ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 3 2021

УДК 517.977

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ НЕЧЕТКОМ СПРОСЕ[1]

С. А. Никитина, В. И. Ухоботов

Рассматривается одномерная дискретная динамическая задача управления запасами товара. Предполагается, что в каждый дискретный момент времени информация о запросе на товар поступает в виде нечеткого числа. Оно принадлежит заданной базе нечетких чисел. Поиск управления осуществляется в классе действительных чисел. В каждый момент времени количество наличного товара характеризуется нечетким числом. Цель выбора управления заключается в том, чтобы значение функции принадлежности реализовавшегося в заданный момент времени количества товара, вычисленное на желаемом значении количества товара, было не меньше заданного действительного числа. Построено множество начальных запасов товара, для каждого из которых возможно построить управление, обеспечивающее поставленную цель при любой реализации нечеткого запроса. Если же значение начального запаса товара не принадлежит этому множеству, то существует алгоритм формирования спроса, при котором желаемая цель не достижима.

Ключевые слова: дискретная система, задача управления запасами, нечеткая информация о спросе.

S. A. Nikitina, V. I. Ukhobotov. A scalar problem of stock control under fuzzy demand.

A scalar discrete dynamic problem of stock control is considered. It is assumed that the information about the demand for goods comes at each discrete moment in time in the form of a fuzzy number that belongs to a given base of fuzzy numbers. The control is sought in the class of real numbers. At each time, the amount of available goods is characterized by a fuzzy number. The aim of the control is to guarantee that the value of the membership function of the amount of goods realized at a given time calculated on the desired value of the amount of goods is not less than a given real number. We construct a set of initial stocks of goods such that for each of them it is possible to form a control that fulfills the aim for any realization of a fuzzy query. If the value of the initial stock of goods does not belong to this set, then there is an algorithm for generating a demand under which the aim of the control cannot be achieved.

Keywords: discrete system, stock management problem, fuzzy demand information.

MSC: 93C41, 93C42, 93C55

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-152-162

Введение

Дискретные процессы управления возникают, как правило, при исследовании прикладных задач, когда информацию о состоянии управляемого процесса возможно получать только в дискретные моменты времени. Если возникает вопрос о развитии системы, например во времени, то решение должно быть принято на определенное число шагов вперед. Задача оптимизации становится многошаговой [1; 2]. Для решения таких задач существуют два подхода. Первый основан на принципе оптимальности Р. Беллмана [3], второй смыкается с аппаратом принципа максимума Л. С. Понтрягина [4], он изложен в [1].

Примером дискретного процесса управления является задача оптимального управления запасами при известном спросе [1]. Если о величине спроса известно только множество его значений, то приходим к задаче управления дискретной динамической системой при наличии неопределенности [5]. Для исследования таких задач можно использовать идеи метода гарантированного результата, предложенные для позиционных дифференциальных игр и задач

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740027.

управления с помехами [6; 7]. Этот подход применен в работе [8]. В статье [9] рассматривается дискретная модель запасов с линейной скоростью спроса без регулярного предложения. Вводится критерий для расчета чистой прибыли, исходя из которого строится управление. В [10] изучается задача управления запасами при неизвестном спросе, когда вектограмма управления является многогранником специального вида. Строится управление, которое обеспечивает удержание фазовой точки в заданном многогранном семействе множеств при любом допустимом спросе.

Если информация о спросе носит нечеткий характер, то приходим к нечетким системам управления. Дифференциальные игры с нечетким целевым множеством и нечеткими начальными условиями рассматриваются в [11; 12]. Формализация задачи в этих работах такова, что она сводится к задаче о вычислении цены игры в классе обычных позиционных стратегий с платой, равной функции принадлежности нечеткой цели.

К числу наиболее эффективных подходов к управлению сложными нелинейными системами относится нечеткое логическое управление. В работе [13] описываются широко распространенные модельные системы нечеткого управления.

На совокупности нечетких по Заде [14] множеств линейного вещественного пространства вводятся операции сложения и умножения на число [15]. Это позволяет рассматривать дискретные процессы управления в фазовом пространстве, определяемом нечеткими множествами [16]. Операции сложения нечетких множеств и умножения их на действительное число не удовлетворяют дистрибутивному закону умножения числа на нечеткое множество относительно сложения двух чисел и не существует противоположный элемент. Это вносит специфику в обоснование для таких систем управления идей метода гарантированного результата.

В настоящей работе рассмотривается одномерная дискретная задача управления запасами товара, когда в каждый момент времени информация о запросе поступает в виде нечеткого числа [15]. Поиск управления осуществляется в классе действительных чисел. Количество товара характеризуется нечетким числом. Цель выбора управления заключается в том, чтобы в заданный момент времени значение функции принадлежности [14] этого нечеткого числа на желаемом значении количества товара было не меньше заданного действительного числа. Построено множество начальных запасов товара, откуда возможно осуществить поставленную цель при любой реализации нечеткого запроса.

1. Постановка задачи

В момент времени $t = 0, 1, \dots, p-1$ на складе имеется $x(t)$ количества товара. Максимально возможное количество пополнения его в этот момент времени t равно $a(t) \geq 0$, а максимально возможное количество изъятия его со склада равно $b(t) \geq 0$. Поэтому

$$x(t+1) = x(t) + a(t)u(t) + b(t)v(t). \tag{1.1}$$

Числа $u(t) \in [0; 1]$ и $v(t) \in [-1; 0]$ определяют реальные величины пополнения и изъятия товара в момент времени t.

Пополнение товара происходит за счет его производства и поставки на склад. Данным процессом можно управлять. Поэтому числа $u(t)$ являются управляемыми параметрами.

Величина отгрузки товара со склада определяется его спросом и, следовательно, параметры $v(t)$ зависят от спроса. Считаем, что информация о спросе носит нечеткий характер. Поэтому полагаем, что параметры $v(t)$ спроса являются нечеткими числами.

Согласно Л. Заде [14] нечеткое число ω задается функцией принадлежности $\mu_\omega : \mathbb{R} \to [0; 1]$.

Сложение $\omega_1 \oplus \omega_2$ и умножение $\lambda \times \omega$ нечеткого числа ω на действительное число $\lambda \in \mathbb{R}$ описываются формулами [15, с. 66]

$$\mu_{\omega_1 \oplus \omega_2}(x) = \sup_{y+z=x} \min\left(\mu_{\omega_1}(y); \mu_{\omega_2}(z)\right); \tag{1.2}$$

$$0 \times \omega = \theta, \text{ где } \mu_\theta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0, \text{ и } \mu_\theta(0) = 1,$$
$$\mu_{\lambda \times \omega}(x) = \mu_\omega(\lambda^{-1}\omega) \text{ при } \lambda \neq 0. \tag{1.3}$$

Эти операции обладают следующими свойствами.

I. 1) $\omega_1 \oplus \omega_2 = \omega_2 \oplus \omega_1$;

2) $(\omega_1 \oplus \omega_2) \oplus \omega_3 = \omega_1 \oplus (\omega_2 \oplus \omega_3)$;

3) $\omega \oplus \theta = \omega$.

II. 1) $1 \times \omega = \omega$;

2) $\alpha \times (\beta \times \omega) = (\alpha\beta) \times \omega \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

III. 1) $\alpha \times (\omega_1 \oplus \omega_2) = (\alpha \times \omega_1) \oplus (\alpha \times \omega_2) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Отметим, что равенство

$$(\alpha + \beta) \times \omega = (\alpha \times \omega) \oplus (\beta \times \omega)\,, \tag{1.4}$$

может не выполняться.

Обычное число $y \in \mathbb{R}$ можно рассматривать в виде нечеткого числа ω с функцией принадлежности $\mu_\omega(x) = 1$ при $x = y$ и $\mu_\omega(x) = 0$ при $x \neq y$. В этом случае операции (1.2) и (1.3) переходят в обычные операции сложения и умножения действительных чисел.

Возьмем число $\alpha \in [0; 1]$. *Множеством уровня* ω_α *нечеткого числа* ω называется обычное подмножество действительных чисел, задаваемое формулой

$$\omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu_\omega(x) \geq \alpha\}\,. \tag{1.5}$$

Нечеткое число ω называется *выпуклым*, если для любых чисел $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ выполнено равенство (1.4). Для того чтобы нечеткое число ω было выпуклым, необходимо и достаточно [15, с. 73, теорема 8.7], чтобы его множества уровня $\omega_\alpha \subset \mathbb{R}$ являлись выпуклыми множествами при любых $\alpha \in [0; 1]$.

Для множеств уровня верны следующие формулы [15, с. 66]:

$$(\omega \oplus \hat{\omega})_\alpha = \omega_\alpha + \hat{\omega}_\alpha, \quad (\lambda \times \omega)_\alpha = \lambda \omega_\alpha. \tag{1.6}$$

Здесь для любых множеств A и B из $\mathbb{R}$ и для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ принято обозначение

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} : x = y + z, y \in A, z \in A\}\,, \quad \lambda A = \{x \in \mathbb{R} : x = \lambda y, y \in A\}\,.$$

Из формул (1.6) следует, что совокупность выпуклых нечетких чисел замкнута относительно операций (1.2) и (1.3). Обозначим совокупность выпуклых нечетких чисел буквой Ω. Выпуклым нечетким числом является, например, треугольное нечеткое число ω, функция принадлежности которого имеет вид

$$\mu_\omega(x) = 0 \text{ при } x \notin (\alpha; \delta), \quad \mu_\omega(x) = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ при } x \in [\alpha; \beta], \quad \mu_\omega(x) = \frac{\delta - x}{\delta - \beta} \text{ при } x \in [\beta; \delta].$$

Здесь $\alpha < \beta < \delta$ — заданные числа. Треугольные нечеткие числа часто используются в приложениях теории нечетких множеств.

Применяя операции (1.2) и (1.3) и их свойства, запишем управляемый процесс (1.1) в случае нечеткой информации о спросе следующим образом:

$$\omega(t + 1) = \omega(t) \oplus (a(t) \times \psi) \oplus (b(t) \times \varphi)\,. \tag{1.7}$$

Здесь $\psi \in \Omega$ — нечеткое управление, функция принадлежности которого описывается как

$$\mu_\psi(x) = 1 \text{ при } x = u, \ \mu_\psi(x) = 0 \text{ при } x \neq u, \tag{1.8}$$

где число $u \in [0; 1]$. Множество таких управлений обозначим через Ψ.

Определена база нечетких чисел $\varphi_i, \; i = 1, \ldots, n$, с помощью которых задается информация о нечетком спросе. Функции принадлежности нечетких чисел φ_i удовлетворяют условию $\mu_{\varphi_i}(v) = 0$ при $v \notin [-1; 0]$. Спрос φ в (1.7) может принимать одно из значений $\varphi_i, i = 1, \ldots, n$.

В качестве нечетких чисел φ_i можно взять треугольные числа, у которых $-1 \leq \alpha_i < \beta_i < \delta_i \leq 0$. Лингвистическое описание [15] такого нечеткого числа имеет вид $\varphi_i =$ 'примерно равно β_i, но не менее α_i и не более δ_i'.

Сформулируем цель управления. Фиксировано число $x_* \in \mathbb{R}$. Цель заключается в том, чтобы в заданный момент времени $t = p$ сделать $x(p) = x_*$. В случае нечетких чисел эту цель формализуем следующим образом: фиксируем число $\gamma \in (0; 1)$ и хотим получить в момент времени $t = p$ нечеткое число $\omega(p)$ такое, чтобы $\mu_{\omega(p)}(x_*) \geq \gamma$. Учитывая формулу (1.5), это неравенство запишем в следующем виде:

$$x_* \in F\left(\omega(p)\right). \tag{1.9}$$

Здесь многозначная функция $F : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ задается соотношением $F(\omega) = \omega_\gamma$.

2. Оператор программного поглощения

Зафиксируем число $k = 0, \ldots, p-1$ и для каждой многозначной функции $\Phi : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ положим

$$\left(T_k \Phi\right)(\omega) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \bigcup_{\psi \in \Psi} \Phi\left(\omega \oplus (a(k) \times \psi) \oplus (b(k) \times \varphi_i)\right). \tag{2.1}$$

Смысл отображения T_k, определяемого формулой (2.1), заключается в следующем: точка $x \in \mathbb{R}$ принадлежит множеству (2.1) тогда и только тогда, когда для любого нечеткого числа $\varphi_i, i = 1, \ldots n$, существует управление (1.8) такое, что $x \in \Phi\left(\omega(k+1)\right)$. Нечеткое число $\omega(k+1)$ описывается формулой (1.7) при $\omega(t) = \omega$ и $\varphi = \varphi_i$.

Следуя терминологии, принятой в задачах управления гарантированным результатом [6], назовем отображение (2.1) *оператором программного поглощения.*

С помощью оператора программного поглощения можно определить множество начальных нечетких чисел $\omega(0)$, откуда возможно осуществить включение (1.9) при любой возможной реализации спроса $\varphi_i(k), k = 0, \ldots . p-1, i = 1, \ldots, n$.

Обозначим при $k = 0, \ldots, p-1$

$$\left(E_k F\right)(\omega) = \left(T_k \left(T_{k+1} \left(\ldots T_{p-1} F\right) \ldots\right)\right)(\omega). \tag{2.2}$$

Из формул (2.1) и (2.2) следует, что если $x_* \in \left(E_{p-1} F\right)(\omega(0))$, то для любой реализации спроса $\varphi_{i_k}(k), k = 0, \ldots, p-1, i_k = 1, \ldots, n$ можно построить управление ψ_k (1.8), при котором выполнено включение (1.9).

Если $x_* \notin \left(E_{p-1} F\right)(\omega(0))$, то существует такая реализация спроса $\varphi_{i_k}(k), k = 0, \ldots, p-1, i_k = 1, \ldots, n$, что при любом управлении ψ_k (1.8) включение (1.9) не будет выполнено.

3. Многозначные функции и действия с ними

О п р е д е л е н и е 1. Многозначная функция $\Phi : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ называется выпуклой, если для любых $0 < \lambda < 1, \omega \in \Omega$ и $\widehat{\omega} \in \Omega$ выполнено включение

$$\Phi\left((\lambda \times \omega) \oplus ((1-\lambda) \times \widehat{\omega})\right) \supset \lambda \Phi(\omega) + (1-\lambda)\Phi(\widehat{\omega}). \tag{3.1}$$

П р и м е р 1. Пусть $0 < \gamma < 1$ и $\Phi(\omega) = \omega_\gamma$. Тогда из формул (1.6) следует, что в этом случае условие (3.1) выполнено.

Введем две операции с многозначными функциями [17].

О п р е д е л е н и е 2. Правым произведением числа $\alpha > 0$ на многозначную функцию $\Phi : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ назовем многозначную функцию

$$(\alpha \circ \Phi)(\omega) = \alpha \Phi(\alpha^{-1} \times \omega). \tag{3.2}$$

О п р е д е л е н и е 3. Инфимальной конволюцией двух многозначных функций $\Phi_j \colon \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2$, назовем многозначную функцию

$$(\Phi_1 \Box \Phi_2)(\omega) = \bigcup_{\omega_* \oplus \omega^* = \omega} (\Phi_1(\omega_*) + \Phi_2(\omega^*)). \tag{3.3}$$

Термины, использованные в этих определениях, взяты по аналогии с подобными определениями для однозначных функций в линейных пространствах [18].

Для любых многозначных функций $\Phi \colon \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$, $\Phi_j \colon \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$, $j = 1, 2$, и любых чисел $a > 0$, $b > 0$ операции (3.2) и (3.3) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$1 \circ \Phi = \Phi, \quad b \circ (a \circ \Phi) = (ba) \circ \Phi, \quad \Phi_1 \Box \Phi_2 = \Phi_2 \Box \Phi_1; \tag{3.4}$$

$$(a \circ (\Phi_1 \Box \Phi_2))(\omega) \supset ((a \circ \Phi_1) \Box (a \circ \Phi_2))(\omega) \ \ \forall \omega \in \Omega; \tag{3.5}$$

$$((a \circ \Phi) \Box (b \circ \Phi))(\omega) \supset ((a + b) \circ \Phi)(\omega) \ \ \forall \omega \in \Omega. \tag{3.6}$$

Доказательство формул (3.4)–(3.6) содержится в работе [17, лемма 2].

Лемма 1. *Для любой выпуклой многозначной функции* $\Phi : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ *и для любых чисел* $a > 0$, $b > 0$ *выполнено равенство*

$$((a + b) \circ \Phi)(\omega) = ((a \circ \Phi) \Box (b \circ \Phi))(\omega) \ \ \forall \omega \in \Omega. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (3.6) нужно показать, что множество, стоящее в правой части доказываемого равенства (3.7), содержится в его левой части.

Пусть число $y \in \mathbb{R}$ принадлежит множеству, стоящему в правой части (3.7). Тогда из формул (3.2) и (3.3) следует, что существуют $\omega_* \in \Omega, \omega^* \in \Omega, \omega_* + \omega^* = \omega$ такие, что выполнено включение

$$y \in (a + b)\Big(\frac{a}{a + b}\Phi(a^{-1} \times \omega_*) + \frac{b}{a + b}\Phi(b^{-1} \times \omega^*)\Big).$$

Отсюда, используя включение (3.1), получим

$$y \in (a + b)\Phi\Big(\Big(\frac{1}{a + b} \times \omega_*\Big) \oplus \Big(\frac{1}{a + b} \times \omega^*\Big)\Big) = (a + b)\Phi\Big(\frac{1}{a + b} \times \omega\Big).$$

Следовательно, число $y \in \mathbb{R}$ принадлежит множеству, стоящему в правой части (3.7). $\Box$

Рассмотрим оператор L_σ, который каждому числу $\sigma \geq 0$ и каждой многозначной функции $\Phi : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ ставит в соответствие многозначную функцию $L_\sigma \Phi : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$.

Лемма 2. *Пусть оператор* L_σ *удовлетворяет следующим свойствам*:

$$\big(\Phi_1(\omega) \supset \Phi_2(\omega) \ \forall \omega \in \Omega\big) \Rightarrow \big((L_\sigma \Phi_1)(\omega) \supset (L_\sigma \Phi_2)(\omega) \ \forall \omega \in \Omega\big); \tag{3.8}$$

для любых $\sigma > 0, \Phi \colon \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ *выполнено равенство*

$$(L_\sigma(\sigma \circ \Phi))(\omega) = (\sigma \circ (L_1 \Phi))(\omega) \ \ \forall \omega \in \Omega; \tag{3.9}$$

для любых $\sigma > 0, \Phi_i \colon \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2$, *выполнено включение*

$$(L_\sigma(\Phi_1 \Box \Phi_2))(\omega) \supset ((L_\sigma \Phi_1) \Box \Phi_2)(\omega) \ \ \forall \omega \in \Omega. \tag{3.10}$$

Тогда для любой выпуклой многозначной функции $\Phi \colon \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ *выполнено включение*

$$(L_{\sigma_2}(L_{\sigma_1} \Phi))(\omega) \supset (L_{\sigma_1 + \sigma_2} \Phi)(\omega) \ \ \forall \sigma_i > 0, \ \forall \omega \in \Omega. \tag{3.11}$$

Доказательство. Обозначим $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, F(\omega) = (\sigma^{-1} \circ \Phi)(\omega)$. Тогда, используя равенство (3.7), получим, что $\Phi(\omega) = \left((\sigma_1 \circ F)\Box(\sigma_2 \circ F)\right)(\omega)$. Поэтому

$$(L_{\sigma_1}\Phi)(\omega) = \left(L_{\sigma_1}\left((\sigma_1 \circ F)\Box(\sigma_2 \circ F)\right)\right)(\omega).$$

Отсюда и из (3.10) следует, что

$$(L_{\sigma_1}\Phi)(\omega) \supset \left(L_{\sigma_1}\left((\sigma_1 \circ F)\Box(\sigma_2 \circ F)\right)\right)(\omega).$$

Исходя из этого, используя (3.8), (3.10) и условие коммутативности (3.4), имеем

$$\left(L_{\sigma_2}\left(L_{\sigma_1}\Phi\right)\right)(\omega) \supset \left(L_{\sigma_1}\left(\sigma_1 \circ F\right)\Box L_{\sigma_2}\left(\sigma_2 \circ F\right)\right)(\omega).$$

Отсюда и из формул (3.9), (3.6) вытекает, что

$$\left(L_{\sigma_2}\left(L_{\sigma_1}\Phi\right)\right)(\omega) \supset \left((\sigma_1 \circ L_1 F)\Box(\sigma_2 \circ L_1 F)\right)(\omega) \supset \left((a+b) \circ L_1 F\right)(\omega).$$

Подставим сюда функцию F. Получим включение (3.11). $\Box$

4. Свойства оператора программного поглощения

При каждых $a \geq 0,\ b \geq 0,\ \Phi\colon \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ положим

$$\left(N_{a,b}\Phi\right)(\omega) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \bigcup_{\psi \in \Psi} \Phi\left(\omega \oplus (a \times \psi) \oplus (b \times \varphi_i)\right). \tag{4.1}$$

Из формулы (2.1) выводим $\left(T_k\Phi\right)(\omega) = \left(N_{a(k),b(k)}\Phi\right)(\omega)$.

Приведем некоторые свойства оператора (4.1).

Для любой многозначной функции $\Phi : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ выполнено соотношение

$$\left(N_{0,0}\Phi\right)(\omega) = \Phi(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.2}$$

Равенство (4.2) справедливо ввиду того, что согласно (1.3) $0 \times \omega = \theta$ и $\omega \oplus \theta = \omega$ для $\forall \omega \in \Omega$.

Из (4.1) следует, что

$$\big(\Phi_1(\omega) \supset \Phi_2(\omega)\ \forall \omega \in \Omega\big) \Rightarrow \big((N_{a,b}\Phi_1)(\omega) \supset \left(N_{a,b}\Phi_2\right)(\omega)\ \forall \omega \in \Omega\big). \tag{4.3}$$

Лемма 3. *Для любых $a \geq 0, b \geq 0, \sigma > 0$ и $\Phi : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ выполнено равенство*

$$\left(N_{\sigma a, \sigma b}(\sigma \circ \Phi)\right)(\omega) = \left(\sigma \circ \left(N_{a,b}\Phi\right)\right)(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.4}$$

Доказательство. Множество, стоящее в левой части доказываемого равенства (4.4), обозначим через Q. Тогда из (4.1) получаем

$$Q = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \bigcup_{\psi \in \Psi} \big((\sigma \circ \Phi)\left(\omega \oplus (\sigma a \times \psi) \oplus (\sigma b \times \varphi_i)\right)\big).$$

Отсюда и из формулы (3.2) следует равенство

$$Q = \sigma \bigcap_{1 \leq i \leq n} \bigcup_{\psi \in \Psi} \left(\Phi\left((\sigma^{-1} \times \omega) \oplus (a \times \psi) \oplus (b \times \varphi_i)\right)\right).$$

Поэтому с учетом (4.1)

$$Q = \sigma\left(N_{a,b}\Phi\right)\left(\sigma^{-1} \times \omega\right) = \left(\sigma \circ N_{a,b}\Phi\right)(\omega). \qquad \Box$$

Лемма 4. *Для любых* $a \geq 0,\ b \geq 0$ *и* $\Phi_i \colon \Omega \to 2^{\mathbb{R}},\ i = 1, 2,$ *выполнено включение*

$$(N_{a,b}(\Phi_1 \Box \Phi_2))\,(\omega) \supset ((N_{a,b}\Phi_1) \Box \Phi_2)\,(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть число $y \in \mathbb{R}$ принадлежит множеству, стоящему в правой части доказываемого включения (4.5). Тогда из формулы (3.3) вытекает, что

$$y \in (N_{a,b}\Phi_1)\,(\omega_*) + \Phi_2(\omega^*)$$

при некоторых $\omega_* \in \Omega, \omega^* \in \Omega, \omega_* \oplus \omega^* = \omega$. Отсюда и из формулы (4.1) имеем, что для любого $i = 1, \ldots, n$ существует $\psi_i \in \Psi$ такой, что

$$y \in \Phi_1\,(\omega_* \oplus (a \times \psi_i) \oplus (b \times \varphi_i)) + \Phi_2(\omega^*).$$

Применяя формулу (3.3), получим, что $y \in (\Phi_1 \Box \Phi_2)\,(\omega \oplus (a \times \psi_i) \oplus (b \times \varphi_i))$. Из этого включения и из определения отображения (4.1) следует, что число y принадлежит множеству, стоящему в левой части доказываемого включения (4.5). □

Отметим, что отображение (4.1) можно представить в виде суперпозиции двух отображений

$$(N_{a,b}(\Phi))\,(\omega) = (N_{0,b}(N_{a,0}\Phi))\,(\omega). \tag{4.6}$$

Лемма 5. *Если многозначная функция* $\Phi : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ *выпуклая, то при любом числе* $a \geq 0$ *выпуклой является многозначная функция* $(N_{a,0}\Phi) : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$, где $0 < \lambda < 1, y_i \in (N_{a,0}\Phi)\,(\omega_i)$, $\omega_i \in \Omega, i = 1, 2$. Из (4.1) при $b = 0$ следует, что существуют $\psi_i \in \Psi, i = 1, 2$, при которых $y_i \in \Phi\,(\omega_i \oplus (a \times \psi_i))$. Отсюда, используя включение (3.1), получим

$$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in \Phi\Big(\big(\lambda \times (\omega_1 \oplus (a \times \psi_1))\big) \oplus \big((1-\lambda) \times (\omega_2 \oplus (a \times \psi_2))\big)\Big)$$

$$= \Phi\big((\lambda \times \omega_1) \oplus ((1-\lambda) \times \omega_2) \oplus (a \times \psi)\big), \quad \psi = (\lambda \times \psi_1) \oplus ((1-\lambda) \times \psi_2).$$

Из (1.8) выводим, что $\mu_{\psi_i}(x) = 1$ при $x = u_i$ и $\mu_{\psi_i}(x) = 0$ при $x \neq u_i, i = 1, 2$. Поэтому из (1.2) и (1.3) имеем $\mu_\psi(x) = 1$ при $x = u$ и $\mu_\psi(x) = 0$ при $x \neq u$, где $u = \lambda u_1 + (1-\lambda) u_2 \in [0; 1]$.

Таким образом, $\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in (N_{a,0}\Phi)\,((\lambda \times \omega_1) \oplus ((1-\lambda) \times \omega_2))$. Получили условие выпуклости (3.1). □

Лемма 6. *Если* $a_i \geq 0, b_i \geq 0, i = 1, 2,$ *и* $\Phi : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$, *то*

$$(N_{a_1,b_1}(N_{a_2,b_2}\Phi))\,(\omega) = (N_{a_1+a_2,b_1+b_2}\Phi))\,(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$y \in (N_{a_1,b_1}(N_{a_2,b_2}\Phi))\,(\omega).$$

Зафиксируем $i = 1, \ldots, n$. Тогда из (4.1) следует, что существует $\psi_1 \in \Psi$, при котором

$$y \in (N_{a_2,b_2}\Phi)\,(\omega \oplus (a_1 \times \psi_1) \oplus (b_1 \times \varphi_i)).$$

Отсюда и из (4.1) получим, что существует $\psi_2 \in \Psi$, при котором

$$y \in \Phi\big(\omega \oplus (a_1 \times \psi_1) \oplus (b_1 \times \varphi_i) \oplus (a_2 \times \psi_2) \oplus (b_2 \times \varphi_i)\big).$$

Далее, $(a_1 \times \psi_1) \oplus (a_2 \times \psi_2) = (a_1 + a_2) \times \psi, \psi \in \Psi$. Затем из условия выпуклости нечеткого числа φ_i имеем равенство $(b_1 \times \varphi_i) \oplus (b_2 \times \varphi_i) = (b_1 + b_2) \times \varphi_i$.

Таким образом, для любого $\varphi_i, i = 1, \ldots n$ существует $\psi \in \Psi$ такое, что

$$y \in \Phi\big(\omega \oplus ((a_1 + a_2) \times \psi) \oplus ((b_1 + b_2) \times \varphi_i)\big).$$

Стало быть, включение (4.7) выполнено. □

Лемма 7. *Если многозначная функция* $\Phi\colon \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ *является выпуклой, то для любых чисел* $a \geq 0, b \geq 0, \sigma \geq 0$ *выполнено равенство*

$$(N_{a,b}(N_{\sigma a,\sigma b}\Phi))\,(\omega) = (N_{(1+\sigma)a,(1+\sigma)b}\Phi))(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.8}$$

Доказательство. Обозначим $L_\sigma = N_{\sigma a,\sigma b}$. Тогда из формул (4.3)–(4.5) выводим формулы (3.8)—(3.10). Поэтому, применяя лемму 2, получим включение, в котором множество, стоящее в правой части (4.8), содержится в его левой части. Обратное включение следует из (4.7). $\square$

Лемма 8. *Для любых чисел* $a \geq 0, a^* \geq 0, b \geq 0$ *и для любой многозначной функции* $\Phi : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ *выполнено равенство*

$$(N_{a,b}(N_{a^*,0}\Phi))\,(\omega) = (N_{a+a^*,b}\Phi)\,(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.9}$$

Доказательство. Пусть $y \in (N_{a+a^*,b}\Phi)\,(\omega)$. Тогда для каждого $\varphi_i,\ i = 1,\dots,n$, существует $\psi_i \in \Psi$, при котором $y \in \Phi\,(\omega \oplus ((a + a^*) \times \psi_i) \oplus (b \times \varphi_i))$. Отсюда из

$$\Phi\,(\omega \oplus ((a + a^*) \times \psi_i) \oplus (b \times \varphi_i)) \subset (N_{a^*,0}\Phi)\,(\omega \oplus (a \times \psi_i) \oplus (b \times \varphi_i))\,.$$

следует, что число y принадлежит множеству, стоящему слева в (4.9). Обратное включение вытекает из (4.7). $\square$

Лемма 9. *Если многозначная функция* $\Phi : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ *является выпуклой, то для любых чисел* $a \geq 0, a^* \geq 0, b \geq 0, b^* \geq 0$ *справедливо равенство*

$$(N_{0,b^*}(N_{a,b}\Phi))\,(\omega) = (N_{a,b+b^*}\Phi)\,(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.10}$$

Доказательство. Пусть $b^* = 0$. Тогда из (4.2) следует соотношение (4.10).

Пусть $b^* > 0$. Тогда из (4.6) имеем

$$(N_{0,b^*}(N_{a,b}\Phi))\,(\omega) = (N_{0,b^*}\,(N_{a,\sigma b^*}\Phi_0))\,(\omega). \tag{4.11}$$

Здесь обозначено $\sigma = b/b^* \geq 0, \Phi_0(\omega) = (N_{a,0}\Phi)(\omega)$. Согласно лемме 5 многозначная функция $\Phi_0\colon \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ является выпуклой. Применяя к формуле (4.11) лемму 7, а затем формулу (4.6), получим равенство (4.10).

Теорема. *Пусть числа* $a \geq 0,\ a^* > 0,\ b \geq 0,\ b^* > 0$ *удовлетворяют неравенству*

$$\frac{a}{a^*} \leq \frac{b}{b^*}. \tag{4.12}$$

Тогда для любой выпуклой многозначной функции $\Phi\colon \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ *выполнено равенство*

$$(N_{a,b}(N_{a^*,b^*}\Phi))\,(\omega) = (N_{a+a^*,b+b^*}\Phi)\,(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.13}$$

Доказательство. Если $a = 0$, то равенство (4.13) следует из леммы 9.

Пусть $a > 0$. Тогда из неравенства (4.12) выводим, что существует число $\lambda \in (0;1)$ такое, что

$$\frac{a}{a^*} \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \leq \frac{b}{b^*}.$$

Отсюда получим, что $(1-\lambda)a = \lambda\widehat{a},\ \lambda b^* = (1-\lambda)\widehat{b}$ при некоторых $\widehat{a} \leq a^*, \widehat{b} \leq b^*$. Значит, $\widehat{a} = \sigma a, b^* = \sigma\widehat{b}$ при $\sigma = (1-\lambda)/\lambda > 0$. Применяя формулу (4.6), можем записать

$$(N_{a^*,b^*}\Phi)\,(\omega) = \big(N_{0,\sigma\widehat{b}}(N_{\sigma a+a^*-\widehat{a},0}\Phi)\big)(\omega).$$

В силу равенства (4.9) $\big(N_{\sigma a+a^*-\widehat{a},0}\Phi\big)(\omega) = \big(N_{\sigma a,0}(N_{a^*-\widehat{a},0}\Phi)\big)(\omega)$. Поэтому, применяя формулу (4.6), запишем

$$(N_{a^*,b^*}\Phi)(\omega) = \big(N_{0,\sigma\widehat{b}}(N_{\sigma a,0}\Phi_0)\big)(\omega) = \big(N_{\sigma a,\sigma\widehat{b}}\Phi_0\big)(\omega),$$

где обозначено $\Phi_0(\omega) = \big(N_{a^*-\widehat{a},0}\Phi\big)(\omega)$. Согласно лемме 5, многозначная функция $\Phi_0 : \Omega \to 2^{\mathbb{R}}$ является выпуклой. Соответственно, применяя формулу (4.6) и лемму 7, будем иметь

$$(N_{a,b}(N_{a^*,b^*}\Phi))(\omega) = \big(N_{a,b}(N_{\sigma a,\sigma\widehat{b}}\Phi_0)\big)(\omega)$$

$$= \Big(N_{0,b-\widehat{b}}\big(N_{a,\widehat{b}}(N_{\sigma a,\sigma\widehat{b}}\Phi_0)\big)\Big)(\omega) = \Big(N_{0,b-\widehat{b}}\big(N_{(1+\sigma)a,(1+\sigma)\widehat{b}}\Phi_0\big)\Big)(\omega).$$

Отсюда, используя леммы 8 и 9, а также равенства $(1+\sigma)a + a^* - \widehat{a} = a + a^*$ и $b - \widehat{b} + (1+\sigma)\widehat{b} = b + b^*$, получим соотношение (4.13). □

5. Вычисление множеств $(E_kF)(\omega)$

Обозначим

$$A(k) = \sum_{i=k}^{p-1} a(i), \quad B(k) = \sum_{i=k}^{p-1} b(i). \tag{5.1}$$

Число $A(k)$ является максимально возможной суммарной величиной пополнения товара за время от k до $p-1$, число $B(k)$ — аналогичная величина отгрузки товара.

Утверждение. Пусть выполнены неравенства

$$\frac{A(k-1)}{B(k-1)} \le \frac{A(k)}{B(k)}, \quad k = 0, \ldots, p-1. \tag{5.2}$$

Тогда

$$(E_kF)(\omega) = \big(N_{A(k),B(k)}F\big)(\omega) \ \ \forall\omega \in \Omega. \tag{5.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (5.1) и (5.2) следует, что

$$\frac{a(k-1)}{A(k)} \le \frac{b(k-1)}{B(k)}, \quad k = 0, \ldots, p-1. \tag{5.4}$$

Далее из формул (2.1), (2.2), (4.1) и (5.1) вытекает, что при $k = p-1$ равенство (5.3) выполнено. Пусть оно имеет место при $0 < k < p-1$. Тогда, с учетом (2.1), (2.2) и (4.1) справедливо равенство

$$(E_{k-1}F)(\omega) = N_{a(k-1),b(k-1)}\big(N_{A(k),B(k)}F\big)(\omega).$$

Отсюда, используя неравенство (5.4) и теорему, получим, что формула (5.3) верна и для $k-1$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пропой А. И.** Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 256 с.
2. **Негойцэ К.В.** Применение теории систем к проблемам управления. М.: Мир, 1981. 179 с.
3. **Беллман Р.** Динамическое программирование. М.: Иностранная литература, 1960. 400 с.
4. **Понтрягин Л.Р., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
5. **Шориков А.Ф.** Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. 242 с.
6. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.

8. **Шориков А.Ф.** Алгоритм адаптивного минимаксного управления для процесса преследования-уклонения в дискретных системах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 2. С. 515–535.
9. **Wang Y., Xu L.** Dynamics and Control on a Discrete Multi-Inventory System // J. Control Sci. Eng. 2019. Vol. 2019. Art. ID: 6926342. P. 1–7. doi: 10.1155/2019/6926342.
10. **Никитина С.А., Ухоботов В.И.** Об одной задаче управления запасами при наличии помехи // Челябинский физ.-мат. журнал. 2020. Т. 5, вып. 3. С. 306–315. doi: 10.47475/2500-0101-2020-15305.
11. **Байдосов В.А.** Дифференциальная игра с нечетким целевым множеством и нечеткими начальными позициями // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, вып. 1. С. 60–65.
12. **Байдосов В.А.** О задаче сближения в дифференциальной игре с одним частным видом нечеткого целевого множества // Управление в динамических системах: сб. статей. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. С. 12–17.
13. **Seidi M., Hajiaghamemar M., Segee B.** Fuzzy control systems: LMI-based design // Fuzzy Controllers – Recent Advances in Theory and Applications. 2012. P. 441–464. doi: 10.5772/48529.
14. **Заде Л.А.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.
15. **Ухоботов В.И.** Избранные главы теории нечетких множеств: учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2011. 245 с.
16. **Ухоботов В.И.** Непрерывная игра в пространстве с неполной линейной структурой // Изв. АН. Теория и системы управления. 1997. № 2. С. 107–109.
17. **Ухоботов В.И.** Стабильное свойство оператора программного поглощения в играх с простым движением и с выпуклой целью в пространствах с неполной линейной структурой // Вест. Челяб. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. № 2(8). С. 181–189.
18. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Наука, 1973. 469 с.

Поступила 20.04.2021
После доработки 9.06.2021
Принята к публикации 28.06.2021

Никитина Светлана Анатольевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент
Челябинский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: nikitina@csu.ru

Ухоботов Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
заведующий кафедрой теории управления и оптимизации
Челябинский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: ukh@csu.ru

REFERENCES

1. Propoy A.I. *Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov* [Elements of the theory of optimal discrete processes]. Moscow: Nauka Publ., 1973, 256 p.
2. Negojta K.V. *Management applications of system theory.* Basel: Birkhäuser, 1979, 179 p. doi: 10.1007/978-3-0348-6300-1. Translated to Russian under the title *Primenenie teorii sistem k problemam upravleniya.* Moscow: Mir Publ., 1981, 179 p.
3. Bellman R. *Dynamic Programming.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1957, 365 p. ISBN: 069107951X. Translated to Russian under the title *Dinamicheskoe programmirovanie.* Moscow: Inostrannaya Literatura Publ., 1960, 400 p.
4. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishechenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes.* N Y; London: John Wiley & Sons, 1962, 515 p. doi: 10.1002/zamm.19630431023. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov.* Moscow: Nauka Publ., 1969, 384 p.

5. Shorikov A.F. *Minimaksnoe otsenivanie i upravlenie v diskretnykh dinamicheskikh sistemakh* [Minimax estimation and control in discrete dynamical systems]. Ekaterinburg: Izd-vo Ural'skogo Universiteta, 1997, 242 p. ISBN: 5-7525-0495-3 .
6. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
7. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
8. Shorikov A.F. An algorithm of adaptive minimax control for the pursuit-evasion process in discrete-time dynamical system. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2000, vol. 6, suppl. 2, pp. S173–S190.
9. Wang Y., Xu L. Dynamics and control on a discrete multi-inventory system. *J. Control Sci. Eng.*, 2019, vol. 2019, art. ID: 6926342, 7 p. doi: 10.1155/2019/6926342 .
10. Nikitina S.A., Ukhobotov V.I. On one problem of inventory control in the presence of interference. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2020, vol. 5, no. 3, pp. 306–315 (in Russian). doi: 10.47475/2500-0101-2020-15305 .
11. Baidosov V.A. Differential game with fuzzy target set and fuzzy starting positions. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, vol. 53, no. 1, pp. 60–65 (in Russian).
12. Baidosov V.A. On the problem of convergence in a differential game with one particular type of a fuzzy target set. In: *Upravlenie v dinamicheskikh sistemakh* (Control in dynamic systems). Sverdlovsk: UrO AN SSSR, 1990, pp. 12–17 (in Russian).
13. Seidi M., Hajiaghamemar M., Segee B. Fuzzy control systems: LMI-based design. In: *Fuzzy Controllers – Recent Advances in Theory and Applications.* 2012, pp. 441–464. doi: 10.5772/48529 .
14. Zadeh L.A. *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning.* N Y: Elsevier, 1973. Translated to Russian under the title *Ponyatie lingvisticheskoi peremennoi i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennykh reshenii.* Moscow: Mir Publ., 1976, 165 p.
15. Ukhobotov V.I. *Izbrannye glavy teorii nechetkikh mnozhestv* [Selected chapters of fuzzy set theory]. Chelyabinsk: Chelyabinsk State University Publ., 2011, 245 p. ISBN: 978-5-7271-1080-5 .
16. Ukhobotov V. A continuous game in space with an incomplete linear structure. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 1997, vol. 36, no. 2, pp. 262–264.
17. Ukhobotov V.I. Stable property of the programmed absorption operator in games with simple motion and with a convex target in spaces with incomplete linear structure. *Vestnik Chelyabinsk. Gos. Univ.*, 2003, no. 8, pp. 181–189 (in Russian).
18. Rockafellar R. *Convex Analysis.* Princeton: Princeton University Press, 1970, 451 p. ISBN: 0691015864 . Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz.* Moscow: Mir Publ., 1973, 469 p.

Received April 21, 2021
Revised June 9, 2021
Accepted June 28, 2021

Funding Agency: This work was supported jointly by the Russian Foundation for Basic Research and Chelyabinsk Oblast (project no. 20-41-740027).

Svetlana Anatol'evna Nikitina, Cand. Phys.-Math. Sci., Docent, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: nikitina@csu.ru .

Viktor Ivanovich Ukhobotov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: ukh@csu.ru .

Cite this article as: S. A. Nikitina, V. I. Ukhobotov. A scalar problem of stock control under fuzzy demand, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 152–162 .