ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 3 2021

УДК 517.977

# АДАПТИВНАЯ ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНОГО МИНИМАЛЬНО ФАЗОВОГО ОБЪЕКТА С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ ПО ВЫХОДУ И УПРАВЛЕНИЮ

**В. Ф. Соколов**

В статье рассматривается задача оптимальной робастной, в рамках $\ell_1$-теории робастного управления, стабилизации минимально-фазового объекта с дискретным временем в условиях сильной априорной неопределенности. Под минимально-фазовым объектом понимается управляемая система с устойчивыми нулями передаточной функции номинальной модели. Коэффициенты передаточной функции предполагаются неизвестными и принадлежащими известному ограниченному многограннику в пространстве коэффициентов. Неизвестными предполагаются также верхняя граница внешнего возмущения и коэффициенты усиления неопределенностей (возмущений) по выходу и управлению. Показателем качества служит наихудшее в классе возмущений и неопределенностей асимптотическое значение модуля выхода объекта. Решение задачи адаптивной оптимальной стабилизации с наперед заданной точностью базируется на методе рекуррентных целевых неравенств, выборе показателя качества задачи управления в качестве идентификационного критерия и использовании полиэдральных оценок всех неизвестных параметров. Применение метода рекуррентных целевых неравенств обеспечивает онлайн верификацию текущих оценок неизвестных параметров и априорных предположений.

Ключевые слова: адаптивное управление, оптимальное управление, робастное управление, ограниченное возмущение, неопределенность.

**V. F. Sokolov. Adaptive optimal stabilization of a discrete-time minimum-phase plant under output and input uncertainties.**

This paper addresses a problem of optimal robust, within the framework of the $\ell_1$-theory of robust control, stabilization of a discrete-time minimum-phase plant under large a priori uncertainty. A minimum-phase plant is a control system with stable zeros of the transfer function of the nominal model. The coefficients of the transfer function are assumed to be unknown and belonging to a known bounded polyhedron in the coefficient space. An upper bound of the external disturbance and the amplification factors of the uncertainties (disturbances) in the output and control are also assumed to be unknown. The performance index is the worst asymptotic absolute value of the output in the class of disturbances and uncertainties. The solution of the problem of adaptive optimal stabilization with a prescribed accuracy is based on the method of recurrent objective inequalities, the choice of the performance index of the control problem as the identification criterion, and the use of polyhedral estimates of all unknown parameters. The application of the method of recurrent objective inequalities provides the online verification of current estimates of the unknown parameters and a priori assumptions.

Keywords: adaptive control, optimal control, robust control, bounded disturbance, uncertainty.

**MSC:** 93B30, 93C41, 93C55, 93D21, 93D25

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-180-193

## Введение

В статье рассматривается задача асимптотической оптимальной стабилизации дискретного минимально-фазового объекта с неизвестной рациональной передаточной функцией, внешним ограниченным возмущением с неизвестной верхней границей и с нелинейными нестационарными неопределенностями числителя и знаменателя передаточной функции, называемыми неопределенностью по выходу и управлению соответственно. Показателем качества управления служит наихудшее в классе допустимых возмущений и неопределенностей значение верхнего предела модуля выхода объекта. Для объекта с известной передаточной функцией оптимальный стабилизирующий регулятор известен, и задача адаптивного управления по существу сводится к построению алгоритма оценивания по данным измерений неизвестного вектора коэффициентов полиномов в числителе и знаменателе передаточной функции. Сложность *оптимальной* задачи заключается в том, что при детерминированных возмущениях указанный вектор коэффициентов не идентифицируем. Действительно, даже в более простой ситуации объекта только с внешним возмущением с известной верхней границей множество векторов коэффициентов, согласованных с данными измерений к текущему моменту времени, является ограниченным многогранником в пространстве коэффициентов. С ростом времени эти многогранники не стягиваются в общем случае к "истинному" вектору коэффициентов, поскольку возмущения могут не принимать значения, близкие к их априорной верхней границе, и поэтому невозможно гарантировать необходимую точность идентификации. Исследования в области онлайн вычислений верхних и нижних оценок множеств параметров, согласованных с измерениями, получили в зарубежной литературе название *set-membership approach*. Этому подходу посвящались специальные семинары, конференции и выпуски ведущих журналов по теории управления (например, [1–3]). Однако публикации этого направления до настоящего времени ограничиваются рамками идентификации и не содержат теоретических результатов по использованию предлагаемых алгоритмов в задачах адаптивного управления (см., например, библиографию в [4]). Следует отметить, что множественное оценивание по-видимому впервые использовалось в целях управления в работах екатеринбургской математической школы при решении задач оптимального управления системами с ограниченными возмущениями на конечном промежутке времени [5].

Зародившаяся в начале 1980-х гг. теория робастного управления исходила из положения, что любая модель реального объекта управления является приближенной. Поэтому в обиход теории управления было введено понятие *номинальная модель*, а возможные отличия описания реального объекта (без учета внешнего возмущения) от описания номинальной модели стали называть *неопределенностью* в объекте управления. Допустимые неопределенности описываются в теории робастного управления посредством ограничения на индуцированные нормы или коэффициенты усиления неопределенностей как операторов на рассматриваемом пространстве сигналов. После первоначального периода активной разработки теории робастного управления ведущие мировые эксперты по робастному управлению и идентификации систем сформулировали на представительном семинаре [6] следующие актуальные к середине 1990-х гг. проблемы: 1) как вычислять номинальную модель по данным измерений; 2) как определить доли и верхние границы неопределенности и внешнего возмущения (*errors quantification*)? Трудность этих проблем была связана с тем, что теория робастного управления является детерминированной, а теория идентификации — в основном стохастической. В последующие годы в порожденном этими проблемами новом направлении "идентификация для робастного управления" исследования проводились в основном в рамках доминирующей $H_\infty$-теории робастного управления. Эта теория имеет дело с сигнальным пространством $\ell_2$ (для дискретного времени) и имеет классическую частотную интерпретацию, но "неудобна" для задач адаптивного управления. До настоящего времени в публикациях этого направления задачи оценивания номинальной модели и квантификации неопределенности и внешнего возмущения рассматриваются в стохастической офлайн постановке вне контекста задач управления [7;8] и поэтому не могут быть применены в задачах адаптивного управления, где указанные оценивание и квантификация должны осуществляться в режиме онлайн. О недостаточном продвижении в устранении разрыва между теориями робастного управления и идентификации прямо говорится в статьях обзорного характера об актуальных проблемах современной теории управления. Например, в статье [9, разд. 4.2.1] десяти известных мировых экспертов отмечается, что современные системы управления должны содержать моделирование по данным измерений, которое включает оценку точности и достоверности моделей с учетом цели управления, и что оценка неточности модели (errors quantification) остается в целом открытой проблемой.

Для решения задач идентификации в контексте адаптивного управления более удобной по сравнению с $H_\infty$-теорией является $\ell_1$-теория робастного управления, основы которой были заложены в работах [10; 11]. Эта теория соответствует задачам, в которых цели управления формулируются в терминах допусков или минимизации в установившемся режиме отклонений выходов от желаемого поведения. Сигнальным пространством в $\ell_1$-теории служит пространство $\ell_\infty$ ограниченных вещественных последовательностей, а ограничения на неопределенность представимы в виде линейных неравенств во временнóй области. Благодаря этому новая информация о неизвестных параметрах системы управления может быть представлена в виде линейных неравенств, которые можно использовать как для идентификации, так и для верификации модели. Именно такая информация послужила основой метода рекуррентных целевых неравенств, предложенного В. А. Якубовичем в середине 1960-х для решения задач адаптивного управления с помощью алгоритмов оценивания проекционного типа для систем с ограниченным внешним возмущением с известной верхней границей [12]. Важными достоинствами $\ell_1$-теории оказались получение явной формулы для показателя качества, равного наихудшей в классе возмущений и неопределенностей асимптотической ошибке отслеживания задающего сигнала, в терминах $\ell_1$-норм определенных передаточных функций и определение верифицируемого данными измерений класса неопределенностей с ограниченной памятью, для которого показатель качества не зависит от начальных данных в замкнутой системе управления [13–15]. Указанные достоинства $\ell_1$-теории робастного управления позволили предложить и обосновать общий метод синтеза адаптивного оптимального робастного управления, базирующийся на множественном оценивании неизвестных параметров и ключевой для обеспечения оптимальности управления идее использования показателя качества задачи управления как идентификационного критерия [16; 17]. Платой за теоретически возможную реализацию максимальных возможностей обратной связи является высокая вычислительная сложность метода, требующего минимизации на текущих множественных оценках нелинейного показателя качества. Поскольку показатель качества зависит от $\ell_1$-норм передаточных функций, а само приближенное вычисление этих норм требует применения специальных алгоритмов [18; 19], минимизация показателя качества в режиме онлайн является сложной задачей.

В настоящей работе указанный общий метод применяется к дискретному минимально-фазовому объекту без запаздывания в управлении. Предлагается замена вектора неизвестных параметров, основанная на идее интерпретации неопределенности по выходу как дополнительной неопределенности по входу. Благодаря такой замене показатель качества задачи управления становится функцией только нормы внешнего возмущения и коэффициента усиления модифицированной неопределенности по выходу, т. е. не зависит от $\ell_1$-норм передаточных функций. В результате этого вычисление текущих оптимальных оценок становится задачей дробно-линейного программирования, стандартным образом сводящейся к задаче линейного программирования. Это позволило сформулировать и обосновать решение задачи адаптивного оптимального, с заданной точностью, управления, легко реализуемое на современных компьютерах. Предложенный метод синтеза обоснован при слабом дополнительном предположении о возмущениях и реализует максимальные возможности обратной связи в условиях неидентифицируемости управляемого объекта.

**Обозначения:**
$|\varphi|$ — евклидова норма вектора $\varphi \in \mathbb{R}^n$;
$x_s^t = (x_s, x_{s+1}, \dots, x_t)$; $|x_s^t| = \max_{s\le k\le t} |x_k|$ для вещественной последовательности $x$;
$\ell_\infty$ — пространство вещественных последовательностей с нормой $\|x\| = \sup_t |x_t|$;
$\|G\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k|$ — индуцированная норма устойчивой линейной стационарной системы $G : \ell_\infty \to \ell_\infty$ с передаточной функцией $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k\lambda^k$.

## 1. Постановка задачи

Пусть объект управления с дискретным временем $t$ описывается моделью

$$a(q^{-1})y_{t+1} = b(q^{-1})u_t + v_{t+1}\,, \quad t = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{1.1}$$

где $y_t \in \mathbb{R}$ — выход объекта в момент времени $t$ с начальными значениями $y_{1-n}^0 = (y_{1-n}, \dots, y_0)$, $u_t \in \mathbb{R}$ — управление, $v_t \in \mathbb{R}$ — суммарное возмущение, $q^{-1}$ — оператор сдвига назад ($q^{-1}y_t =$

$y_{t-1}$) на линейном пространстве вещественных последовательностей,

$$a(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_n q^{-n}\,,\ b(q^{-1}) = b_1 + b_2 q^{-1} + \ldots + b_m q^{1-m}\,.$$

Для упрощения обозначений далее полагается $y_k = 0$ при $k < 1 - n$ и $u_k = 0$ при $k < 0$.

Априорная информация об объекте состоит из предположений **П1–П4**.

**П1**. Вектор-столбец коэффициентов полиномов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ принадлежит известному ограниченному многограннику $\Xi$,

$$\xi := (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)^T \in \Xi = \{\ \hat{\xi} \mid P\hat{\xi} \geq p\ \} \subset \mathbb{R}^{n+m}\,, \quad P \in \mathbb{R}^{l \times (n+m)}\,, \quad p \in \mathbb{R}^l\,,$$

$b_1 \neq 0$ для любого $\xi \in \Xi$, корни полинома $b(\lambda)$ лежат вне замкнутого единичного круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ (такие полиномы называются устойчивыми, а соответствующие им объекты — *минимально-фазовыми*).

**П2**. Суммарное возмущение $v$ имеет вид

$$v = \delta^w w + \delta^y \Delta^y + \delta^u \Delta^u\,,$$

где $\delta^w \geq 0$, $\delta^y \geq 0$, $\delta^u \geq 0$, $w \in \ell_\infty$ — неизвестное нормализованное внешнее возмущение,

$$\|w\| = \sup_{t>0} |w_t| \leq 1\,,$$

$\Delta^y$ и $\Delta^u$ — неизвестные нормализованные строго причинные операторы на линейном пространстве вещественных последовательностей $\ell_e = \{(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)\}$, имеющие ограниченную память $\mu$:

$$|(\Delta^y(y))_t| \leq p^y_t = |y^{t-1}_{t-\mu}|, \quad |(\Delta^u(u))_t| \leq p^u_t = |u^{t-1}_{t-\mu}| \tag{1.2}$$

(оператор $\Delta : \ell_e \to \ell_e$ называется строго причинным, если значения $z_t$ последовательности $z = \Delta(x)$ для всех $t$ зависят только от $x^{t-1}_{-\infty}$ [10]).

**П3**. Вектор $\theta = (\xi^T, \delta^w, \delta^y, \delta^u)^T$ параметров объекта (1.1) неизвестен.

В терминах $\ell_1$-теории робастного управления число $\delta^w$ характеризует верхнюю границу неизвестного ограниченного внешнего возмущения, $\Delta^y$ и $\Delta^u$ — *нормализованные неопределенности по выходу и управлению* соответственно, числа $\delta^y$ и $\delta^u$ — коэффициенты усиления соответствующих *неопределенностей* $\delta^y \Delta^y$ и $\delta^u \Delta^u$ в объекте управления.

Память неопределенностей $\mu$ выбирается конструктором исходя из априорной информации об объекте управления и может быть выбрана сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для качества синтезируемого далее адаптивного управления. Предположение об ограниченности памяти неопределенностей гарантирует независимость асимптотического качества замкнутой системы управления от начальных данных и от слишком давних значений неопределенностей и необходимо в задачах синтеза адаптивного управления (см. ниже теорему 1 и замечание 1).

Можно показать, что ограничения на суммарное возмущение $v$ в предположении **П2** эквивалентны ограничению

$$|v_t| \leq \delta_w + \delta^y p^y_t + \delta^u p^u_t \quad \forall\, t\,. \tag{1.3}$$

Задача адаптивной субоптимальной стабилизации заключается в построении обратной связи, минимизирующей с заданной точностью показатель качества $J_\mu(\theta)$:

$$J_\mu(\theta) := \sup_v\ \limsup_{t \to +\infty}\ |y_t|\ \to \min\,,$$

где sup вычисляется по возмущениям $v$, удовлетворяющим ограничениям (1.3).

Для объекта с известным вектором коэффициентов $\xi$ регулятор (обратная связь)

$$b(q^{-1}) u_t = (a(q^{-1}) - 1) y_{t+1} \tag{1.4}$$

гарантирует при всех $t$ равенство $y_{t+1} = v_{t+1}$ и, в силу непредсказуемости суммарного возмущения $v_{t+1}$ в момент $t$ подачи управления $u_t$, является *оптимальным* для показателя качества $J_\mu$. Введем обозначение $G^\xi(\lambda)$ для устойчивой передаточной функции регулятора (1.4):

$$G^\xi(\lambda) = \frac{a(\lambda) - 1}{b(\lambda)} = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^\xi \, \lambda^k\,, \quad \|G^\xi\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k^\xi|\,.$$

О п р е д е л е н и е 1. Замкнутая система (1.1), (1.4) называется *робастно устойчивой* в классе неопределенностей (1.2), если $J_\mu(\theta) < +\infty$.

Робастное качество замкнутой системы (1.1), (1.4) описывается следующей теоремой.

**Теорема 1.** *Для замкнутой системы* (1.1), (1.4) *справедливы утверждения*:
1. *Система робастно устойчива при* $\mu = +\infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$\delta^y + \delta^u \|G^\xi\| < 1\,. \tag{1.5}$$

2. *Для робастно устойчивой системы с нулевыми начальными данными*

$$J(\theta) := J_{+\infty}(\theta) = \frac{\delta^w}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|}\,.$$

3. *Если выполнено условие робастной устойчивости* (1.5)*, то для системы с* $\mu < +\infty$ *и любыми начальными данными*

$$J_\mu(\theta) \nearrow J(\theta) \ (\mu \to +\infty)\,,$$

*где знак* $\nearrow$ *означает монотонную сходимость снизу при* $\mu \to +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема 1 следует из теорем 3 и 8 [15], примененных к замкнутой системе (1.1), (1.4).

Априорную информацию об объекте завершает предположение **П4**.

**П4**. Неизвестный вектор параметров $\theta$ удовлетворяет неравенству

$$\delta^y + \delta^u \|G^\xi\| \le \bar\delta < 1$$

с известным числом $\bar\delta$.

Предположение **П4** о выполнении условия робастной устойчивости (1.5) с некоторым малым “запасом” не является ограничительным. По существу оно заключается в априорном выборе достаточно близкого к единице параметра $\bar\delta$ и исключает из рассмотрения неприемлемые для практических приложений модели объекта управления, для которых показатель качества $J(\theta)$ принимает слишком большие значения.

З а м е ч а н и е 1. Точное значение показателя качества $J_\mu(\theta)$ неизвестно. Поэтому значение $J(\theta) = J_{+\infty}(\theta)$ будет использоваться как показатель качества в рассматриваемой далее задаче адаптивной оптимальной стабилизации. Результаты численного моделирования показывают, что верхняя оценка $J(\theta)$ показателя качества $J_\mu(\theta)$ оказывается достаточно точной (в зависимости от параметров объекта) уже при относительно небольших значениях $\mu$ памяти неопределенностей.

З а д а ч а. Требуется при априорных предположениях **П1–П4** построить обратную связь вида $u_t = U_t(y_{1-n}^t, u_0^{t-1})$, гарантирующую при любых начальных данных и любом возмущении $v$ выполнение с заданной точностью неравенства

$$\limsup_{t \to +\infty} \ |y_t| \le J(\theta)\,. \tag{1.6}$$

Сложность рассматриваемой задачи заключается в требовании оптимальности управления с заданной точностью в условиях *неидентифицируемости* вектора коэффициентов $\xi$, знание которого необходимо для использования оптимального регулятора (1.4).

## 2. Множественное оценивание и идентификационный критерий

Решение поставленной задачи базируется на методе рекуррентных целевых неравенств, множественном оценивании неизвестных параметров и выборе показателя качества $J(\theta)$ в качестве идентификационного критерия.

**Утверждение 1.** *Если для некоторой оценки*

$$\hat\theta = (\hat\xi^T, \hat\delta^w, \hat\delta^y, \hat\delta^u)^T, \quad \hat\xi \in \Xi, \quad \hat\delta^w \ge 0, \quad \hat\delta^y \ge 0, \quad \hat\delta^u \ge 0\,,$$

*неизвестного вектора* $\theta$ *при всех* $t$ *справедливы неравенства*

$$|\hat a(q^{-1})y_{t+1} - \hat b(q^{-1})u_t| \le \hat\delta^w + \hat\delta^y p^y_{t+1} + \hat\delta^u p^u_{t+1}, \tag{2.1}$$

*то объект управления* (1.1) *с вектором параметров* $\hat\theta$ *удовлетворяет уравнению* (1.1) *и априорным предположениям* **П1, П2** *при всех* $t$.

Доказательство. Для всех $t > 0$ положим $\hat v_{t+1} = \hat a(q^{-1})y_{t+1} - \hat b(q^{-1})u_t$. Тогда объект управления с вектором параметров $\hat\theta$ и суммарным возмущением $\hat v$ удовлетворяет уравнению (1.1), и возмущение $\hat v$ удовлетворяет неравенствам вида (1.3), соответствующим $\hat\theta$, и, тем самым, предположениям **П1, П2**. □

Метод рекуррентных целевых неравенств заключается в построении по данным измерений оценок $\theta_t$, сходящихся к некоторой предельной оценке $\theta_\infty$, удовлетворяющей *целевым неравенствам* (2.1), априорным ограничениям и условию робастной устойчивости (1.5). Тогда использование в каждый момент $t$ оптимального регулятора вида (1.4), соответствующего текущей оценке $\xi_t$, гарантирует выполнение неравенства (1.6) с заменй $J(\theta)$ на $J(\theta_\infty)$. Однако этого недостаточно для решения поставленной задачи, т.к. значение $J(\theta_\infty)$ может оказаться больше неизвестного оптимального значения $J(\theta)$.

Поясним теперь неидентифицируемость вектора коэффициентов $\xi$ и необходимость использования множественного оценивания для решения поставленной задачи. Полная информация о неизвестном векторе $\theta$ к моменту времени $t$ имеет вид

$$\theta \in \Theta_t = \{\ \hat\theta \in \Theta_0 \ \big|\ |\hat a(q^{-1})y_{k+1} - \hat b(q^{-1})u_k| \le \hat\delta^w + \hat\delta^y p^y_{k+1} + \hat\delta^u p^u_{k+1}\ \forall k < t\ \}\,,$$

где

$$\Theta_0 = \{\ \hat\theta \ \big|\ \hat\xi \in \Xi\,,\ \hat\delta^w \ge 0\,,\ \hat\delta^y \ge 0\,,\ \hat\delta^u \ge 0\,,\ \hat\delta^y + \hat\delta^u \|G^{\hat\xi}\| \le \bar\delta\ \}$$

— априорное множество допустимых параметров. Множества $\Theta_t$ состоят из тех и только тех векторов $\hat\theta$ из априорного множества $\Theta_0$, которые согласованы с уравнением (1.1), априорными предположениями **П1, П2, П4** и измерениями $y_0^t$, $u_0^{t-1}$ на промежутке $[0, t]$. Последовательность $\Theta_t$ убывает по включению ввиду добавления в каждый момент времени новых неравенств.

**Утверждение 2.** *При любом управлении объектом* (1.1) *на любом промежутке времени* $[0, t]$*, для любого вектора* $\hat\xi \in \Xi$ *и любых неотрицательных* $\hat\delta^y, \hat\delta^u$

$$\hat\theta = (\hat\xi^T, \hat\delta^w, \hat\delta^y, \hat\delta^u)^T \in \Theta_t$$

*при всех достаточно больших* $\hat\delta^w$.

Доказательство. Утверждение 2 следует из неограниченного роста правой части неравенств (2.1) при неограниченном возрастании $\hat\delta^w$. □

Утверждение 2 означает *неидентифицируемость* неизвестного вектора коэффициентов $\theta$ при любом управлении объектом. Если некоторая последовательность оценок $\theta_t \in \Theta_t$ сходится к предельному вектору $\theta_\infty$, то, учитывая, что вектор параметров $\theta \in \Theta_t$ неизвестен и для оптимальности адаптивного управления требуется гарантировать неравенство $J(\theta_\infty) \le J(\theta)$, текущие оценки $\theta_t$ необходимо выбирать в виде

$$\theta_t = \operatorname*{argmin}_{\hat\theta \in \Theta_t} J(\hat\theta) = \operatorname*{argmin}_{\hat\theta \in \Theta_t} \frac{\hat\delta^w}{1 - \hat\delta^y - \hat\delta^u \|G^{\hat\xi}\|} \,. \tag{2.2}$$

Однако оптимальная идентификация (2.2) не реализуема в чистом виде. Во-первых, число неравенств в описании множеств $\Theta_t$ может с ростом времени неограниченно возрастать. Эта проблема разрешима посредством замены множеств $\Theta_t$ их оценками и введением мертвой зоны при обновлении этих оценок [16]. Во-вторых, даже приближенная минимизация показателя $J(\hat\theta)$ — сложная вычислительная задача, так как для нормы $\|G^{\hat\xi}\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |\hat g_k^\xi|$ нет аналитического представления и ее можно вычислять только с заданной точностью [18; 19, В.11.3] и, кроме того, в задаче (2.2) присутствует нелинейное и невыпуклое ограничение $\hat\delta^y + \hat\delta^u \|G^{\hat\xi}\| \le \bar\delta$ на вектор $\hat\theta$.

## 3. Замена вектора неизвестных параметров

Для упрощения приближенной минимизации показателя качества $J(\hat\theta)$ мы заменим вектор неизвестных параметров $\theta$ на новый неизвестный вектор параметров

$$\zeta = (\xi, \delta^w, \delta)^T \,, \quad \delta = \delta^y + \delta^u \|G^\xi\| \,. \tag{3.1}$$

В этих обозначениях показатель качества $J(\theta)$ становится дробно-рациональной функцией

$$I(\zeta) := J(\theta) = \frac{\delta^w}{1 - \delta} \,,$$

а нелинейное и невыпуклое условие робастной устойчивости (1.5) принимает вид линейного ограничения $\delta \le \bar\delta$.

Для оценивания вектора $\zeta$ будут задействованы другие целевые неравенства. Уравнение оптимального регулятора (1.4) с передаточной функцией $G^\xi(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^\xi \lambda^k$ можно переписать в виде

$$u_t = G^\xi(q^{-1}) y_t = \sum_{k=0}^{t+n-1} g_k^\xi y_{t-k} = \sum_{k=0}^{\bar\mu} g_k^\xi y_{t-k} + \sum_{k=\bar\mu+1}^{t+n-1} g_k^\xi y_{t-k} \,,$$

где $\bar\mu$ — любое натуральное число (напомним, что $y_{-n+1}^0$ — начальные выходы и $u_k = 0$ при $k < 0$). Тогда

$$|u_t| \le \Big| \sum_{k=0}^{\bar\mu} g_k^\xi y_{t-k} \Big| + \Big| \sum_{k=\bar\mu+1}^{t+n-1} g_k^\xi y_{t-k} \Big| \le \sum_{k=0}^{\bar\mu} |g_k^\xi|\, |y_{t-k}| + \sum_{k=\bar\mu+1}^{t+n-1} |g_k^\xi|\, |y_{t-k}| \,.$$

Учитывая неравенство $\sum_{k=0}^{\bar\mu} |g_k^\xi| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k^\xi| = \|G^\xi\|$ и то, что $\sum_{k=\bar\mu+1}^{+\infty} |g_k^\xi| \to 0$ при $\bar\mu \to +\infty$, мы будем предполагать, что для достаточно большого выбранного числа $\bar\mu > \mu$ в замкнутой системе (1.1), (1.4) с любым вектором коэффициентов $\xi$ и при любом допустимом суммарном возмущении $v$ при всех достаточно больших $t$ справедливы неравенства

$$|u_t| = \Big| \sum_{k=0}^{t+n-1} g_k^\xi y_{t-k} \Big| \le \|G^\xi\| |y_{t+\mu-\bar\mu}^t| \,. \tag{3.2}$$

Это предположение исключает "преднамеренные" суммарные возмущения $v$, максимизирующие модуль $u_t$ (см. замечание 3 в разд. 4). Тогда из (3.2) имеем

$$p_t^u = \max_{t-\mu \le k < t} |u_k| = |u_{t-\mu}^{t-1}| \le \|G^\xi\| |y_{t-\bar\mu}^{t-1}| \,. \tag{3.3}$$

Из уравнения объекта (1.1), ограничения (1.3) и верхней оценки (3.3) для $p_t^u$ следует

$$|a(q^{-1})y_{t+1} - b(q^{-1})u_t| \le \delta^w + \delta^y p_{t+1}^y + \delta^u \|G^\xi\| |y_{t+1-\bar{\mu}}^t| \le \delta^w + (\delta^y + \delta^u \|G^\xi\|)|y_{t+1-\bar{\mu}}^t| \,. \quad (3.4)$$

Положим

$$p_{t+1} = |y_{t+1-\bar{\mu}}^t| \,. \quad (3.5)$$

Неравенство (3.4) в обозначениях (3.1) и (3.5) принимает вид

$$|a(q^{-1})y_{t+1} - b(q^{-1})u_t| \le \delta^w + \delta p_{t+1} \quad \forall\, t \,. \quad (3.6)$$

Теперь из неравенств (3.6) и утверждения 1 следует, что при выполнении неравенств (3.2) выход $y$ объекта (1.1) с вектором параметров $\theta$ можно считать выходом объекта (1.1) с вектором параметров $\tilde{\theta} = (\xi^T, \delta^w, \delta, 0)^T$, т.е. объекта без неопределенности по управлению ($\delta^u = 0$) и с неопределенностью по выходу с коэффициентом усиления $\delta$ и памятью $\bar{\mu}$, при этом

$$J(\tilde{\theta}) = J(\theta) = I(\zeta) \,.$$

Таким образом вместо целевых неравенств (2.1) для оценок $\hat{\theta}$ неизвестного вектора параметров $\theta$ будут использоваться целевые неравенства

$$|\hat{a}(q^{-1})y_{t+1} - \hat{b}(q^{-1})u_t| \le \hat{\delta}^w + \hat{\delta} p_{t+1} \quad \forall\, t \quad (3.7)$$

для оценок $\hat{\zeta} = (\hat{\xi}, \hat{\delta}^w, \hat{\delta})^T$ нового неизвестного вектора параметров $\zeta = (\xi^T, \delta^w, \delta)^T$.

## 4. Адаптивное оптимальное управление

Выберем параметр мертвой зоны $\varepsilon > 0$ и число запоминаемых выходов $\bar{\mu} > \mu$. В конце настоящего раздела приведены замечания 2 и 3 о выборе этих параметров.

В каждый момент времени $t$ вычисляются полиэдральная оценка $Z_t$, составленная из нескольких линейных неравенств и априорных ограничений, и векторная оценка

$$\zeta_t = (\xi_t^T, \delta_t^w, \delta_t)^T$$

неизвестного вектора $\zeta = (\xi, \delta^w, \delta)^T$. Начальные оценки $Z_0$ и $\zeta_0$ имеют вид

$$Z_0 = \{\ \hat{\zeta} = (\hat{\xi}^T, \hat{\delta}^w, \hat{\delta})^T \mid \hat{\xi} \in \Xi,\ \hat{\delta}^w \ge 0,\ 0 \le \hat{\delta} \le \bar{\delta}\ \}, \quad \zeta_0 = (\xi_0^T, 0, 0)^T \,,$$

где $\xi_0$ — любой вектор из априорного многогранника $\Xi$.

*Адаптивный регулятор* вычисляет управление $u_t$ за два шага. Сначала значение $u_t$ вычисляется из уравнения оптимального регулятора

$$b^t(q^{-1})u_t = (a^t(q^{-1}) - 1)y_{t+1} \,, \quad (4.1)$$

соответствующего текущей оценке $\xi_t$ вектора коэффициентов, и затем производится срезка $u_t$ для обеспечения неравенства (3.2):

$$u_t := \operatorname{sign}(u_t)\|G^{\xi_t}\| |y_{t+\mu-\bar{\mu}}^t| \,, \quad \text{если} \quad |u_t| > \|G^{\xi_t}\| |y_{t+\mu-\bar{\mu}}^t| \,. \quad (4.2)$$

Алгоритм обновления оценок $Z_t$ и $\zeta_t$ имеет следующий вид. После измерения выхода $y_{t+1}$ в момент $t+1$ положим

$$\varphi_t := (-y_t, -y_{t-1}, \ldots, -y_{t-n+1}, u_t, \ldots, u_{t-m+1})^T, \quad \eta_{t+1} := \operatorname{sign}(y_{t+1} - \varphi_t^T \xi_t) \,,$$

$$\psi_{t+1} := (\eta_{t+1}\varphi_t^T, 1, p_{t+1})^T \,, \quad \nu_{t+1} := \eta_{t+1} y_{t+1} \,. \quad (4.3)$$

В этих обозначениях неравенство вида (3.7) для текущей оценки $\zeta_t$ эквивалентно неравенству

$$\psi_{t+1}^T \zeta_t \geq \nu_{t+1} \,. \tag{4.4}$$

Положим

$$\zeta_{t+1} := \zeta_t \,, \quad Z_{t+1} := Z_t, \ \text{ если } \ \psi_{t+1}^T \zeta_t \geq \nu_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}| \,. \tag{4.5}$$

В противном случае положим

$$Z_{t+1} := Z_t \cap \Omega_{t+1} \,, \quad \Omega_{t+1} := \{ \ \hat{\zeta} \ | \ \psi_{t+1}^T \hat{\zeta} \geq \nu_{t+1} \ \} \,, \tag{4.6}$$

$$\zeta_{t+1} := \operatorname*{argmin}_{\hat{\zeta} \in Z_{t+1}} \ I(\hat{\zeta}) \,. \tag{4.7}$$

Формулы (4.5)–(4.7) означают, что оценки $Z_t$ и $\zeta_t$ обновляются только в том случае, когда расстояние от вектора $\zeta_t$ до полупространства $\Omega_{t+1}$ больше параметра мертвой зоны $\varepsilon$. При обновлении к описанию $Z_t$ добавляется неравенство (4.4), которое является тем из двух линейных неравенств, составляющих целевое неравенство (3.7), которое не выполнено для $\zeta_t$.

В следующей лемме сформулированы свойства алгоритма оценивания (4.5)–(4.7), необходимые для решения поставленной задачи адаптивной оптимальной стабилизации.

**Лемма 1.** *Пусть $u$ — любая последовательность управлений объектом* (1.1) *с вектором параметров $\theta$, удовлетворяющая неравенствам* (3.2), *и оценки $Z_t$ и $\zeta_t$ в замкнутой системе управления вычисляются алгоритмом оценивания* (4.5)–(4.7). *Тогда оценки $Z_t$ и $\zeta_t$ сходятся к своим предельным значениям $Z_\infty$ и $\zeta_\infty = (\xi_\infty^T, \delta_\infty^w, \delta_\infty)^T$ за конечное время и после их сходимости*

$$|a^\infty(q^{-1}) y_{t+1} - b^\infty(q^{-1}) u_t| \leq \delta_\infty^w + \delta_\infty p_{t+1} + \varepsilon |\psi_{t+1}| \tag{4.8}$$

*и*

$$I(\zeta_\infty) \leq I(\zeta) = J(\theta) \,. \tag{4.9}$$

Доказательство. Покажем, что при изменении оценки $\zeta_t$ расстояние от $\zeta_t$ до полупространства $\Omega_{t+1}$ больше $\varepsilon$. Действительно, $\zeta_t$ изменяется, только если $\psi_{t+1}^T \zeta_t < \nu_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|$. Поскольку $\psi_{t+1}^T \hat{\zeta} \geq \nu_{t+1}$ для любого $\hat{\zeta} \in \Omega_{t+1}$, то

$$\varepsilon |\psi_{t+1}| < |\psi_{t+1}^T (\hat{\zeta} - \zeta_t)| \leq |\psi_{t+1}| |\hat{\zeta} - \zeta_t|$$

и, следовательно, $|\hat{\zeta} - \zeta_t| > \varepsilon$ для любого $\hat{\zeta} \in \Omega_{t+1}$. Таким образом, после добавления к описанию $Z_t$ нового неравенства, описывающего полупространство $\Omega_{t+1}$, полиэдр $Z_{t+1}$ и все последующие не пересекаются с $\varepsilon$-окрестностью точки $\zeta_t \in Z_t$. Из этого следует, что $\varepsilon/2$-окрестности различных оценок $\zeta_t$ не пересекаются между собой. Тогда число изменений оценок $Z_t$ и $\zeta_t$ будет конечным, если оценки $\zeta_t$ лежат в ограниченном множестве. Для доказательства ограниченности оценок $\zeta_t$ заметим, что при выполнении неравенств (3.2) вектор $\zeta$ удовлетворяет целевым неравенствам (3.7), каждое из которых представляет собой пару линейных относительно $\hat{\zeta}$ неравенств. В момент $t+1$ одним из этих линейных неравенств является неравенство из определения полупространства $\Omega_{t+1}$ в (4.6). Поэтому $\zeta \in \Omega_t$ при всех $t$ и, следовательно, $\zeta \in Z_t$ при всех $t$. Из (4.7) теперь следует неравенство $I(\zeta_t) \leq I(\zeta)$ при всех $t$, и все оценки $\zeta_t$ лежат в ограниченном множестве $\{\hat{\zeta} \mid I(\hat{\zeta}) \leq I(\zeta)\}$. Из этого следуют сходимость оценок $\zeta_t$ за конечное время и неравенство (4.9).

Для доказательства (4.8) заметим,что в силу сходимости оценок $\zeta_t$ за конечное время

$$\exists\, t_* \ \forall\, t \geq t_* \quad \zeta_t = \zeta_\infty = (\xi_\infty^T, \delta^w, \delta_\infty) \quad \wedge \quad \psi_{t+1}^T \zeta_\infty \geq \nu_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}| \,. \tag{4.10}$$

Неравенства в (4.10) эквивалентны неравенствам

$$|a_\infty(q^{-1}) y_{t+1} - b_\infty(q^{-1}) u_t| \leq \delta_\infty^w + \delta_\infty p_{t+1} + \varepsilon |\psi_{t+1}| \quad \forall\, t \geq t^* \,.$$

Лемма 1 доказана. □

Основной результат об оптимальности адаптивного управления представлен в теореме 2.

**Теорема 2.** *Пусть объект управления* (1.1) *с неизвестным вектором параметров* $\theta = (\xi^T, \delta^w, \delta^y, \delta^u)^T$ *удовлетворяет априорной информации* **П1–П4** *и управляется адаптивным регулятором* (4.1), (4.2) *с алгоритмом оценивания* (4.5)–(4.7) *и параметром мертвой зоны* $0 < \varepsilon < (1-\bar{\delta})/(2+C_u)$, *где* $C_u = \sup_{\xi\in\Xi} \|G^\xi\|$. *Если число срезок* (4.2) *в замкнутой системе конечно, то оценки* $Z_t$ *и* $\zeta_t$ *сходятся за конечное время и*

$$\limsup_{t\to+\infty} |y_t| \le I(\bar{\zeta}_\infty) < I(\zeta_\infty) + K_{\zeta_\infty}\varepsilon \le J(\theta) + K_{\zeta_\infty}\varepsilon\,,$$

*где* $\zeta_\infty = (\xi_\infty^T, \delta_\infty^w, \delta_\infty)$ — *финальное значение оценок* $\zeta_t$, $\bar{\zeta}_\infty = (\,\xi_\infty^T,\, \delta_\infty^w + \varepsilon,\, \delta_\infty + \varepsilon(2 + \|G^{\xi_\infty}\|))^T$,

$$K_{\zeta_\infty} = \frac{1 + \delta_\infty^w(2 + \|G^{\xi_\infty}\|)}{(1 - \delta_\infty - \varepsilon(2 + \|G^{\xi_\infty}\|))^2}\,. \tag{4.11}$$

Доказательство. В силу леммы 1 оценки $Z_t$ и $\zeta_t$ сходятся за конечное время $t^*$ и при всех $t \ge t^*$ выполнены неравенства (4.8). Тогда, с учетом определения $\psi$ в (4.3), определения $p_{t+1}$ в (3.5) и срезок (4.2), для всех $t \ge t^*$

$$\begin{aligned}|a_\infty(q^{-1})y_{t+1} - b_\infty(q^{-1})u_t| \le \delta_\infty^w + \delta_\infty p_{t+1} + \varepsilon|\psi_{t+1}| \le \delta_\infty^w + \delta_\infty p_{t+1}\\ + \varepsilon(|y_{t-n+1}^t| + |u_{t-m+1}^t| + 1 + p_{t+1}) \le \delta_\infty^w + \varepsilon + [\delta_\infty + \varepsilon(2 + \|G^{\xi_\infty}\|)]p_{t+1}\,.\end{aligned} \tag{4.12}$$

В силу утверждения 1 неравенство (4.12) позволяет рассматривать выход $y$ при $t \ge t^*$ как выход модели (1.1) с вектором параметров

$$\bar{\theta}_\infty = (\,\xi_\infty^T,\, \delta_\infty^w + \varepsilon,\, \delta_\infty + \varepsilon(2 + \|G^{\xi_\infty}\|),\, 0)^T,$$

которому соответствует финальная оценка $\bar{\zeta}_\infty$ алгоритма оценивания (4.5)–(4.7). В силу ограничения $0 < \varepsilon \le (1-\bar{\delta})/(C_u + 2)$ для объекта с вектором параметров $\bar{\theta}_\infty$ выполнено условие робастной стабилизируемости

$$\delta_\infty + \varepsilon(2 + \|G^{\xi_\infty}\|) \le \bar{\delta} + \varepsilon(2 + C_u) < 1\,.$$

При предположении о конечности числа срезок (4.2) этот объект при всех достаточно больших $t$ управляется оптимальным регулятором (4.1), соответствующим его вектору коэффициентов $\xi_\infty$ и, следовательно, по теореме 1

$$\limsup_{t\to+\infty} |y_t| \le I(\bar{\zeta}_\infty) = J(\bar{\theta}_\infty) = \frac{\delta_\infty^w + \varepsilon}{1 - (\delta_\infty + \varepsilon(2 + \|G^{\xi_\infty}\|)}\,.$$

Для оценки разности $I(\bar{\zeta}_\infty) - I(\zeta_\infty)$ воспользуемся неравенством

$$\frac{C_1 + \varepsilon_1}{C_2 - \varepsilon_2} - \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_2\varepsilon_1 + C_1\varepsilon_2}{C_2(C_2 - \varepsilon_2)} < \frac{\varepsilon_1 + C_1\varepsilon_2}{(C_2 - \varepsilon_2)^2}$$

с параметрами $C_1 = \delta_\infty^w\,,\ C_2 = 1 - \delta_\infty \le 1\,,\ \varepsilon_1 = \varepsilon\,,\ \varepsilon_2 = \varepsilon(2 + \|G^{\xi_\infty}\|)\,.$ Тогда

$$I(\bar{\zeta}_\infty) - I(\zeta_\infty) < \frac{1 + \delta_\infty^w(2 + \|G^{\xi_\infty}\|)}{(1 - \delta_\infty - \varepsilon(2 + \|G^{\xi_\infty}\|))^2}\,\varepsilon$$

и, следовательно, $K_{\zeta_\infty}$ имеет вид (4.11).

Теорема доказана. □

Сделаем несколько замечаний, поясняющих и дополняющих результат, сформулированный в теореме 2.

Замечание 2 (о выборе параметра мертвой зоны $\varepsilon$ и точности решения задачи оптимальной стабилизации). Ограничение $\varepsilon < (1-\bar{\delta})/(2+C_u)$ на выбор параметра мертвой зоны $\varepsilon$, предполагающее предварительное вычисление какой-либо верхней границы для

$C_u = \sup_{\xi\in\Xi} \|G^\xi\|$, использовано в формулировке теоремы 2 только для упрощения ее формулировки. Достаточно выбрать любое начальное значение $\varepsilon < (1-\bar{\delta})/2$. А затем для обеспечения не только робастной устойчивости, но и желаемой абсолютной или относительной точности решения поставленной оптимальной задачи (1.6), параметр мертвой зоны $\varepsilon$ можно при необходимости уменьшать. Например, если требуется обеспечить неравенство $\limsup_{t\to+\infty} |y_t| \le \kappa J(\theta)$ с заданным множителем $\kappa > 1$, можно после вычисления оценки $\zeta_t$ заменить $\varepsilon$ на

$$\varepsilon = \frac{(\kappa-1)I(\zeta_t)}{K_{\zeta_t}}, \quad \text{если} \quad I(\zeta_t) + K_{\zeta_t}\varepsilon > \kappa I(\zeta_t)\,.$$

Такая замена гарантирует требуемую относительную точность в силу конечности числа возможных коррекций $\varepsilon$. Заметим, что излишнее уменьшение параметра $\varepsilon$ влечет возможное увеличение числа запоминаемых линейных неравенств в полиэдральных оценках $Z_t$, т. е. к излишнему усложнению вычисления текущих оптимальных оценок (4.7).

З а м е ч а н и е 3 (о предположении конечного числа срезок и выборе числа $\bar{\mu}$ запоминаемых неравенств). Срезки (4.2) в адаптивном регуляторе гарантируют справедливость неравенств (3.2), на которых базируется ключевое неравенство (4.9), необходимое для оптимальности адаптивного управления с заданной точностью. Поскольку в замкнутой оптимальной системе (1.1), (1.4) $y = v$, а неизвестным вектором параметров $\theta$ при адаптивном управлении может оказаться любой вектор из $Z_\infty$ (в том числе вектор $\bar{\theta}_\infty$), предположение о конечности числа срезок эквивалентно предположению о справедливости при всех достаточно больших $t$ неравенств

$$\Big|\sum_{k=0}^{t+n-1} g_k^\xi v_{t-k}\Big| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k^\xi| \max_{t-\bar{\mu}+\mu\le k\le t} |v_k| \tag{4.13}$$

для выбранного достаточно большого значения $\bar{\mu}$ и любого $\theta$ из малой окрестности $\Theta_0$. Предположение (4.13) исключает из числа допустимых суммарные возмущения $v$, слишком близкие к возмущениям, максимизирующим абсолютную величину управления $u_t$ при достаточно больших $t$. При этом множество исключаемых возмущений стремится к пустому при $\bar{\mu} \to +\infty$. Выбор слишком большого значения $\bar{\mu}$ ограничен только необходимостью запоминать $\bar{\mu}$ предыдущих выходов для вычисления их максимального модуля $p_t$. Неравенства (4.13) можно интерпретировать как предположение о некой непреднамеренности или наличии случайности в суммарном возмущении $v$.

З а м е ч а н и е 4 (об оценке качества модели в контексте задачи оптимального управления). Ни в какой момент времени нельзя гарантировать, что текущая оптимальная оценка $\zeta_t$ не будет изменена в будущем. Однако неизменность оценки $\zeta_t$ на достаточно длинном промежутке времени означает выполнение неравенств вида (4.8) для текущей неизменной оценки $\zeta_t$, что в силу теоремы 1 и утверждения 1 влечет справедливость оценки

$$|y_t| \le I(\zeta_t) + K_{\zeta_t}\varepsilon \tag{4.14}$$

при всех достаточно больших $t$ в пределах интервала неизменной оценки $\zeta_t$. Ценность неравенства (4.14) в том, что оно дает как вычислимую текущую гарантируемую оценку качества, согласованную с данными измерений и априорной информацией, так и требуемую точность решения оптимальной задачи. Результаты численного моделирования показывают, что в случае случайных внешних возмущений и неопределенностей установившиеся значения $I(\zeta_t)$ могут быть заметно меньше оптимального значения $I(\zeta) = J(\theta)$ в зависимости от реализаций возмущений и неопределенностей.

З а м е ч а н и е 5 (об онлайн верификации модели). Важное дополнительное достоинство синтезированного адаптивного управления, основанного на методе рекуррентных целевых неравенств, заключается в том, что параллельно с решением поставленной задачи адаптивного оптимального управления неравенства в (4.5) обеспечивают *онлайн верификацию модели* *данными измерений*, чего не делается в других известных методах синтеза адаптивного управления.

З а м е ч а н и е 6 (о сведении задачи оптимального оценивания к задаче линейного программирования). Благодаря замене вектора неизвестных параметров $\theta$ на вектор $\zeta$ нелинейное и невыпуклое условие робастной устойчивости $\hat{\delta}^y + \hat{\delta}^u \|G^{\hat{\xi}}\| \leq \bar{\delta}$ становится линейным ограничением $\hat{\delta} \leq \bar{\delta}$, а показатель качества $I(\hat{\zeta})$ — дробно линейным. Таким образом, задача вычисления оптимальных оценок (4.7) становится задачей дробно-линейного программирования, которая стандартным способом дабавления одной вспомогательной переменной сводится к задаче линейного программирования и легко решается с помощью современного программного обеспечения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Kosut R., Goodwin G., Polis M.** Special issue on system identification for robust control design: Introduction // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. Vol. 37, no. 7. P. 899.
2. **Ljung L. and Vicino A.** Guest editorial; Special issue on system identification // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. Vol. 50, no. 10. P. 1473.
3. **Veres S.M.** Bounding methods for state and parameter estimation // Int. J. Adaptive Control and Signal Processing. 2011. Vol. 25, no. 3. P. 189–190. doi: 10.1002/acs.1232 .
4. **Casini M., Garulli A., Vicino A.** A linear programming approach to online set membership parameter estimation for linear regression models // Int. J. Adaptive Control and Signal Processing. 2017. Vol. 31, no. 3. P. 360–378.
5. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
6. **Smith R.S., Dahleh M.** (eds.) The modeling of uncertainty in control systems. London, U.K.: Springer-Verlag, 1994. 391 p. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 192).
7. **Ljung L., Goodwin G., Agüero J.C.** Model error modeling and stochastic embedding // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, no. 28. P. 75–79. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.12.103 .
8. **Delgado R.A., Goodwin G.C., Carvajal R., Agüero J.C.** A novel approach to model error modelling using the expectation-maximization algorithm // IEEE 51st Conference on Decision and Control (CDC). 2012. P. 7327–7332. doi: 10.1109/CDC.2012.6426633 .
9. **Lamnabhi-Lagarrigue F., Annaswamy A., Engell C., et al.** Systems & Control for the future of humanity, research agenda: Current and future roles, impact and grand challenges // Annual Reviews in Control. 2017. Vol. 43. P. 1–64. doi: 10.1016/j.arcontrol.2017.04.001 .
10. **Khammash M., Pearson J.B.** Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. Vol. AC-36, no. 4. P. 398–412.
11. **Khammash M., Pearson J.B.** Analysis and design for robust performance with structured uncertainty // Systems and Control Letters. 1993. Vol. 20. P. 179–187. doi: 10.1016/0167-6911(93)90059-F .
12. **Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.** Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука. 1981. 448 с.
13. **Khammash M.H.** Robust steady-state tracking // IEEE Trans. Automat. Control. 1995. Vol. 40, no. 11. P. 1872–1880.
14. **Khammash M.H.** Robust performance: Unknown disturbances and known fixed inputs // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. Vol. 42, no. 12. P. 1730–1734. doi: 10.1109/9.650028 .
15. **Соколов В.Ф.** Асимптотическое робастное качество дискретной системы слежения в $\ell_1$-метрике // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 101–112.
16. **Sokolov V.F.** Adaptive $\ell_1$ robust control for SISO system // Systems & Control Letters. 2001. Vol. 42, no. 5. P. 379–393. doi: 10.1016/S0167-6911(00)00110-9 .
17. **Sokolov V.F.** Closed-loop identification for the best asymptotic performance of adaptive robust control // Automatica. 1996. Vol. 32, no. 8. P. 1163–1176. doi: 10.1016/0005-1098(96)00044-1 .

18. **Picasso B., Colaneri P.** Non-minimal factorization approach to the $\ell_\infty$-gain of discrete-time linear systems // Automatica. 2013. Vol. 49, no. 9. P. 2867–2873. doi: 10.1016/j.automatica.2013.06.003 .
19. **Sánchez-Peña R.S., Sznaier M.** Robust systems theory and applications. John Wiley & Sons, Inc. 1998. 486 p.



Поступила 2.04.2021
После доработки 19.05.2021
Принята к публикации 24.05.2021



Соколов Виктор Федорович
д-р физ.-мат. наук, ведущий научн. сотрудник
физико-математический институт Коми НЦ УрО РАН
г. Сыктывкар
e-mail: vfs-t@yandex.ru


**REFERENCES**


1. Kosut R., Goodwin G., Polis M. Special issue on system identification for robust control design: Introduction. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1992, vol. 37, no. 7, pp. 899–899.
2. Ljung L., Vicino A. Guest editorial; special issue on system identification. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2005, vol. 50, no. 10, pp. 1473–1473.
3. Veres S.M. Bounding methods for state and parameter estimation. *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, special iss., 2011, vol. 25, no. 3, pp. 189–190. doi: 10.1002/acs.1232 .
4. Casini M., Garulli A., Vicino A. A linear programming approach to online set membership parameter estimation for linear regression models. *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, 2017, vol. 31, no. 3, pp. 360–378. doi: 10.1002/acs.2701 .
5. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
6. Smith R.S., Dahleh M. (Eds.) *The modeling of uncertainty in control systems*, Ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 192, London, U.K.: Springer-Verlag, 1994, 391 p. ISBN: 0-387-19870-9 .
7. Ljung L., Goodwin G., Agüero J.C. Model error modeling and stochastic embedding. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, vol. 48, no. 28, pp. 75–79. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.12.103 .
8. Delgado R.A., Goodwin G.C., Carvajal R., Agüero J.C. A novel approach to model error modelling using the expectation-maximization algorithm. In: *IEEE 51st Conf. on Decision and Control (CDC)*, 2012, pp. 7327–7332. doi: 10.1109/CDC.2012.6426633 .
9. Lamnabhi-Lagarrigue F., Annaswamy A., Engell C., et al. Systems & Control for the future of humanity, research agenda: Current and future roles, impact and grand challenges. *Annual Reviews in Control*, 2017, vol. 43, pp. 1–64. doi: 10.1016/j.arcontrol.2017.04.001 .
10. Khammash M., Pearson J.B. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1991, vol. 36, no. 4, pp. 398–412. doi: 10.1109/9.75099 .
11. Khammash M., Pearson J.B. Analysis and design for robust performance with structured uncertainty. *Systems & Control Letters*, 1993, vol. 20, no. 3, pp. 179–187. doi: 10.1016/0167-6911(93)90059-F .
12. Fomin V.N., Fradkov A.L., Yakubovich V.A. *Adaptivnoe upravlenie dinamicheskimi sistemami* [Adaptive control of dynamic systems]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 448 p.
13. Khammash M.H. Robust steady-state tracking. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1995, vol. 40, no. 11, pp. 1872–1880. doi: 10.1109/9.471208 .
14. Khammash M.H. Robust performance: unknown disturbances and known fixed inputs. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1997, vol. 42, no. 12, pp. 1730–1734. doi: 10.1109/9.650028 .
15. Sokolov V.F. Asymptotic robust performance of a discrete tracking system in the $\ell_1$-metric. *Autom. Remote Control*, 1999, vol. 60, no. 1, pp. 82–91.
16. Sokolov V.F. Adaptive $\ell_1$ robust control for SISO system. *Systems & Control Letters*, 2001, vol. 42, no. 5, pp. 379–393. doi: 10.1016/S0167-6911(00)00110-9 .
17. Sokolov V.F. Closed-loop identification for the best asymptotic performance of adaptive robust control. *Automatica*, 1996, vol. 32, no. 8, pp. 1163–1176. doi: 10.1016/0005-1098(96)00044-1 .

18. Picasso B., Colaneri P. Non-minimal factorization approach to the $\ell_\infty$-gain of discrete-time linear systems. *Automatica*, 2013, vol. 49, no. 9, pp. 2867–2873. doi: 10.1016/j.automatica.2013.06.003 .
19. Sánchez-Peña R.S., Sznaier M. *Robust systems theory and applications*. John Wiley & Sons, Inc. 1998, 486 p. ISBN: 978-0-471-17627-5 .

Received April 2, 2021
Revised May 19, 2021
Accepted May 24, 2021

*Victor Fedorovich Sokolov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Physics and Mathematics of the Komi Science Center, Syktyvkar, 167982 Russia, e-mail: vfs-t@yandex.ru .

Cite this article as: V. F. Sokolov. Adaptive optimal stabilization of a discrete-time minimum-phase plant under output and input uncertainties, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 180–193 .