{\delta_k(t)\colon (i,k)\in\mathcal{K}\}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Если в промежуточный момент времени t выполнено условие

$$V(t,x(t)) \le \mu - \int_t^{t_1} \chi(\tau)d\tau, \tag{4.10}$$

то $x(t) \in \Omega^{(i(t))}$, где $i(t) \in \mathcal{I}(\mu,t,\chi(\cdot))$. Следовательно, из (4.9) вытекает неравенство

$$V'\big(t,x;(1,A^{(i)}(t)x + B^{(i)}(t)u^*(t,x) + f^{(i)}(t) + R(t,x))^T\big) \le \chi(t). \tag{4.11}$$

Заметим также, что при $t = t_0$ неравенство (4.10) выполнено согласно определению $\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0)$. Таким образом, неравенства (4.10) и (4.11) справедливы для всех $t \in [t_0,t_1]$. В частности, при $t = t_1$ из (4.10) получаем

$$\varphi(x(t_1)) \le (\eta^{(i(x(t_1)))})^T(H^{(i(x(t_1)))}x + h^{(i(x(t_1)))}) = V(t_1,x(t_1)) \le \mu,$$

откуда следует, что $x_0 \in \mathcal{W}_\mu(t_0,t_1,\mathcal{X}_1)$. □

Теорема 1 сформулирована и доказана для фиксированного начального момента времени t_0, однако легко видеть, что аналогичное утверждение справедливо и для произвольного промежуточного момента времени $t \in [t_0,t_1]$.

Ранее в [10] была сформулирована и доказана теорема о внутренних оценках множеств разрешимости для частного случая $\chi(t) = \max\{\delta_k(t)\colon k = 1,\ldots,S\}$. Функция $\chi(t)$ отвечает за уровень, на котором необходимо построить множество Лебега найденной функции цены для получения оценки множества разрешимости. Уменьшение величины $\chi(t)$ позволит сделать оценку более точной. Именно с этой целью в данной работе используются соотношения (4.6) и (4.7). Предложенная конструкция, в частности, позволяет не учитывать при построении множества $\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0)$ значения $\delta_k(t)$, соответствующие вершинам с большими значениями функции цены.

[2] Для краткости здесь опущены аргументы функций: $i = i(t)$, $x = x(t)$, $A^{(i)} = A^{(i)}(t)$, $B^{(i)} = B^{(i)}(t)$, $f^{(i)} = f^{(i)}(t)$.

При численном расчете функции цены все используемые в теореме 1 дифференциальные уравнения должны быть заменены на соответствующие разностные аналоги на некоторой сетке $\{\tau_j\}$ по параметру t. В частности, соотношения (4.6), (4.7) примут следующий вид:

$$\mathcal{I}(\mu,\tau_j,\chi(\cdot)) = \Big\{ i=1,\dots,N \Big| \exists k=1,\dots,n_x+1\colon v_k^{(i)}(\tau_j) \le \mu - \sum_{r=j+1}^{M} \chi(\tau_r)\Delta\tau_r \Big\},$$

$$\chi(\tau_j) = \max_k \big\{ \delta_k(\tau_j) \big| (i,k)\in\mathcal{K},\ i\in\mathcal{I}(\mu,\tau_j,\chi(\cdot)) \big\}.$$

Требуемое наименьшее значение $\chi(\tau_j)$ можно определить за счет перебора по конечному набору различных величин $\delta_k(\tau_j)$, упорядоченных по возрастанию.

5. Непрерывный кусочно-аффинный синтез управлений

Для некоторой вершины g_k пусть $i_1,\dots,i_m$ — номера симплексов, включающих эту вершину. Определим вспомогательную величину $\Delta_k(v_1,\dots,v_S)$, зависящую от величин $v_1(t),\dots,v_S(t)$ в некоторый промежуточный момент времени $t\in[t_0,t_1]$, следующим образом:

$$\Delta_k(v_1,\dots,v_S) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=j+1}^{m} \|\gamma^{(i_j)}-\gamma^{(i_l)}\|^2.$$

Если $m=1$, то $\Delta_k=0$. Упростим выражение для $\Delta_k(v_1,\dots,v_S)$ с целью сократить вычисления. Для этого рассмотрим совокупность всех вершин $g_{j_1},\dots,g_{j_r}$ симплексов $\Omega^{(i_1)},\dots,\Omega^{(i_m)}$. Будем считать, что $j_1<\dots<j_r$, причем $j_s=k$ для некоторого $s\in\{1,\dots,r\}$. Пусть $\tilde v_k=(v_{j_1},\dots,v_{j_r})^T$, $S_k^{(i)}\in\mathbb{R}^{(n_x+1)\times r}$ — матрицы, для которых $v^{(i)}=S_k^{(i)}\cdot\tilde v_k$, $i=i_1,\dots,i_m$. Тогда

$$\Delta_k(v_1,\dots,v_S) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=j+1}^{m} \big\|((H^{(i_j)})^T S_k^{(i_j)} - (H^{(i_l)})^T S_k^{(i_l)})\tilde v_k\big\|^2 = (\tilde v_k)^T P_k \tilde v_k, \tag{5.1}$$

где

$$P_k = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=j+1}^{m} \big((H^{(i_j)})^T S_k^{(i_j)} - (H^{(i_l)})^T S_k^{(i_l)}\big)^T \big((H^{(i_j)})^T S_k^{(i_j)} - (H^{(i_l)})^T S_k^{(i_l)}\big).$$

Пусть теперь

$$s_k(t) = \operatorname{sign}\left\{ \frac{\partial\Delta_k(v_1,\dots,v_{k-1},v_k+\sigma,v_{k+1},\dots,v_S)}{\partial\sigma}\bigg|_{\sigma=0} \right\} = \operatorname{sign}\left\{2(\mathbf{e}_s)^T P_k\tilde v_k\right\},$$

где у вектора $\mathbf{e}_s\in\mathbb{R}^r$ все элементы нулевые, кроме стоящей на s-й позиции 1. Тогда в уравнении (4.5) положим

$$\delta_k(t) = \varepsilon s_k(t)\Delta_k(t). \tag{5.2}$$

Здесь $\varepsilon>0$ — настраиваемый параметр, каждое значение которого дает свою оценку множества разрешимости. Использование (5.2) в (4.5) позволяет по мере уменьшения t от t_1 к t_0 избегать расхождения величин $\gamma^{(i_j)}$ в соседних симплексах. Альтернативный способ определения величин $\delta_k(t)$ приведен в [11].

Теорема 1 позволяет построить кусочно-аффинный непрерывный синтез управлений, приводящий траекторию системы в априори известную окрестность целевого множества. Непосредственно из формулировки теоремы и ее доказательства могут быть получены следующие формулы:

$$\mathcal{U}^*(t,x) = \sum_{s=1}^{n_x+1} \alpha_s(x)\mathcal{Y}_s^{(i)}(t), \quad x\in\Omega^{(i)}, \quad i=1,\dots,N, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{Y}_s^{(i)}(t) = \operatorname{Argmin}\left\{\zeta_k(t,u)\colon u \in \mathcal{P}\right\}, \quad k \in \{1,\ldots,S\}\colon g_k = g_s^{(i)}, \tag{5.4}$$

$$\zeta_k(t,u) = \max_i \Big\{ (\gamma^{(i)}(t))^T (A^{(i)}(t) g_k + f^{(i)}(t)) + \rho\big(\gamma^{(i)}(t) | \mathcal{Q}^{(i)}(t)\big) + \big\langle (B^{(i)}(t))^T \gamma^{(i)}(t), u \big\rangle \Big|$$
$$i \in \{1,\ldots,N\}\colon (i,k) \in \mathcal{K} \Big\}, \quad \gamma^{(i)}(t) = (H^{(i)})^T v^{(i)}(t) = \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{5.5}$$

Выбор управления в форме (5.3)–(5.5) обусловлен тем, что оно минимизирует полную производную кусочно-аффинной функции цены в каждой из вершин симплексов. Заметим, что в подзадаче (5.4) необходимо найти минимум выпуклой кусочно-аффинной функции на выпуклом компактном множестве. Эта подзадача может быть эффективно решена численно.

6. Разрывные функции цены и управления

Результаты предыдущих разделов вполне обобщаются на случай функций цены и управлений, которые могут иметь разрывы на границах симплексов $\Omega^{(i)}$. В этом разделе будем считать, что система (1.1) стационарна.

Результаты этого раздела являются обобщением подхода, изложенного в [10], использующего понятие *достижимости* одного симплекса из другого, соседнего. В указанной работе достижимость была равномерной по допустимым управлениям. В то же время при построении внутренней оценки множества разрешимости используется конкретная стратегия управления, и эта информация полезна для более тщательного анализа достижимости соседних симплексов.

Предположим, что в каждом симплексе $\Omega^{(i)}$ значения $v^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t)$ и $y^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t)$, соответствующие фиксированной вершине g_k, могут различаться при разных i. Здесь $\sigma(i,k)$ — это номер в локальной нумерации для симплекса $\Omega^{(i)}$, соответствующий вершине g_k, т. е. $g^{(i)}_{\sigma(i,k)} = g_k$. Управление внутри каждого симплекса является многозначной аффинной функцией вида (4.3). Разрывная кусочно-аффинная функция цены по-прежнему может быть определена из (4.1).

Зафиксируем произвольный момент времени $t \in [t_0, t_1]$, а также некоторые множества $\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t) \subset \mathcal{P}$, $(i,k) \in \mathcal{K}$. Рассмотрим два симплекса $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$, имеющих общие вершины $g_{j_1},\ldots,g_{j_m}$, $1 \le m \le n_x$. Пусть $\tilde{\mathcal{H}}_{ij}$ — какая-либо фиксированная (для каждой пары значений i,j) гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n_x}$, для которой $g_{j_1},\ldots,g_{j_m} \in \tilde{\mathcal{H}}_{ij}$, причем $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ лежат в разных полупространствах, образованных $\tilde{\mathcal{H}}_{ij}$. Пусть n_{ij} — единичная нормаль к $\tilde{\mathcal{H}}_{ij}$, указывающая в сторону $\Omega^{(i)}$. Заметим, что при $m = n_x$ гиперплоскость $\tilde{\mathcal{H}}_{ij}$ определена однозначно.

Будем говорить, что $\Omega^{(j)}$ достижим из $\Omega^{(i)}$, если

$$\min\Big\{ (n_{ij})^T \big(A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + v\big)\colon x \in \tilde{\mathcal{H}}_{ij},\ v \in \mathcal{Q}^{(i)}(t),\ u \in \sum_{s=1}^{m} \alpha_s(x) \mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,j_s)} \Big\} \le 0. \tag{6.1}$$

После преобразования из (6.1) получим следующее эквивалентное соотношение:

$$\min_{s=1,\ldots,m} \Big\{ (n_{ij})^T (A^{(i)} g_{j_s} + f^{(i)}) - \rho\big(-n_{ij} | B^{(i)} \mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,j_s)}\big) - \rho\big(-n_{ij} | \mathcal{Q}^{(i)}\big) \Big\} \le 0.$$

Для каждой вершины $g_k \in \{g_{j_1},\ldots,g_{j_m}\}$ введем также обозначение

$$\mathcal{P}_{ijk} = \big\{ u \in \mathcal{P}\colon (n_{ij})^T \big(A^{(i)} g_k + B^{(i)} u + f^{(i)}\big) - \rho\big(-n_{ij} | \mathcal{Q}^{(i)}\big) \ge 0 \big\}.$$

Полученное определение достижимости является необходимым, но недостаточным условием того, что траектория нелинейной системы (1.1) может попасть из одного симплекса в другой, соседний. Если при каком-то управлении $u(t)$ траектория $x(t)$ пересекает границу соседних симплексов $\Omega^{(i)}$, $\Omega^{(j)}$ (из первого симплекса во второй), то второй симплекс гарантированно является достижимым из первого.

Если $\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)} \subseteq \mathcal{P}_{ijk}$ для любой вершины $g_k \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$, то при использовании соответствующего кусочно-аффинного управления траектория системы гарантированно не может перейти из $\Omega^{(i)}$ в $\Omega^{(j)}$ через их общую границу. Заметим, что для некоторых i, j, k множества $\mathcal{P}_{ijk}$ могут оказаться пустыми.

Пусть $i_1, \dots, i_m$ — номера всех симплексов, включающих вершину g_k. Для каждого $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$ пусть

$$\mathcal{I}(i, k, \bar{\mathcal{Y}}(t)) = \big\{ j \in \{i_1, \dots, i_m\},\ j \neq i,\ \Omega^{(j)} \text{ достижим из } \Omega^{(i)} \big\} \cup \{i\}.$$

Здесь и далее через $\bar{\mathcal{Y}}(t)$ обозначена совокупность величин $\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t)$ для всех $(i,k) \in \mathcal{K}$.

Одной из целей введения указанного выше понятия достижимости симплексов, зависящего от управлений, фиксированных в вершинах, является поиск такого итогового разрывного кусочно-аффинного управления, которое, с одной стороны, было бы допустимым, а с другой — наиболее близким к управлению, реализующему операцию $\min_u$ в уравнении (2.1). При заданных функциях $\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t)$ соответствующее кусочно-аффинное управление является допустимым, если выполнено следующее условие:

$$\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t) = \mathcal{Y}^{(j)}_{\sigma(j,k)}(t) \quad \forall i, j, k\colon (i,k) \in \mathcal{K}, \quad (j,k) \in \mathcal{K}, \quad i \in \mathcal{I}(j, k, \bar{\mathcal{Y}}(t)), \quad j \in \mathcal{I}(i, k, \bar{\mathcal{Y}}(t)). \tag{6.2}$$

При подстановке допустимого управления в исходную систему (1.1) при любом заданном начальном значении $x(t_0)$ будет разрешима соответствующая задача Коши для дифференциального включения, а любое соответствующее решение $x(t, t_0, x_0)$ определено при $t \in [t_0, t_1]$. Заметим, что условие (6.2) гарантирует отсутствие скользящих режимов на границах соседних симплексов, причем на границах любых размерностей, не превосходящих $n_x - 1$.

В [10] была описана процедура построения допустимого управления, в котором множества $\mathcal{I}(i, k, \bar{\mathcal{Y}}(t))$ были заменены на более грубые оценки, не зависящие от $\bar{\mathcal{Y}}(t)$. Предложенный в этой работе подход позволяет получить более качественные стратегии управления. Ниже приведен возможный алгоритм определения $\bar{\mathcal{Y}}(t)$ для каждого фиксированного $t \in [t_0, t_1]$.

Алгоритм построения разрывного кусочно-аффинного управления. Зафиксируем некоторый момент времени $t \in [t_0, t_1]$, и пусть $v^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t+0)$, $(i,k) \in \mathcal{K}$ — известные значения функции цены в вершинах симплексов, задающие разрывную кусочно-аффинную функцию цены. Цель алгоритма — определение множеств $\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t) \in \mathcal{P}$, которые будут использованы затем для построения функции цены в момент времени $t-0$. При этом должно быть выполнено условие (6.2). Поскольку момент времени считается фиксированным, то далее зависимость от t будем опускать.

Рассмотрим вспомогательные множества $\mathcal{J}(i,k) \subset \{1, \dots, N\}$, $(i,k) \in \mathcal{K}$, — совокупности номеров симплексов, учитываемых для "склейки" управления в вершине $g^{(i)}_{\sigma(i,k)}$.

Кроме того, в описанном ниже алгоритме будет использовано некоторое правило $\mathcal{F}$ для выбора одного элемента из вспомогательного множества $\mathcal{D} \subset \mathcal{K}$. От этого правила, вообще говоря, зависит конкретная оценка множества разрешимости, которая будет построена в итоге. Потребуем выполнение следующего условия: отрезок $[t_0, t_1]$ можно разбить на части, для каждой из которых правило $\mathcal{F}$ (порядок обработки элементов множества $\mathcal{D}$) является фиксированным.

1) Для каждой пары $(i,k) \in \mathcal{K}$ положим $\mathcal{J}(i,k) = \{i\}$. Пусть

$$\mathcal{S}(i,k) = \big\{ j\colon (j,k) \in \mathcal{K},\ j \neq i,\ v^{(j)}(t+0) > v^{(i)}(t+0) \big\},$$

$$\tilde{\mathcal{P}} = \begin{cases} \mathcal{P} \cap \big(\bigcap_{j \in \mathcal{S}(i,k)} \mathcal{P}_{ijk} \big), & \text{если } \mathcal{S}(i,k) \neq \varnothing, \\ \mathcal{P}, & \text{иначе }, \end{cases} \qquad \gamma^{(j)} = (H^{(j)})^T v^{(j)}(t+0), \tag{6.3}$$

$$\zeta(k, i, u) = \max_j \Big\{ (\gamma^{(j)})^T (A^{(j)} g_k + f^{(j)}) + \rho\big(\gamma^{(j)} | \mathcal{Q}^{(j)}\big) + \big\langle (B^{(j)})^T \gamma^{(j)}, u \big\rangle \big| j \in \mathcal{J}(i,k) \Big\}, \tag{6.4}$$

$$\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)} = \mathrm{Argmin}\{\zeta(k,i,u)\colon u \in \tilde{\mathcal{P}}\}. \tag{6.5}$$

2) При фиксированных найденных на предыдущем шаге величинах $\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)}$ определим множества $\mathcal{I}(i,k,\bar{\mathcal{Y}})$. Далее на основании этих множеств определим все такие пары индексов $(i,k) \in \mathcal{K}$, для каждой из которых либо

$$\exists j \in \{1,\dots,N\}\colon j \in \mathcal{I}(i,k,\bar{\mathcal{Y}}), \quad v^{(j)}_{\sigma(j,k)} \geq v^{(i)}_{\sigma(i,k)}, \quad \mathcal{J}(j,k) \not\subseteq \mathcal{J}(i,k), \tag{6.6}$$

либо

$$\exists j \in \{1,\dots,N\}\colon j \in \mathcal{I}(i,k,\bar{\mathcal{Y}}), \quad i \in \mathcal{I}(j,k,\bar{\mathcal{Y}}), \quad \mathcal{J}(i,k) \neq \mathcal{J}(j,k).$$

Совокупность таких пар обозначим через $\mathcal{D}$.

3) Если множество $\mathcal{D}$ не пусто, то воспользуемся правилом $\mathcal{F}$ для выбора одного элемента $(i^*,k^*) \in \mathcal{D}$. Заменим множество $\mathcal{J}(i^*,k^*)$ на

$$\mathcal{J}(i^*,k^*) \cup \big\{\mathcal{J}(j,k^*)\colon j \in \{1,\dots,N\}\colon j \in \mathcal{I}(i^*,k^*,\bar{\mathcal{Y}}),\ v^{(j)}_{\sigma(j,k^*)} \geq v^{(i^*)}_{\sigma(i^*,k^*)}\big\}$$
$$\cup \big\{\mathcal{J}(j,k^*)\colon j \in \{1,\dots,N\}\colon j \in \mathcal{I}(i^*,k^*,\bar{\mathcal{Y}}),\ i^* \in \mathcal{I}(j,k^*,\bar{\mathcal{Y}})\big\}.$$

После этого пересчитаем новое, “склеенное” управление в вершине $y^{(i^*)}_{\sigma(i^*,k^*)}$ согласно формулам (6.4), (6.5), учитывая новое множество $\mathcal{J}(i^*,k^*)$. Алгоритм снова переходит к п. 2).

4) Если же в п. 2) множество $\mathcal{D}$ оказалось пустым, то алгоритм завершает работу. В итоге получена совокупность множеств $\bar{\mathcal{Y}}$, удовлетворяющая условию (6.2). $\square$

Заметим, что описанный выше алгоритм обязательно завершит свою работу за конечное количество итераций, так как, во-первых, на каждом шаге мощность хотя бы одного из множеств $\mathcal{J}(i,k)$ увеличивается на 1; во-вторых, если все множества $\mathcal{J}(i^*,k^*)$ максимальны, т. е.

$$\mathcal{J}(i,k) = \{j \in \{1,\dots,N\}\colon g_k - \text{вершина } \Omega^{(j)}\},$$

то полученное в результате кусочно-аффинное управление будет непрерывным, допустимым и будет соответствовать пустому множеству $\mathcal{D}$.

Заметим также, что при переходе от п. 3) к п. 2) множества $\mathcal{I}(i,k,\bar{y})$ должны быть найдены заново только для тех симплексов, вершины которых были обработаны на данной итерации в п. 3).

Найденное в соответствии с приведенным алгоритмом кусочно-аффинное управление может быть далее использовано для построения разрывной кусочно-аффинной оценки функции цены.

Теорема 2. *Пусть для каждых* $t \in [t_0,t_1]$, $(i,k) \in \mathcal{K}$

$$\zeta^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t) = \max_s \Big\{(\gamma^{(s)}(t))^T(A^{(s)}g_k + f^{(s)}) + \rho(\gamma^{(s)}(t)\,|\,B^{(s)}\mathcal{Y}^{(s)}_{\sigma(s,k)}(t))$$
$$+ \rho\big(\gamma^{(s)}(t)\,|\,\mathcal{Q}^{(s)}\big)\,\Big|\, s \in \mathcal{J}(i,k)\Big\}, \quad \gamma^{(s)}(t) = (H^{(s)})^T v^{(s)}(t), \tag{6.7}$$

$$\begin{cases} \dot{v}^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t) = -\zeta^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t) + \delta^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t), \quad t \in [t_0,t_1] \\ v^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t_1) = \varphi(g_k) + \max_{j,s}\{K^{(j)}_s\colon g^{(j)}_s = g_k\}. \end{cases} \tag{6.8}$$

Здесь $\delta^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t)$ *— непрерывные функции, для которых выполняется условие: для любых* i^*, i^{**} *таких, что* $g_k \in \Omega^{(i^*)} \cap \Omega^{(i^{**})}$

$$\delta^{(i^*)}_{\sigma(i^*,k)}(t) = \delta^{(i^{**})}_{\sigma(i^{**},k)}(t), \quad \textit{если} \quad i^{**} \in \mathcal{I}(i^*,k,\bar{\mathcal{Y}}(t)) \quad \textit{и} \quad v^{(i^{**})}_{\sigma(i^{**},k)} \geq v^{(i^*)}_{\sigma(i^*,k)}. \tag{6.9}$$

Совокупность многозначных отображений $\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t) \subseteq \mathcal{P}$, $t \in [t_0, t_1]$, *а также множества* $\mathcal{J}(i,k)$, $(i,k) \in \mathcal{K}$, *определены в соответствии с приведенным выше алгоритмом.*

Пусть $V(t,x)$ *— разрывная кусочно-аффинная функция, определенная в* (4.1), *и при заданном* $\mu > 0$ *функция* $\chi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, *определена в формулах* (4.6), (4.7).

Тогда множество

$$\mathcal{W}^{int}_{\mu}(t_0) = \left\{ x \in \Omega \middle| V(t_0, x) \le \mu - \int\limits_{t_0}^{t_1} \chi(\tau) d\tau \right\}$$

(*в предположении его непустоты*) *является внутренней оценкой множества разрешимости*: $\mathcal{W}^{int}_{\mu}(t_0) \subseteq \mathcal{W}_{\mu}(t_0, t_1, \mathcal{X}_1)$.

Доказательство. Сначала докажем, что для любого $t \in [t_0, t_1]$ множества $\tilde{\mathcal{P}}$, определенные в (6.3), не пусты, а следовательно, указанный выше алгоритм корректный. При $t = t_1$ кусочно-аффинная функция $V(t,x)$ является непрерывной, а значит $\mathcal{S}(i,k) = \varnothing$ и $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ $\forall (i,k) \in \mathcal{K}$.

Предположим, что для некоторых i, k в некоторый момент времени $t^* < t_1$ $\tilde{\mathcal{P}} = \varnothing$. Тогда найдется такое значение $\tilde{t} \in [t^*, t_1)$, что

$$v^{(j)}_{\sigma(j,k)}(\tilde{t}) = v^{(i)}_{\sigma(i,k)}(\tilde{t}), \quad \dot{v}^{(j)}_{\sigma(j,k)}(\tilde{t}) < \dot{v}^{(i)}_{\sigma(i,k)}(\tilde{t}) \;\; \forall j = j_1, \ldots, j_r, \tag{6.10}$$

$$v^{(j)}_{\sigma(j,k)}(\tilde{t}) > v^{(i)}_{\sigma(i,k)}(\tilde{t}) \;\; \forall j = j_{r+1}, \ldots, j_m.$$

Здесь $j_1, \ldots, j_m$ — все номера симплексов, содержащих вершину g_k, за исключением i. При этом обязательно $r \ge 1$. Кроме того, момент времени $\tilde{t}$ можно взять такой, что $\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)}(\tilde{t}+0) \ne \varnothing$. Проанализируем теперь множество $\mathcal{I}(i,k,\bar{\mathcal{Y}}(\tilde{t}+0))$. Возможен один из двух описанных ниже случаев.

1. Если $\mathcal{I}(i,k,\bar{\mathcal{Y}}(\tilde{t}+0)) = \{i\}$, то для i-го симплекса существует управление, для которого траектория системы, выпущенная из вершины g_k, будет направлена внутрь этого симплекса (при любой помехе v). В силу стационарности системы это управление будет обладать указанным свойством и при всех $t < \tilde{t}$, а значит, $\tilde{\mathcal{P}} \ne \varnothing$ $\forall t \in [t_0, t_1]$. Получено противоречие.

2. Существует $\tilde{j} \ne i$, $\tilde{j} \in \mathcal{I}(i,k,\bar{\mathcal{Y}}(\tilde{t}+0))$. Тогда в силу ограничения (6.3), выполненного при $t > \tilde{t}$, обязательно $\tilde{j} \in \{j_1, \ldots, j_r\}$. В соответствии с (6.6) $\tilde{j} \in \mathcal{J}(i,k)$ в момент времени $\tilde{t}$. Согласно (6.9) $\delta^{(i)}_{\sigma(i,k)}(\tilde{t}) = \delta^{(\tilde{j})}_{\sigma(\tilde{j},k)}(\tilde{t})$. В формуле (6.7) для симплекса с номером $\tilde{j}$ максимум берется по номерам $\{j, j_1^*, \ldots, j_w^*\} \subseteq \{j_1, \ldots, j_m\}$, причем $j, j_1^*, \ldots, j_w^* \in J(i,k)$ ввиду (6.6). Тогда для симплекса с номером i аналогичный максимум берется по номерам $\{i\} \cup \{j, j_1^*, \ldots, j_w^*\}$, а значит $\zeta^{(i)}_{\sigma(i,k)}(\tilde{t}) \ge \zeta^{(\tilde{j})}_{\sigma(\tilde{j},k)}(\tilde{t})$. Подставляя это неравенство в (6.8), получаем, что $\dot{v}^{(i)}_{\sigma(i,k)}(\tilde{t}) \le \dot{v}^{\tilde{j}}_{\sigma(\tilde{j},k)}(\tilde{t})$; противоречит (6.10).

Рассмотрим кусочно-аффинное по x управление

$$\mathcal{U}^*(t,x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) \mathcal{Y}^{(i)}_k(t), \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Функция $\mathcal{U}^*(t,x)$ непрерывна по x в каждом из симплексов, но может иметь разрывы на их границах. Такое разрывное управление является допустимым, так как выполнено условие (6.2). Из указанного условия следует, что разрыв управления на границе между симплексами $\Omega^{(i^*)}$ и $\Omega^{(i^{**})}$ возможен только в тех случаях, когда траектория системы может попасть из первого симплекса во второй либо обратно, но не туда и обратно одновременно, при различных управлениях.

Из условия (6.3) вытекает, что описанный выше алгоритм определяет управление $\mathcal{U}^*(t,x)$, для которого для любой вершины g_k, любого $t\in[t_0,t_1]$, для любых двух номеров симплексов i, j таких, что $g_k\in\Omega^{(i)}\cap\Omega^{(j)}$, если $j\in\mathcal{I}(i,k,\bar{\mathcal{Y}}(t))$, то $v^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t)\ge v^{(j)}_{\sigma(j,k)}(t)$.

Для произвольного $x_0\in\mathcal{W}^{int}_{\mu}(t_0)$ определим некоторое решение замкнутой системы $x(t)=x(t,t_0,x_0)|_{\mathcal{U}^*(\cdot)}$, $t\in[t_0,t_1]$. Найдутся такие $t_0=\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_{K-1}<\tau_K=t_1$, для которых на каждом из отрезков $[\tau_j,\tau_{j+1}]$, $j=1,\ldots,K-1$, траектория замкнутой системы либо находится в одном из симплексов $\Omega^{(i)}$, либо движется по границе нескольких (одних и тех же) симплексов $\Omega^{(i_1)},\ldots,\Omega^{(i_m)}$. При $t\in(\tau_j,\tau_{j+1})$ оценим производную функции цены вдоль траектории системы аналогично (4.9):

$$V'\Big(t,x(t);\big(1,A^{(i(t))}x(t)+B^{(i(t))}u^*(t,x(t))+f^{(i(t))}+R(x(t))\big)^T\Big)$$

$$\le\max_k\big\{\dot v^{(i(t))}_{\sigma(i(t),k)}(t)+\zeta^{(i(t))}_{\sigma(i(t),k)}(t)\colon g_k\text{ – вершина }\Omega^{(i(t))}\big\}\le\max_{k,i}\big\{\delta^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t)\colon g_k\text{ – вершина }\Omega^{(i)}\big\}.$$

При $t=\tau_j$, $j=1,\ldots,K$, функция цены $V(t,x(t))$ может иметь разрыв. Пусть $x(\tau_j)\in\Omega^{(i^*)}\cap\Omega^{(i^{**})}$, причем траектория $x(t)$ в момент τ_j переходит из симплекса $\Omega^{(i^*)}$ в $\Omega^{(i^{**})}$. Следовательно, симплекс $\Omega^{(i^{**})}$ достижим из симплекса $\Omega^{(i^*)}$. Выше было доказано, что $v^{(i^*)}_{\sigma(i^*,k)}(\tau_j)\ge v^{(i^{**})}_{\sigma(i^{**},k)}(\tau_j)$ для любой вершины g_k грани $\mathcal{H}=\Omega^{(i^*)}\cap\Omega^{(i^{**})}$. Поскольку $V(\tau_j-0,x(\tau_j-0))$ и $V(\tau_j+0,x(\tau_j+0))$ являются выпуклыми оболочками соответственно $v^{(i^*)}_{\sigma(i^*,k)}(\tau_j)$ и $v^{(i^{**})}_{\sigma(i^{**},k)}(\tau_j)$ при разных k с одними и теми же коэффициентами, то $V(\tau_j-0,x(\tau_j-0))\ge V(\tau_j+0,x(\tau_j+0))$, т. е. любой разрыв сопровождается лишь уменьшением функции цены.

Дальнейшее доказательство теоремы полностью совпадает с аналогичным доказательством в случае непрерывной кусочно-аффинной функции цены (см. формулы (4.10), (4.11) и полученные из них выводы). □

Как и в случае с непрерывной функцией цены, имеет смысл определить величины $\delta^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t)$ таким образом, чтобы по возможности минимизировать расхождения величин $\gamma^{(i)}(t)$ в соседних симплексах, т. е. аналогично (5.1)–(5.2). При этом необходимо учитывать (6.9). Итоговые формулы выглядят следующим образом (при условии, что $i_1,\ldots,i_m$ — все номера симплексов, содержащих вершину g_k и $i\in\{i_1,\ldots,i_m\}$):

$$\delta^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t)=\varepsilon s^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t)\Delta^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t),$$

$$\Delta^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t)=(\tilde v_k)^TP^{(i)}_{\sigma(i,k)}\tilde v_k,\quad \tilde v_k=(v^{(i_1)}_1,v^{(i_1)}_2,\ldots,v^{(i_m)}_{n_x+1})^T\in\mathbb{R}^{m(n_x+1)},$$

$$P^{(i)}_{\sigma(i,k)}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=j+1}^{m}\Big\{\big((H^{(i_j)})^TS^{(i_j)}_k-(H^{(i_l)})^TS^{(i_l)}_k\big)^T\big((H^{(i_j)})^TS^{(i_j)}_k-(H^{(i_l)})^TS^{(i_l)}_k\big):$$

$$\text{либо } i_j\in\mathcal{J}(i,k),\ \text{либо } i\in\mathcal{J}(i_j,k);\ \text{либо } i_l\in\mathcal{J}(i,k),\ \text{либо } i\in\mathcal{J}(i_l,k)\Big\},$$

$$S^{(i)}_k\tilde v_k=v^{(i)}\quad\forall i=i_1,\ldots,i_m,$$

$$s^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t)=\operatorname{sign}\Big\{2\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_x+1}\Big\{(\mathbf{e}_s)^TP^{(i)}_{\sigma(i,k)}\tilde v_k:g^{(i_j)}_s=g_k,\ \text{либо } i_j\in\mathcal{J}(i,k),\ \text{либо } i\in\mathcal{J}(i_j,k)\Big\}\Big\}.$$

7. Разрывный кусочно-аффинный синтез управлений

Для построения синтеза управлений будем использовать не только разрывную кусочно-аффинную функцию цены $W(t,x)=V(t,x)+\int_t^{t_1}\chi(\tau)d\tau$, но и соответствующую ей вспомогательную функцию $\mathcal{J}(t,i,k)$, $t\in[t_0,t_1]$, $(i,k)\in\mathcal{K}$. Эта функция содержит информацию о вершинах симплекса, которые должны быть “склеены” для того, чтобы можно было получить допустимое управление (множества $J(i,k)$ из приведенного выше алгоритма, но с дополнительной зависимостью от времени). Заметим, что большую часть информации, содержащейся в функции $\mathcal{J}(t,i,k)$, можно получить за счет анализа значений функции цены $V(t,x)$ в соседних симплексах. Знание функции $\mathcal{J}(t,i,k)$ позволяет максимально упростить процедуру построения позиционного управления.

Итоговое позиционное управление может быть найдено в соответствии со следующими формулами:

$$\mathcal{U}(t,x) = \sum_{s=1}^{n_x+1} \alpha_s(x)\mathcal{Y}_s^{(i)}(t), \quad x \in \Omega^{(i)}, \tag{7.1}$$

$$\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)}(t) = \operatorname{Argmin}\bigl\{\zeta(t,k,i,u)\colon u \in \tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}(i,k)\bigr\}, \quad \gamma^{(j)} = (H^{(j)})^T v^{(j)}(t) = \frac{\partial W(t,x)}{\partial x},$$

$$\zeta(t,k,i,u) = \max_j\Bigl\{(\gamma^{(j)})^T(A^{(j)}g_k + f^{(j)}) + \rho\bigl(\gamma^{(j)}|\mathcal{Q}^{(j)}\bigr) + \bigl\langle (B^{(j)})^T\gamma^{(j)}, u\bigr\rangle \big| j \in \mathcal{J}(t,i,k)\Bigr\},$$

где множества $\tilde{\mathcal{P}}(i,k)$ определены исходя из (6.3). Согласно приведенному выше доказательству теоремы 2, функция $W(t,x)$ не возрастает вдоль траектории $x(t,t_0,x_0)|_{\mathcal{U}(\cdot)}$ системы (1.1), замкнутой управлением (7.1). Следовательно, если для начальной позиции (t_0,x_0), $x_0 \in \Omega$, выполнено условие $W(t_0,x_0) \le \mu$, то $\varphi(x(t_1,t_0,x_0)|_{\mathcal{U}(\cdot)}) \le \mu$.

8. Пример

Рассмотрим трехмерную систему дифференциальных уравнений, задающую движение материальной точки с постоянной скоростью v на плоскости:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v\cos(x_3), \\ \dot{x}_2 = v\sin(x_3), \\ \dot{x}_3 = u, \end{cases}$$

где управляющий параметр u определяет изменение направления движения.

Требуется перевести систему из точки $(-0.6,-0.4,0)$ в начальный момент времени $t_0 = 0$ в окрестность цилиндрического множества $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1-0.2)^2 + (x_2-0.2)^2 < \varepsilon\}$ в конечный момент времени $t_1 = 1$. Ниже приведены результаты численного моделирования при $v = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $u \in [-3,3]$ для двух представленных методов. Пунктирная линия обозначает границу множества, куда априорно гарантируется попадание траектории при замыкании

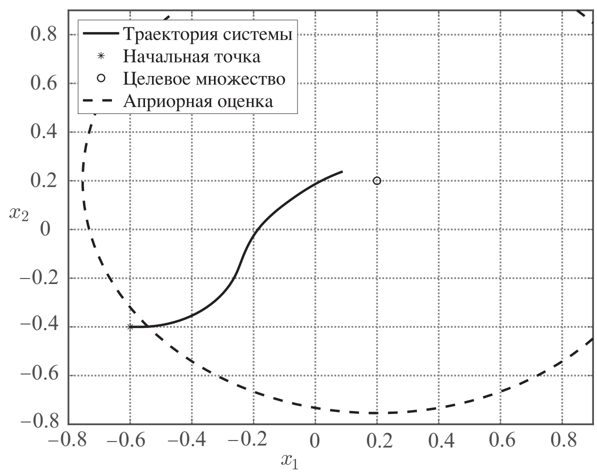

Рис. 1. Случай непрерывной функции цены.

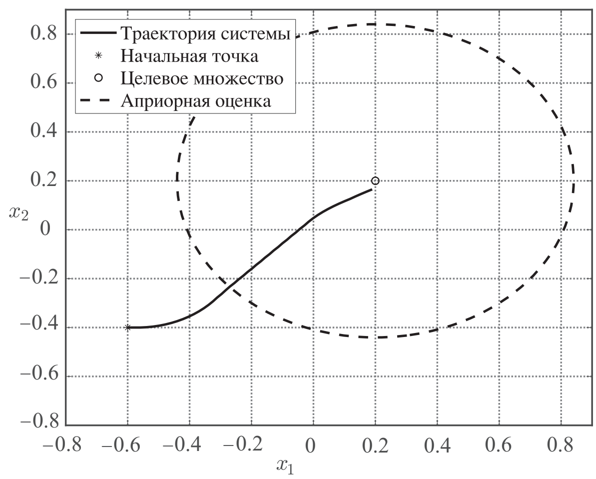

Рис. 2. Случай разрывной функции цены.

управлением (4.8) или (7.1). Соответствующие расстояния от концов реализовавшихся траекторий нелинейной системы до целевого множества равны 0.118 и 0.036. Это позволяет оценить разницу между двумя рассмотренными подходами приближенного решения задачи синтеза управлений для конкретного примера.

В данной работе приведены и обоснованы основные формулы, позволяющие получать разрывные кусочно-аффинные функции цены и управления для решения задачи целевого управления нелинейной системой дифференциальных уравнений. Результаты численного моделирования говорят о том, что предложенный подход позволяет сделать оценку функции цены более точной по сравнению со случаем, когда используются непрерывные кусочно-аффинные функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б.** Принцип сравнения для уравнения типа Гамильтона-Якоби в теории управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, no. 1. С. 173–183.
2. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. (SCFA; vol. 85). doi: 10.1007/978-3-319-10277-1 .
3. **Habets L.C.G.J.M., Collins P.J., van Schuppen J.H.** Reachability and control synthesis for piecewise-affine hybrid systems on simplices // IEEE Trans. Automatic Control. 2006. Vol. 51, no. 6. P. 938–948. doi: 10.1109/TAC.2006.876952 .
4. **Girard A., Martin S.** Synthesis of constrained nonlinear systems using hybridization and robust controllers on simplices // IEEE Trans. Automatic Control. 2012. Vol. 57, no. 4. P. 1046–1051. doi: 10.1109/TAC.2011.2168874 .
5. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** The Hamilton–Jacobi equations for nonlinear target control and their approximation // Analysis and Design of Nonlinear Control Systems, Springer. 2007. P. 77–90. doi: 10.1007/978-3-540-74358-3_6 .
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
7. **Fleming W.H., Soner H.M.** Controlled Markov processes and viscosity solutions. N Y: Springer, 2006. 429 p. doi: 10.1007/0-387-31071-1 .
8. **Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.** Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhäuser, 2008. 570 p. (Systems & Control: Foundations & Applications).
9. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
10. **Tochilin P.A.** Piecewise affine feedback control for approximate solution of the target control problem // IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53, iss. 2. P. 6127–6132. doi: 10.1016/j.ifacol.2020.12.1691 .
11. **Чистяков И.А., Точилин П.А.** Применение кусочно-квадратичных функций цены для приближенного решения нелинейной задачи целевого управления // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 11. С. 1545–1554.
12. **Asarin E., Dang T., Girard A.** Hybridization methods for the analysis of nonlinear systems // Acta Informatica. Vol. 43, iss. 7. 2007. P. 451–476. doi: 10.1007/s00236-006-0035-7 .
13. **Li D., Bak S., Bogomolov S.** Reachability analysis of nonlinear systems using hybridization and dynamics scaling // Formal Modeling and Analysis of Timed Systems / eds. N. Bertrand, N. Jansen. N Y: Springer, 2020. (LNCIS; vol. 12288). doi: 10.1007/978-3-030-57628-8_16 .
14. **Точилин П.А.** О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейной системы // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 11. С. 1503–1515.
15. **Точилин П.А.** О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, no. 1. С. 223–238. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-223-238 .

Поступила 30.03.2021
После доработки 22.05.2021
Принята к публикации 21.06.2021

Точилин Павел Александрович
канд. физ.-мат. наук
доцент факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: tochilin@cs.msu.ru

Чистяков Иван Александрович
аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: chistyakov.ivan@yahoo.com

REFERENCES

1. Kurzhanski A.B. Comparison principle for equations of the Hamilton–Jacobi type in control theory. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2006, vol. 253, no. 1, pp. S185–S195. doi: 10.1134/S0081543806050130 .
2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes.* Ser. SCFA, vol. 85, Basel: Birkhäuser, 2014, 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1 .
3. Habets L.C.G.J.M., Collins P.J., van Schuppen J.H. Reachability and control synthesis for piecewise-affine hybrid systems on simplices. *IEEE Trans. Automatic Control*, 2006, vol. 51, no. 6, pp. 938–948. doi: 10.1109/TAC.2006.876952 .
4. Girard A., Martin S. Synthesis of constrained nonlinear systems using hybridization and robust controllers on simplices. *IEEE Trans. Automatic Control*, 2012, vol. 57, no. 4, pp. 1046–1051. doi: 10.1109/TAC.2011.2168874 .
5. Kurzhanski A.B., Varaiya P. The Hamilton–Jacobi equations for nonlinear target control and their approximation. In: *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*, N Y: Springer, 2007, pp. 77–90. doi: 10.1007/978-3-540-74358-3_6 .
6. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective.* Basel: Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 . Translated to Russian under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka: Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii.* Moscow; Izhevsk: Inst. Komp'yuter. Issled. Pub., 2003, 336 p.
7. Fleming W.H., Soner H.M. *Controlled Markov processes and viscosity solutions.* N Y: Springer, 2006, 429 p. doi: 10.1007/0-387-31071-1 .
8. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Ser. Systems & Control: Foundations & Applications, Boston: Birkhäuser, 2008, 570 p. ISBN: 0817647554 .
9. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
10. Tochilin P.A. Piecewise affine feedback control for approximate solution of the target control problem. In: IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53, iss. 2. P. 6127–6132. doi: 10.1016/j.ifacol.2020.12.1691 .
11. Chistyakov I.A., Tochilin P.A. Application of piecewise quadratic value functions to the approximate solution of a nonlinear target control problem. *Differential equations*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1513–1523. doi: 10.1134/S00122661200110129 .
12. Asarin E., Dang T., Girard A. Hybridization methods for the analysis of nonlinear systems. *Acta Informatica*, 2007, vol. 43, no. 7, pp. 451–476. doi: 10.1007/s00236-006-0035-7 .
13. Li D., Bak S., Bogomolov S. Reachability analysis of nonlinear systems using hybridization and dynamics scaling. In: Bertrand N., Jansen N. (eds) *Formal Modeling and Analysis of Timed Systems*, Ser. LNCIS, vol. 12288. Springer, 2020, pp. 265–282 . doi: 10.1007/978-3-030-57628-8_16 .
14. Tochilin P.A. On the construction of nonconvex approximations to reach sets of piecewise linear systems. *Differential equations*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1503–1515. doi: 10.1134/S0012266115110117 .

15. Tochilin P.A. On the construction of a piecewise affine value function in an infinite-horizon optimal control problem. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 223–238 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-223-238 .

Received March 30, 2021
Revised May 22, 2021
Accepted June 21, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00613a) and by the Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (agreement no. 075-15-2019-1621).

Pavel Aleksandrovich Tochilin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, 119991 Russia,
e-mail: tochilin@cs.msu.ru .

Ivan Aleksandrovich Chistyakov, doctoral student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, 119991 Russia,
e-mail: chistyakov.ivan@yahoo.com .

Cite this article as: P. A. Tochilin, I. A. Chistyakov. On the construction of a discontinuous piecewise affine synthesis in a target control problem, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 194–210 .