ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 3 2021

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ГРУППЫ УБЕГАЮЩИХ ВО ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ[1]

Н. Н. Петров

В конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ рассматривается задача преследования группой преследователей группы убегающих с равными возможностями всех участников, описываемая в заданной временной шкале T системой вида

$$z_i^\Delta = u_i - v,$$

где f^Δ — Δ-производная функции f во временной шкале T. Множество допустимых управлений — шар радиусом "единица" с центром в начале координат. Терминальные множества — начало координат. Дополнительно предполагается, что все убегающие используют одно и то же управление и в процессе игры не покидают пределы выпуклого многогранного множества с непустой внутренностью. Получены достаточные условия разрешимости задачи о поимке хотя бы одного убегающего. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций.

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий, групповое преследование, временная шкала.

N. N. Petrov. On a problem of pursuing a group of evaders in time scales.

A problem of pursuing a group of evaders by a group of pursuers with equal capabilities for all the participants is considered in a finite-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^k$. In a given time scale T, the problem is described by a system

$$z_i^\Delta = u_i - v,$$

where f^Δ is the Δ-derivative of f in the time scale T. The set of admissible controls is a ball of unit radius centered at the origin. The terminal sets are the origin. In addition, it is assumed that all the evaders use the same control and, during the game, stay within a convex polyhedral set with nonempty interior. Sufficient conditions are obtained for the solvability of the problem of capturing at least one evader. The method of resolving functions is used as a basis of this research.

Keywords: differential game, pursuer, evader, group pursuit, time scale.

MSC: 49N79, 49N70, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-163-171

Введение

Одним из направлений развития современной теории дифференциальных игр является разработка методов решения игровых задач преследования-уклонения с участием группы преследователей и группы убегающих [1–4], причем кроме поиска новых методов ведется поиск новых задач, для решения которых можно применить ранее разработанные методы. В частности, в работе [5] рассматривалась задача группового преследования в дискретной постановке.

Б. Олбах и С. Хилгер в своих исследованиях [6; 7] предложили общий подход к изучению дифференциальных и разностных уравнений. Оказывается, что некоторым результатам, полученным отдельно для каждой из этих теорий, можно придать больший характер общности, если допустить возможность задания динамических систем на произвольных замкнутых подмножествах $\mathbb{R}$, названных временными шкалами. Уравнения на временных шкалах позволяют одновременно описать динамику непрерывных и дискретных во времени систем. Временные

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект FEWS -2020-0010 и РФФИ (проект 20-01-00293).

шкалы находят свое применение при моделировании процессов в химии, биотехнологии, экономике, нейронных сетях, общественных науках [8; 9]. Неантагонистическая игра N лиц во временной шкале рассматривалась в работе [10].

В данной статье изучается задача простого преследования группой преследователей группы убегающих в предположении, что движение участников описывается дифференциальными уравнениями в заданной временной шкале, все участники обладают равными возможностями, убегающие используют одно и то же управление и не покидают пределы выпуклого многогранного множества. Получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего. Задача группового преследования во временных шкалах с одним убегающим исследовалась в работе [11]. В [12] рассматривалась задача о поимке жестко скоординированных убегающих в задаче простого преследования с фазовыми ограничениями, а в [13] — в задаче с дробными производными.

1. Вспомогательные определения и факты

В данном разделе будут изложены базовые факты из теории временных шкал. Все приводимые ниже результаты могут быть найдены, например, в статьях [14; 15].

Определение 1. Непустое замкнутое подмножество $T \subset \mathbb{R}^1$, такое что $\sup_{t \in T} t = +\infty$, называется временной шкалой.

Определение 2. Пусть T — временная шкала. Функция $\sigma\colon T \to \mathbb{R}^1$ вида $\sigma(t) = \inf\{s \in T \mid s > t\}$ называется функцией сдвига.

Определение 3. Функция $f\colon T \to \mathbb{R}^1$ называется T-дифференцируемой в точке $t \in T$, если существует число $\gamma \in \mathbb{R}^1$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность W точки t такая, что неравенство $|f(\sigma(t)) - f(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$ справедливо для всех $s \in T \cap W$.

Число γ в этом случае называется Δ-производной функции f точке t. Δ-производная функции f в точке t будет обозначаться через $f^{\Delta}(t) = \gamma$.

Определение 4. Функция $f\colon T \to \mathbb{R}^n$, $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, называется T-дифференцируемой в точке $t \in T$, если все функции $f_1, \ldots, f_n$ являются T-диффренцируемыми в точке t.

Пусть T— временная шкала, $E \subset T$. Обозначим $R(E) = \{t \in E \mid \sigma(t) > t\}$. Тогда множество $R(E)$ не более чем счетно.

Определение 5. Множество $E \subset T$ называется Δ-измеримым, если множество

$$\tilde{E} = E \cup \bigcup_{t \in R(E)} (t, \sigma(t))$$

измеримо по Лебегу.

Определение 5. Функция $f\colon T \to \mathbb{R}^1$ называется Δ-измеримой на Δ-измеримом множестве E, если функция $\tilde{f}$ вида

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in E, \\ f(t_i), & t \in (t_i, \sigma(t_i)), \quad t_i \in R(E), \end{cases}$$

измерима на множестве $\tilde{E}$.

Определение 6. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}^1$, $E \subset T$, называется Δ-интегрируема на Δ-измеримом множестве E, если функция $\tilde{f}$ интегрируема по Лебегу на множестве $\tilde{E}$. Если f является Δ- интегрируемой на множестве E, то определим $\int_E f(s)\Delta s$, полагая

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_{\tilde{E}} f d\mu,$$

где μ — мера Лебега.

2. Постановка задачи

Пусть задана некоторая временная шкала T, $t_0 \in T$.

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$ с законами движения вида

$$x_i^{\Delta} = u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in V, \tag{2.1}$$

$$y_j^{\Delta} = v, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad v \in V. \tag{2.2}$$

Здесь $x_i, y_j, x_i^0, y_j^0, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $V = \{v \in \mathbb{R}^k \colon \|v\| \leqslant 1\}$. Считаем, что $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i \in I, j \in J$. Дополнительно предполагается, что каждый убегающий $E_j, j \in J$, в процессе игры не покидает пределы выпуклого множества Ω с непустой внутренностью вида

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^k \bigm| (p_j, y) \leqslant \mu_j, j = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа, (a, b) — скалярное произведение. Считаем, что $\Omega = \mathbb{R}^k$ при $r = 0$.

Введем новые переменные $z_{ij} = x_i - y_j$. Тогда вместо систем (2.1), (2.2) получим систему

$$z_{ij}^{\Delta} = u_i - v, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0, \quad u_i, v \in V. \tag{2.3}$$

Δ-измеримую функцию $v \colon T \to \mathbb{R}^k$ назовем допустимой, если $v(t) \in V$, $y_j(t) \in \Omega$ для всех $t \in T, j \in J$. Предысторией функции v в момент $t \in T$ будем называть сужение функции v на $[t_0, t) \cap T$. Обозначим через $z^0 = \{z_{ij}^0, i \in I\}$ вектор начальных позиций.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для всех убегающих $E_j, j \in J$, выбирает одно и то же управление $v(t)$.

3. Поимка одного убегающего

Определение 7. Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение U_i^0, ставящее в соответствие начальным позициям z^0, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающих $E_j, j \in J$, Δ-измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в V.

Определение 8. В игре $\Gamma(n, m)$ происходит поимка убегающего, если существуют момент $T_0 > 0$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T_0] \cap T$, существуют момент $\tau \in T$, номера $l \in I, q \in J$, для которых $z_{lq}(\tau) = 0$.

Определение 9 [16]. Векторы $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^k$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ найдутся положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s.$$

Положительный базис $a_1, \ldots, a_s$ называется минимальным, если любая его собственная подсистема положительным базисом не является.

Обозначим через $\mathrm{Int} A$ и $\mathrm{co} A$ соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества A,

$$\lambda(z, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda z \in V - v\}.$$

Теорема 1 [16]. *Векторы $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}^k$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда $0 \in \mathrm{Intco}\{a_1, \ldots, a_l\}$.*

Лемма 1 [11, лемма 3]. *Пусть* $\Omega = \mathbb{R}^k$, $0 \in \operatorname{Intco}\{a_1, \ldots, a_l\}$. *Тогда существует* $\tau_0 \in T$ *такой, что для любой* Δ*-допустимой функции* $v(\cdot)$ *найдется номер* $\beta \in \{1, \ldots, l\}$, *для которого*

$$\int_{t_0}^{\tau_0} \lambda(a_\beta, v(s))\Delta s \geqslant 1.$$

Лемма 2 [11, лемма 2]. *Пусть* $r = 1$, $0 \in \operatorname{Intco}\{a_1, \ldots, a_l, p_1\}$. *Тогда существует* $\tau_0 \in T$, *что для любой* Δ*-допустимой функции* $v(\cdot)$ *найдется номер* $\beta \in \{1, \ldots, l\}$, *для которого*

$$\int_{t_0}^{\tau_0} \lambda(a_\beta, v(s))\Delta s \geqslant 1.$$

Теорема 2. *Пусть* $r = 1$, $n \geqslant k$ *и в наборе векторов* $\{x_i^0 - y_j^0, i \in I, j \in J, p_1\}$ *существует* $k + 1$ *вектор, образующий положительный базис. Тогда в игре* $\Gamma(n, m)$ *происходит поимка хотя бы одного убегающего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим положительный базис, составленный из $k + 1$ вектора. Пусть I_0 — совокупность тех $i \in I$, для которых x_i^0 входит в данный положительный базис.

$$J(i) = \{j \in J \colon x_i^0 - y_j^0 \text{ входит в положительный базис}\}, \quad J_0 = \bigcup_{i \in I_0} J(i).$$

Возможны две ситуации.

I. p_1 входит в положительный базис. Если $|J_0| = 1$, то справедливость теоремы следует из теоремы 2 работы [11]. Пусть $|J_0| \geqslant 2$. Считаем, что $I_0 = \{1, \ldots, q\}$, $J_0 = \{1, \ldots, l\}$. Пусть далее $c_\alpha^\beta = y_\alpha^0 - y_\beta^0$. Тогда $z_{ij}^0 = z_{i1}^0 + c_1^j$ для всех $i \in I$, $j \in J$. Поэтому набор $\{z_{i1}^0, i \in I_0, c_1^\alpha, \alpha \in J_0, \alpha \neq 1, p_1\}$ образует положительный базис. Можно считать, что данный базис является минимальным и содержит $k{+}1$ вектор. Так как $n \geqslant k$, то $q < n$. Поэтому $q{+}\alpha{-}1 \in \{q{+}1, \ldots, n\}$ для всех $\alpha \in J_0$, $\alpha \neq 1$.

По следствию 1.3 [4, с. 18] набор $\{z_{i1}^0, i \in I_0, z_{q+\alpha-11}^0 + \mu c_1^\alpha, \alpha \in J_0, \alpha \neq 1\}$ образует положительный базис при некотором $\mu > 1$. Если $i \in I_0$, то полагаем $w_i^0 = z_{i1}^0$. Для $i = q + \alpha - 1$, $\alpha \in J_0, \alpha \neq 1$ полагаем $w_i^0 = z_{q+\alpha-11}^0 + \mu c_1^\alpha$. Обозначим

$$f_i(t, v(\cdot)) = 1 - \int_{t_0}^{t} \lambda(w_i^0, v(s))\Delta s, \quad I^0 = I_0 \cup \{q + \alpha - 1, \alpha \in J_0, \alpha \neq 1\}.$$

Стратегии преследователей P_i, $i \notin I^0$, задаем произвольно. Управления преследователей P_β, $\beta \in I^0$ задаем следующим образом.

Если в момент $t \in T$ выполнено неравенство $f_\beta(t, v(\cdot)) \geqslant 0$, то полагаем

$$u_\beta(t) = v(t) - \lambda(w_\beta^0, v(t))w_\beta^0.$$

Пусть теперь $\tau_\beta \in T$ — первый момент времени, для которого справедливо равенство $f_\beta(\tau_\beta, v(\cdot)) = 0$. Считаем далее, что $\lambda(w_\beta^0, v(t)) = 0$ для всех $t \in T$, $t > \tau_\beta$. Тогда из системы (2.3) получаем

$$z_{\beta 1}(t) = z_{\beta 1}^0 - \int_{t_0}^{t} \lambda(w_\beta^0, v(s))\Delta s \cdot w_\beta^0.$$

Поэтому если $\beta \in I_0$, то $z_{\beta 1}(\tau_\beta) = 0$. Если $\beta = q + \alpha - 1$, то $z_{\beta 1}(\tau_\beta) = -\mu c_1^\beta$.

Пусть теперь $\tau_\beta \in T$, $\beta \in I^0$, — момент времени, для которого $f_\beta(\tau_\beta, v(\cdot)) < 0$, а для всех $t \in T,\ t < \tau_\beta$ выполняется неравенство $f_\beta(\tau_\beta, v(\cdot)) > 0$. Определим число

$$\tau_\beta^* = \sup\{t \in T \mid f_\beta(t, v(\cdot)) > 0\}.$$

Тогда $(\tau_\beta^*, \tau_\beta) \cap T = \varnothing$. Действительно, если бы существовал момент $\tau \in (\tau_\beta^*, \tau_\beta) \cap T$, то выполнялось бы неравенство $f_\beta(\tau, v(\cdot)) > 0$, что противоречило бы определению числа τ_β^*. Полагаем в этом случае

$$u_\beta(\tau_\beta) = v(\tau_\beta) - \lambda^*(w_\beta^0, v(\tau_\beta)) w_\beta^0,$$

где

$$\lambda^*(w_\beta^0, v(\tau_\beta)) = \frac{f_\beta(\tau_\beta^*, v(\cdot))}{\sigma(\tau_\beta^*) - \tau_\beta^*} = \frac{f_\beta(\tau_\beta^*, v(\cdot))}{\tau_\beta - \tau_\beta^*}.$$

Отметим, что в данном случае $\lambda^*(w_\beta^0, v(\tau_\beta)) \leqslant \lambda(w_\beta^0, v(\tau_\beta))$ и поэтому $v(\tau_\beta) \in V$. Тогда

$$\begin{aligned} z_{\beta 1}(\tau_\beta) &= z_{\beta 1}^0 - \int_{t_0}^{\tau_\beta^*} \lambda(w_\beta^0, v(s)) \Delta s \cdot w_\beta^0 - \int_{\tau_\beta^*}^{\tau_\beta} \lambda^*(w_\beta^0, v(s)) \Delta s \cdot w_\beta^0 \\ &= z_{\beta 1}^0 - w_\beta^0 + w_\beta^0 \left[1 - \int_{t_0}^{\tau_\beta^*} \lambda(w_\beta^0, v(s)) \Delta s - \int_{\tau_\beta^*}^{\tau_\beta} \lambda^*(w_\beta^0, v(s)) \Delta s\right] \\ &= z_{\beta 1}^0 - w_\beta^0 + w_\beta^0 \big[f_\beta(\tau_\beta^*, v(\cdot)) - f_\beta(\tau_\beta^*, v(\cdot))\big] = z_{\beta 1}^0 - w_\beta^0. \end{aligned}$$

Следовательно, если $\beta \in I_0$, то $z_{\beta 1}(\tau_\beta) = 0$. Если $\beta = q + \alpha - 1$ при некотором $\alpha \in J_0$, $\alpha \neq 1$, то $z_{\beta 1}(\tau_\beta) = -\mu c_1^\beta$.

Из леммы 2 следует, что для каждой Δ-допустимой функции $v(\cdot)$ найдутся момент $\tau \in T$ и номер $\gamma \in I^0$, для которых $f_\gamma(\tau, v(\cdot)) \geqslant 1$. Поэтому из доказанного вытекает, что для каждой Δ-допустимой функции $v(\cdot)$ найдутся момент $\tau \in T$ и номер $\gamma \in I^0$, для которых $z_{\gamma 1}(\tau) = 0$, если $\gamma \in I_0$, и $z_{\gamma 1}(\tau) = -\mu c_1^\gamma$, если $\gamma = q + \beta - 1 \in I^0 \setminus I_0$. Если реализовался первый вариант, то это означает, что в игре $\Gamma(n, m)$ происходит поимка убегающего E_1.

Рассмотрим второй вариант. Из определения управлений преследователей $P_i, i \in I_0$, и системы (2.3) выводим, что для всех $i \in I_0$ справедливо равенство

$$z_{i1}(\tau) = z_{i1}^0 f_i(\tau, v(\cdot)). \tag{3.4}$$

Докажем, что справедливо включение

$$0 \in \operatorname{Intco}\{x_i(\tau) - y_j(\tau), i \in I_0, j \in J_0, p_1\}. \tag{3.5}$$

Из (3.4) следует, что $z_{i1}^0 = \dfrac{z_{i1}(\tau)}{f_i(\tau, v(\cdot))}$. Кроме того, для всех $\alpha \in J_0, \alpha \neq 1$ имеем

$$z_{i\alpha}(\tau) = z_{i1}(\tau) + c_1^\alpha = z_{i1}(\tau) + z_{i\alpha}^0 - z_{i1}^0.$$

Поэтому, используя (3.4), для всех $\alpha \in J_0$, $\alpha \neq 1$

$$z_{i\alpha}^0 = z_{i\alpha}(\tau) - z_{i1}(\tau) + z_{i1}^0 = z_{i\alpha}(\tau) + \frac{1 - f_i(\tau, v(\cdot))}{f_i(\tau, v(\cdot))} z_{i1}(\tau).$$

По условию набор $\{z^0_{ij}, i \in I_0, j \in J_0, p_1\}$ образует положительный базис. Поэтому положительный базис образует набор

$$\left\{\frac{z_{i1}(\tau)}{f_i(\tau, v(\cdot))}, z_{i\alpha}(\tau) + \frac{1 - f_i(\tau, v(\cdot))}{f_i(\tau, v(\cdot))} z_{i1}(\tau), i \in I_0, \alpha \in J_0, \alpha \neq 1, p_1\right\}.$$

Так как $f_i(\tau, v(\cdot)) \in (0, 1]$, то положительный базис образует набор $\{z_{ij}(\tau), i \in I_0, j \in J_0, p_1\}$. Отсюда согласно теореме 1 имеет место включение (3.5). Так как $x_i(\tau) - y_1(\tau) = x_i(\tau) - y_\beta(\tau) + y_\beta(\tau) - y_1(\tau)$, то положительный базис образует набор

$$\{x_i(\tau) - y_\beta(\tau), y_\beta(\tau) - y_1(\tau), x_i(\tau) - y_j(\tau), i \in I_0, j \in J_0, j \neq 1, p_1\}. \tag{3.6}$$

Из условия $z_{q+\beta-11}(\tau) = -\mu c^\beta_1$ следует, что

$$x_{q+\beta-1}(\tau) - y_\beta(\tau) = x_{q+\beta-1}(\tau) - y_1(\tau) + y_1(\tau) - y_\beta(\tau) = (\mu - 1)(y_\beta(\tau) - y_1(\tau)).$$

Заменяя в (3.6) вектор $y_\beta(\tau) - y_1(\tau)$ вектором $x_{q+\beta-1}(\tau) - y_\beta(\tau)$, получим, что положительный базис образует набор

$$\{x_i(\tau) - y_j(\tau), i \in I_0 \cup \{q + \beta - 1\}, j \in J_0 \setminus \{1\}, p_1\}. \tag{3.7}$$

Принимая момент τ за начальный, получаем игру, в которой участвуют $m - 1$ убегающих. В данной игре выполнено условие (3.7). Продолжая вышеописанный процесс дальше, получим, что либо на каком-то шаге в игре $\Gamma(n, m)$ произойдет поимка убегающего, либо найдутся момент $\tau_0 \in T$ и номер $\gamma \in J$, для которых будет выполнено условие

$$0 \in \operatorname{Intco}\{x_i(\tau_0) - y_\gamma(\tau_0), i \in I, p_1\}.$$

Теперь поимка следует из теоремы 2 работы [11].

II. p_1 не входит в положительный базис. Дальнейшие рассуждения аналогичны вышеприведенным с использованием леммы 1 и теоремы 3 работы [11].

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из леммы 1 работы [17] следует, что если векторы $b_1, \ldots, b_n$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют $c_1, \ldots, c_n$ такие, что $\|c_l - b_l\| < \varepsilon$, $l = 1, \ldots, n$, и в наборе $c_1, \ldots, c_n$ существует положительный базис, состоящий из $k+1$ вектора.

Теорема 3. *Пусть $\Omega = \mathbb{R}^k$, $n \geqslant k$ и в наборе векторов $\{x^0_i - y^0_j, i \in I, j \in J\}$ существует $k + 1$ вектор, образующий положительный базис. Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2 с использованием леммы 1. □

З а м е ч а н и е 2. Если $T = \mathbb{R}^1$, $m = 1$, то теорема 3 совпадает с условием поимки Пшеничного [18].

Лемма 3. *Пусть $n \geqslant k$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^k$ таковы, что $b_1, \ldots, b_k$ линейно независимы и*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{b_1, \ldots, b_n, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Тогда существуют $p \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^1$ такие, что $\Omega \subset \Omega_1 = \{y \in \mathbb{R}^k \mid (p, y) \leqslant \mu\}$ и $0 \in \operatorname{Intco}\{b_1, \ldots, b_n, p\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость данной леммы следует из п. 3 доказательства теоремы 4.1 [4, с. 37]. □

Теорема 4. *Пусть* $n \geqslant k$,

$$0 \in \operatorname{Intco}\{z_{ij}^0, i \in I, j \in J, p_1, \ldots, p_r\}. \tag{3.8}$$

Тогда в игре $\Gamma(n,m)$ *происходит поимка хотя бы одного убегающего.*

Доказательство. Справедливость данной теоремы следует из теоремы 2 и леммы 3. □

Следствие. *Пусть* $n \geqslant k$, Ω *— многогранник. Тогда в игре* $\Gamma(n,m)$ *происходит поимка хотя бы одного убегающего.*

Доказательство. Действительно, в этом случае условие (3.8) выполнено автоматически. □

Замечание 3. Если $T = \mathbb{R}^1$, $n \geqslant k$, $m = 1$, Ω — многогранник, то следствие совпадает с теоремой Иванова [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Чикрий А.А.** Конфликтно управлямые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
3. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
4. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
5. **Bopardikar S.D., Suri S.** k-Capture in multiagent pursuit evasion, or the lion and the gyenas // Teoretical Computer Science. 2014. Vol. 522. P. 13–23. doi: 10.1016/j.tcs.2013.12.001 .
6. **Aulbach B., Hilger S.** Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale // Nonlinear dynamics and quantum dynamical systems. Contributions to the international seminar ISAM-90, Gaussig (GDR) / eds. G.A. Leonov, V. Reitmann, W. Timmermann. Berlin: Akademie-Verlag, 1990. Vol. 59. P. 9–20.
7. **Hilger S.** Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus// Results in Mathematics. 1990. Vol. 18. P. 18–56. doi: 10.1007/BF03323153 .
8. **Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.** Impulsive differential equations and inclusions. N Y: Hindawi Publ., 2006. 381 p.
9. **Bohner M., Peterson A.** Advances in dynamic equations on time scales. Boston: Birkhauser, 2003. 348 p.
10. **Martins N., Torres D.** Necessary conditions for linear noncooperative N-player delta differential games on time scales // Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization. 2011. Vol. 31, no. 1. P. 23–37. doi: 10.7151/dmdico.1126 .
11. **Петров Н.Н.** Задача простого группового преследования с фазовыми ограничениями во временных шкалах // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, вып. 2. С. 249–258. doi: 10.35634/vm200208/ .
12. **Вагин Д.А., Петров Н.Н.** Простое преследование жестко соединенных убегающих // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.
13. **Мачтакова А. И.** Преследование жестко скоординированных убегающих в линейной задаче с дробными производными и простой матрицей // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2019. Т. 54. С. 45–54. doi: 10.20537/2226-3594-2019-54-04 .
14. **Guseinov G.S.** Integration on time scales // J. Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 285, no. 1. P. 107–127. doi: 10.1016/S0022-247X(03)00361-5.
15. **Cabada A., Vivero D. R.** Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ-antiderivatives // Math. Comp. Modelling. 2006. Vol. 43, no. 1-2. P. 194–207. doi: 10.1016/j.mcm.2005.09.028 .
16. **Петров Н.Н.** Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 606–617.
17. **Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 41–48.

18. **Пшеничный Б.Н.** Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
19. **Иванов Р.П.** Простое преследование-убегание на компакте // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 6. С. 1318–1321.

Поступила 29.03.2021
После доработки 11.05.2021
Принята к публикации 7.06.2021

Петров Николай Никандрович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
главный науч. сотрудник
лаборатории математической теории управления,
директор
Института математики, информационых технологий и физики
Удмуртского университета
г. Ижевск
e-mail: kma3@list.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* NY: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 458 p.
2. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes.* Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, 424 p. doi: 10.1007/978-94-017-1135-7 . Original Russian text published in Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyamye protsessy.* Kiev: Nauk. Dumka, 1992, 384 p.
3. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi processami* [Mathematical methods for control of several dynamic processes]. Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p. ISBN: 5-211-00954-1 .
4. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob'ektov* [Conflict interaction of groups of controlled objects]. Izhevsk: Udmurt. State Univ. Publ., 2009. 266 p. ISBN: 978-5-904524-17-3 .
5. Bopardikar S.D., Suri S. k-Capture in multiagent pursuit evasion, or the lion and the gyenas. *Teoretical Computer Science*, 2014, vol. 522, pp. 13–23. doi: 10.1016/j.tcs.2013.12.001 .
6. Aulbach B., Hilger S. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale. In: *"Nonlinear dynamics and quantum dynamical systems". Contributions to the international seminar ISAM-90, Gaussig (GDR), March 19-23, 1990*, G.A. Leonov, V. Reitmann, W. Timmermann (eds.), Ser. Math. Res., vol. 59. Berlin: Akademie-Verlag, 1990, pp. 9–20. ISBN: 9783055008580 .
7. Hilger S. Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results in Mathematics*, 1990, vol. 18, pp. 18–56. doi: 10.1007/BF03323153 .
8. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. *Impulsive differential equations and inclusions.* N Y: Hindawi Publ., 2006, 381 p. ISBN: 977-5945-50-X .
9. Bohner M., Peterson A. *Advances in dynamic equations on time scales.* Boston: Birkhauser, 2003, 348 p. doi: 10.1007/978-0-8176-8230-9 .
10. Martins N., Torres D. Necessary conditions for linear noncooperative N-player delta differential games on time scales. *Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization*, 2011, vol. 31, no. 1, pp. 23–37. doi: 10.7151/dmdico.1126 .
11. Petrov N. V. The problem of simple group pursuit with phase constraints in time scales. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, no. 2, pp. 249–258 (in Russian). doi: 10.35634/vm200208 .
12. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of the pursuit of a group of rigidly connected evaders. *J. Comp. Systems Sci. International*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 749–753.
13. Machtakova A. I. Persecution of rigidly coordinated evaders in a linear problem with fractional derivatives and a simple matrix. *Izv. IMI Udmurtskogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 45–54 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2019-54-04 .

14. Guseinov G.S. Integration on time scales. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, vol. 285, no. 1, pp. 107–127. doi: 10.1016/S0022-247X(03)00361-5 .
15. Cabada A., Vivero D. R. Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ-antiderivatives. *Math. Comp. Modelling*, 2006, vol. 43, no. 1-2, pp. 194–207. doi: 10.1016/j.mcm.2005.09.028 .
16. Petrov N.N. Controllability of autonomous systems. *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian).
17. Vinogradova M.N., Petrov N.N., Solov'eva N.A. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 41–48 (in Russian).
18. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. *Cybernetics*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 484–485. doi: 10.1007/BF01070036 .
19. Ivanov R.P. Simple pursuit-evasion on a compactum. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1980, vol. 254, no. 6, pp. 1318–1321 (in Russian).

Received March 29, 2021
Revised May 11, 2021
Accepted June 7, 2021

Funding Agency: This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-00232-20-01, project FEWS-2020-0010 and under grant 20-01-00293 from the Russian Foundation for Basic Research.

Nikolai Nikandrovich Petrov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: kma3@list.ru .

Cite this article as: N. N. Petrov. On a problem of pursuing a group of evaders in time scales, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 163–171 .