ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 3 2021

УДК 517.929

О ВНУТРЕННИХ ОЦЕНКАХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНОЙ ПАМЯТЬЮ[1]

В. П. Максимов

Рассматривается линейная непрерывно-дискретная функционально-дифференциальная система управления с дискретной памятью. Цель управления задается с помощью конечного набора линейных функционалов, для которых предписываются целевые значения. Предполагается, что на фазовые и управляющие переменные наложены ограничения в форме линейных неравенств — как точечных, так и интегральных. Приводится описание основных соотношений и алгоритмов, позволяющих давать внутреннюю (нижнюю по включению) оценку множества целевых значений, достижимых на траекториях рассматриваемой системы с учетом заданных ограничений. Основные построения базируются на систематическом использовании оператора Коши непрерывно-дискретной системы. Дается описание используемых ограничений и предлагается процедура их приведения к универсальной форме. Для построения нижних по включению оценок множества достижимых значений целевых функционалов используются кусочно-постоянные программные управления. Предлагаемые оценки являются результатом решения специальной серии задач линейного программирования. Дается описание программных управлений, реализующих условно экстремальные целевые значения.

Ключевые слова: линейные системы с последействием, гибридные системы, задачи управления, множества достижимости.

V. P. Maksimov. On internal estimates of reachable sets for continuous–discrete systems with discrete memory.

A linear continuous–discrete functional differential system with discrete memory is considered. The aim of the control is given by means of a finite collection of linear functionals with prescribed target values. The state and control variables are constrained by a system of linear pointwise and integral inequalities. A detailed description is given for the main relations and algorithms, which make it possible to derive an internal (lower by inclusion) estimate for the set of all target values attainable on the trajectories of the system under given constraints. The key constructions are based on the systematic use of the Cauchy operator of the continuous–discrete system. Various typical constraints are described and reduced to a unified form. Piecewise constant program controls are used in the construction of lower (by inclusion) estimates for the set of attainable values of objective functionals. The proposed estimates result from the solution of a special series of linear programs. The program controls that realize the conditional extremal target values are described.

Keywords: linear systems with aftereffect, hybrid systems, control problems, reachable sets.

MSC: 34K05, 34K30, 34K35, 93B03, 93C23

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-141-151

Введение

В задачах управления с ограничениями на управляющие и фазовые переменные центральное место занимает вопрос о достижимых целевых значениях, реализуемых на траекториях управляемой системы. Множество таких значений называется множеством достижимости. Различным аспектам исследования множеств достижимости посвящен ряд работ отечественных и зарубежных ученых. Ограничимся здесь упоминанием относительно недавних публикаций, где можно найти более полные ссылки на литературу. Так, асимптотические свойства множеств достижимости изучаются в [1], их статистические характеристики — в [2], общая структура множества достижимости для различных классов ограничений представлена в [3;4], физическая визуализация множеств достижимости с использованием технологии 3D-печати

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00332).

описана в работе [5]. В большинстве работ достижимость понимается по отношению к значениям фазовых переменных в фиксированный конечный момент времени. В некоторых прикладных задачах этого оказывается недостаточно, и в число задаваемых целевых значений включаются значения более общих линейных функционалов от траекторий. Общее определение ℓ-достижимости было введено в [6] для линейных функционально-дифференциальных систем с непрерывным и дискретным временем (гибридных систем). В продолжение исследования (см. [7; 8]) мы предлагаем здесь внутренние оценки для множества ℓ-достижимости в условиях, когда на фазовые и управляющие переменные наложены ограничения в форме линейных неравенств — как точечных, так и интегральных.

Основные построения базируются на систематическом использовании оператора Коши непрерывно-дискретной системы [9; 10] и конструкциях теоремы 7.1 [11, p. 269]. Для построения нижних по включению оценок множества достижимых значений целевых функционалов используются кусочно-постоянные программные управления. Предлагаемые оценки являются результатом решения специальной серии задач линейного программирования. Дается описание условно оптимальных [12] программных управлений, реализующих достижимые целевые значения.

1. Постановка задачи

Для описания рассматриваемой системы управления введем основные пространства. Зафиксируем отрезок $[0,T] \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $L^n = L^n[0,T]$ пространство суммируемых функций $v : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||v||_{L^n} = \int_0^T |v(s)|_n \, ds$, где $|\cdot|_n$ (или для краткости $|\cdot|$, если размерность пространства значений ясна из контекста) означает норму в $\mathbb{R}^n$; $AC^n = AC^n[0,T]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$||x||_{AC^n} = |x(0)|_n + ||\dot{x}||_{L^n};$$

$L_2^r = L_2^r[0,T]$ — пространство функций $u : [0,T] \to \mathbb{R}^r$ суммируемых с квадратом, оснащенное скалярным произведением $(u_1, u_2) = \int_0^T u_1'(t) u_2(t)\, dt$ ($(\cdot)'$ — символ транспонирования).

Далее зафиксируем множество $J = \{t_0, t_1, \ldots, t_\mu\}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\mu = T$. Обозначим через $FD^\nu(\mu) = FD^\nu\{t_0, t_1, \ldots, t_\mu\}$ пространство функций $z : J \to \mathbb{R}^\nu$ с нормой

$$||z||_{FD^\nu(\mu)} = \sum_{i=0}^{\mu} |z(t_i)|_\nu .$$

Рассматривается гибридная система управления с дискретной памятью

$$\dot{x}(t) = \sum_{j:\, t_j < t} A_j(t) x(t_j) + \sum_{j:\, t_j < t} B_j(t) z(t_j) + (Fu)(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.1}$$

$$z(t_i) = \sum_{j<i} D_{ij}\, x(t_j) + \sum_{j<i} H_{ij}\, z(t_j) + (Gu)(t_i) + g(t_i), \quad i = 1, \ldots, \mu. \tag{1.2}$$

Здесь столбцы $(n \times n)$-матриц A_j и $(n \times \nu)$-матриц B_j принадлежат пространству L^n, $f \in L^n$; D_{ij} и H_{ij} — постоянные матрицы размерности $(\nu \times n)$ и $(\nu \times \nu)$ соответственно, $g : J \to \mathbb{R}^\nu$; $F : L_2^r \to L^n$, $G : L_2^r \to FD^\nu(\mu)$ — линейные ограниченные вольтерровы операторы. Дискретность памяти всех операторов, действующих на фазовые переменные в правой части системы (1.1)–(1.2), определяется их конструкцией, для любого текущего момента времени динамика системы определяется дискретным набором ее состояний в предшествующие фиксированные моменты времени и управляющими воздействиями на предшествующем промежутке времени.

Для системы (1.1)–(1.2) с заданным начальным состоянием

$$x(0) \,=\, \alpha, \quad z(0) \,=\, \delta \tag{1.3}$$

ставится задача управления, в которой цель управления задается равенством

$$\ell(x,z) \,=\, \ \beta \in \mathbb{R}^N, \tag{1.4}$$

где $\ell : AC^n \times FD^\nu(\mu) \to \mathbb{R}^N$ — линейный ограниченный вектор-функционал. Напомним представление такого вектор-функционала:

$$\ell(x,z) \,=\, \Psi x(0) + \int\limits_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds + \sum_{j=0}^{\mu} \Gamma_j z(t_j). \tag{1.5}$$

Здесь Ψ — постоянная $(N \times n)$-матрица, Γ_j, $j = 0,1,\ldots,\mu$, — постоянные $(N \times \nu)$-матрицы, Φ — $(N \times n)$-матрица с измеримыми и ограниченными в существенном на $[0,\,T]$ элементами. Предполагается, что компоненты $\ell_i : AC^n \times FD^\nu(\mu) \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,N$, вектор-функционала $\ell \,=\, \mathrm{col}(\ell_1,\ldots,\ell_N)$ линейно независимы.

Сформулируем ограничения на управление и фазовые переменные.

Предполагаем, что управление u стеснено полиэдральными ограничениями

$$\Lambda_1\, u(t) \,\le\, \gamma_1, \quad t \in [0,T], \tag{1.6}$$

с постоянной $(N_1 \times r)$-матрицей Λ_1, такой что множество $\mathcal{V}$ решений системы линейных неравенств $\Lambda_1 v \,\le\, \gamma_1$ непусто и ограничено.

Для записи точечных ограничений относительно фазовых переменных введем обозначения

$$\mathbf{x} \,=\, \mathrm{col}(x(t_1),\ldots,x(t_\mu)), \quad z \,=\, \mathrm{col}(z(t_1),\ldots,z(t_\mu)).$$

Точечные ограничения на фазовые переменные определяются как

$$\Lambda_2^1\,\mathbf{x} \,+\, \Lambda_2^2\, z \,\le\, \gamma_2, \tag{1.7}$$

где Λ_2^1 и Λ_2^2 — постоянные матрицы размерности $N_1 \times n\mu$ и $N_1 \times \nu\mu$ соответственно; $\gamma_2 \in \mathbb{R}^{N_1}$.

Интегральные ограничения относительно управления и фазовых переменных непрерывного аргумента задаются в виде неравенства

$$\int\limits_0^T \Lambda_3^1(t)\, u(t)\, dt \,+\, \int\limits_0^T \Lambda_3^2(t)\, x(t)\, dt \,\le\, \gamma_3, \tag{1.8}$$

где $(N_3 \times r)$-матрица $\Lambda_3^1(t)$ имеет суммируемые с квадратом элементы, а элементы $(N_3 \times n)$-матриц $\Lambda_3^2(t)$ суммируемы на [0,T], $\gamma_3 \in \mathbb{R}^{N_3}$.

Для задачи (1.1)–(1.4), (1.6)–(1.8) множество ℓ-достижимости это множество всех $\beta \in \mathbb{R}^N$ в целевых условиях (1.4), для которых при заданных $f \in L^n, g \in FD^\nu(\mu), \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ найдется допустимое управление u, решающее эту задачу. Ниже предлагается способ построения внутренних (нижних по включению) оценок для множества ℓ-достижимости.

2. Оценки множества ℓ-достижимости

Представленные в данном разделе оценки основаны на редукции задачи управления (1.1)–(1.4), (1.6)–(1.8) к варианту обобщенной проблемы моментов [11]. Такая редукция требует приведения целевых условий и ограничений к единой интегральной форме, она оказывается возможной с использованием оператора Коши гибридной системы с дискретной памятью.

Система (1.1)–(1.2) является частным случаем общей непрерывно-дискретной системы, детально рассмотренной в [9]. Теорема 1 [9] дает для общего решения системы (1.1)–(1.2) представление

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{Y} \begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \mathcal{C} \begin{pmatrix} Fu \\ Gu \end{pmatrix} + \mathcal{C} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} \\ \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{pmatrix}$$

— фундаментальная матрица,

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} \end{pmatrix}$$

— оператор Коши. Здесь блочные компоненты $\mathcal{Y}_{ij}$, $\mathcal{C}_{ij}$, $i,j = 1,2$, являются операторами, действующими следующим образом:

$$\mathcal{Y}_{11} : \mathbb{R}^n \to AC^n; \quad \mathcal{Y}_{12} : \mathbb{R}^\nu \to AC^n; \quad \mathcal{Y}_{21} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\nu\mu}; \quad \mathcal{Y}_{22} : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}^{\nu\mu};$$

$$\mathcal{C}_{11} : L^n \to AC^n; \quad \mathcal{C}_{12} : \mathbb{R}^{\nu\mu} \to AC^n; \quad \mathcal{C}_{21} : L^n \to \mathbb{R}^{\nu\mu}; \quad \mathcal{C}_{22} : \mathbb{R}^{\nu\mu} \to \mathbb{R}^{\nu\mu}.$$

Для рассматриваемого случая явное представление всех компонент $\mathcal{Y}_{ij}$ и $\mathcal{C}_{ij}$ в терминах матричных параметров системы (1.1)–(1.2) получено в [10]. Ниже мы воспользуемся следующими представлениями компонент $\mathcal{C}_{ij}$:

$$(\mathcal{C}_{11}f)(t) = \int\limits_0^t C_{11}(t,s)f(s)\,ds; \quad (\mathcal{C}_{12}g)(t) = \int\limits_0^t \sum_{j:\,t_j<t} C_{12}(t_j,s)\,g(t_j)\,ds, \quad t \in [0,T];$$

$$\mathcal{C}_{21}^i f = \int\limits_0^{t_i} \sum_{j<i} C_{21}^i(t_j,s)f(s)\,ds; \quad (\mathcal{C}_{22}^i g)(t) = \sum_{j\le i} C_{22}^i(j))\,g(t_j), \quad i = 1,\dots,\mu.$$

Верхний индекс в обозначениях компонент $\mathcal{C}_{22}^i$ и $\mathcal{C}_{22}^i$ соответствует номеру столбца размерности ν в столбце из $\mathbb{R}^{\nu\mu}$.

Получим сначала выражение для целевого вектор-функционала $\ell : AC^n \times FD^\nu \to \mathbb{R}^N$ на траекториях системы (1.1)–(1.2), воспользовавшись представлением компонент x и z:

$$x = \mathcal{Y}_{11}\,x(0) + \mathcal{Y}_{12}\,z(0) + \mathcal{C}_{11}Fu + \mathcal{C}_{12}Gu + \mathcal{C}_{11}f + \mathcal{C}_{12}g,$$

$$z = \mathcal{Y}_{21}\,x(0) + \mathcal{Y}_{22}\,z(0) + \mathcal{C}_{21}Fu + \mathcal{C}_{22}Gu + \mathcal{C}_{21}f + \mathcal{C}_{22}g.$$

С учетом свойств компонент $\mathcal{Y}_{ij}$ фундаментальной матрицы и компонент $\mathcal{C}_{ij}$ оператора Коши для производной $\dot{x}(t)$, входящей в конструкцию $\ell(x,z)$, имеем представление

$$\dot{x}(t) = \dot{\mathcal{Y}}_{11}(t)\,x(0) + \dot{\mathcal{Y}}_{12}(t)\,z(0) \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{C}_{11}(t,s)(Fu)(s)\,ds + (Fu)(t) + \sum_{j:\,t_j<t} C_{12}(t_j,t)(Gu)(t_j)$$
$$+ \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{C}_{11}(t,s)f(s)\,ds + f(t) + \sum_{j:\,t_j<t} C_{12}(t_j,t)g(t_j).$$

Выводим выражение для интегрального слагаемого в (1.5):

$$\int_0^T \Phi(t)\dot{x}(t)\,dt \;=\; \int_0^T \Phi(t)\dot{\mathcal{Y}}_{11}(t)\,dt\,x(0) \;+\; \int_0^T \Phi(t)\dot{\mathcal{Y}}_{12}(t)\,dt\,z(0)$$
$$+\int_0^T \Phi(t)\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{C}_{11}(t,s)(Fu)(s)\,ds\,dt \;+\; \int_0^T \Phi(t)(Fu)(t)\,dt \;+\; \int_0^T \Phi(t)\sum_{j\colon t_j<t} C_{12}(t_j,t)(Gu)(t_j)\,dt$$
$$+\int_0^T \Phi(t)\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{C}_{11}(t,s)f(s)\,ds\,dt \;+\; \int_0^T \Phi(t)f(t)\,dt \;+\; \int_0^T \Phi(t)\sum_{j\colon t_j<t} C_{12}(t_j,t)g(t_j)\,dt.$$

Обозначая

$$\Theta(t) \;=\; \Phi(t) \;+\; \int_t^T \Phi(s)\frac{\partial}{\partial s}C_{11}(s,t)\,ds \tag{2.1}$$

и учитывая начальные условия (1.3), запишем правую часть последнего равенства в виде

$$\int_0^T \Theta(t)(Fu)(t)\,dt \;+\; \int_0^T \Phi(t)\sum_{j\colon t_j<t} C_{12}(t_j,t)(Gu)(t_j)\,dt$$
$$+\int_0^T \Theta(t)f(t)\,dt \;+\; \int_0^T \Theta(t)(Fu)(t)\,dt \;+\; \Phi(t)\sum_{j\colon t_j<t} C_{12}(t_j,t)(Gu)(t_j)$$
$$+\int_0^T \Theta(t)\dot{\mathcal{Y}}_{11}(t)\,dt\,\alpha \;+\; \int_0^T \Theta(t)\dot{\mathcal{Y}}_{12}(t)\,dt\,\delta.$$

Далее, для фазовой переменной с дискретным временем имеем

$$z(t_i) \;=\; \mathcal{Y}_{21}^i\,\alpha \;+\; \mathcal{Y}_{22}^i\,\delta \;+\; \mathcal{C}_{21}^i\,Fu \;+\; \mathcal{C}_{22}^i\,Gu \;+\; \mathcal{C}_{21}^i\,f \;+\; \mathcal{C}_{22}^i\,g.$$

Напомним, что здесь по определению

$$\mathcal{C}_{21}^i f \;=\; \int_0^{t_i}\sum_{j<i} C_{21}^i(t_j,s)f(s)\,ds, \quad \mathcal{C}_{22}^i g \;=\; \sum_{j\le i} C_{22}^i(j)g(t_j).$$

Отсюда для слагаемых, содержащих z в представлении значений целевого вектор-функционала, получаем

$$\sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i z(t_i) \;=\; \sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\mathcal{Y}_{21}^i\,\alpha \;+\; \sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\mathcal{Y}_{22}^i\,\delta$$
$$+\sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\int_0^{t_i}\sum_{j<i} C_{21}^i(t_j,s)(Fu)(s)\,ds \;+\; \sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\sum_{j\le i} C_{22}^i(j)(Gu)(t_j)$$
$$+\sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\int_0^{t_i}\sum_{j<i} C_{21}^i(t_j,s)f(s)\,ds \;+\; \sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\sum_{j\le i} C_{22}^i(j)g(t_j).$$

Выделим теперь в общем представлении целевого вектор-функционала на траекториях системы (1.1)–(1.2) с начальными условиями (1.3) слагаемые, не содержащие управление u, и обозначим их сумму через β_0:

$$\beta^0 = \Psi\alpha + \Gamma_0\delta + \int\limits_0^T \Phi(t)\dot{\mathcal{Y}}_{11}(t)\,dt\,\alpha + \int\limits_0^T \Phi(t)\dot{\mathcal{Y}}_{12}(t)\,dt\,\delta + \sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\,\mathcal{Y}_{21}^i\,\alpha + \sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\,\mathcal{Y}_{22}^i\,\delta$$

$$+ \int\limits_0^T \Theta(t)f(t)\,dt + \int\limits_0^T \Phi(t)\sum_{j:\,t_j<t} C_{12}(t_j,t)g(t_j)\,dt$$

$$+ \sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\int\limits_0^{t_i}\sum_{j<i} C_{21}^i(t_j,t)f(t)\,dt + \sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\sum_{j\le i} C_{22}^i(j)g(t_j). \qquad (2.2)$$

Теперь преобразуем все слагаемые, содержащие управление, к интегральной форме:

$$\int\limits_0^T \Theta(t)(Fu)(t)\,dt = \int\limits_0^T M_1(t)u(t)\,dt,$$

где $(N\times r)$-матрица $M_1(t)$ определяется равенством

$$M_1(t) = (F^*\Theta)(t).$$

Здесь $F^*\colon (L^n)^*\to(L_2^r)^*$ — оператор сопряженный к оператору F, реализующему управление в первом уравнении системы; матрица Θ определена равенством (2.1).

$$\int\limits_0^T \Phi(t)\sum_{j:\,t_j<t} C_{12}(t_j,t)\,dt = \int\limits_0^T \sum_{j:\,t_j<t}\Phi(t)C_{12}(t_j,t)\int\limits_0^{t_j} G_j(s)u(s)ds\,dt$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_0^T \sum_{j:\,t_j<t}\Phi(t)C_{12}(t_j,t)\,dt\,\chi_{[0,t_j]}(s)\,G_j(s)u(s)ds = \int\limits_0^T M_2(t)u(t)\,dt,$$

где $(N\times r)$-матрица $M_2(t)$ задается равенством

$$M_2(t) = \sum_{j:\,t_j<t}\int\limits_0^T \Phi(s)C_{12}(t_j,s)\,ds\,\chi_{[0,t_j]}(t)\,G_j(t);$$

$\chi_{[0,t_j]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0,t_j]$; $G_j(t)$ — ядро интегрального представления вектор-функционала $G: L_2^r[0,t_j]\to\mathbb{R}^\nu$.

$$\sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\int\limits_0^{t_i}\sum_{j<i} C_{21}^i(t_j,s)(Fu)(s)\,ds = \int\limits_0^T\Big[\sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\sum_{j<i}\chi_{[0,t_i]}(t)C_{21}^i(t_j,t)\Big](Fu)(t)\,dt$$

$$= \int\limits_0^T M_3(t)u(t)\,dt,$$

где $(N\times r)$-матрица $M_3(t)$ определяется равенством

$$M_3(t) = \Big(F^*\Big[\sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i\sum_{j<i}\chi_{[0,t_i]}(\cdot)C_{21}^i(t_j,\cdot)\Big]\Big)(t).$$

$$\sum_{i=1}^{\mu} \Gamma_i \sum_{j \le i} C_{22}^i(j)(Gu)(t_j) = \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{\mu} \Gamma_i \sum_{j \le i} C_{22}^i(j) \chi_{[0,t_i]}(t) G_j(t) \Big] u(t)\, dt = \int_0^T M_4(t) u(t)\, dt,$$

где $(N \times r)$-матрица $M_4(t)$ описывается выражением

$$M_4(t) = \sum_{i=1}^{\mu} \Gamma_i \sum_{j \le i} C_{22}^i(j) \chi_{[0,t_i]}(t) G_j(t).$$

Таким образом, целевые условия (1.4) приведены к виду

$$\ell(x, z) = \int_0^T M(t) u(t)\, dt + \beta^0 = \beta,$$

где $M(t) = M_1(t) + M_2(t) + M_3(t) + M_4(t)$.

Приведем теперь к единой интегральной форме ограничения (1.7) и (1.8). Для левой части (1.7) имеем

$$\Lambda_2^1 \mathbf{x} + \Lambda_2^2 z = \sum_{i=1}^{\mu} \Lambda_{2i}^1 x(t_i) + \sum_{i=1}^{\mu} \Lambda_{2i}^2 z(t_i).$$

Учитывая, что

$$x(t_i) = \mathcal{Y}_{11}(t_i) x(0) + \mathcal{Y}_{12}(t_i) z(0) + \int_0^{t_i} C_{11}(t_i, s)(Fu)(s)\, ds + \int_0^{t_i} \sum_{j: t_j < t_i} C_{12}(t_i, s)(Gu)(t_j)\, ds$$
$$+ \int_0^{t_i} C_{11}(t_i, s) f(s)\, ds + \int_0^{t_i} \sum_{j: t_j < t_i} C_{12}(t_i, s) g(t_j)\, ds$$

и

$$z(t_i) = \mathcal{Y}_{21}^i x(0) + \mathcal{Y}_{22}^i z(0) + \int_0^{t_i} \sum_{j < i} C_{21}^i(t_j, s)(Fu)(s)\, ds + \sum_{j \le i} C_{22}^i(j)(Gu)(t_j)$$
$$+ \int_0^{t_i} \sum_{j < i} C_{21}^i(t_j, s) f(s)\, ds + \sum_{j \le i} C_{22}^i(j) g(t_j),$$

получаем для траекторий с начальными условиями (1.3):

$$\Lambda_2^1 \mathbf{x} + \Lambda_2^2 z = \int_0^T \Lambda_2(t) u(t)\, dt + \gamma_2^0,$$

где

$$\Lambda_2(t) = \sum_{i=1}^{\mu} \Lambda_{2i}^1 \Big\{ \big(F^* \big[C_{11}(t_i, \cdot) \chi_{[0,t_i]}(\cdot) \big] \big)(t) + \sum_{j: t_j < t_i} \int_0^{t_i} C_{12}(t_j, s)\, ds\, G_j(t) \chi_{[0,t_j]}(t) \Big\}$$
$$+ \sum_{i=1}^{\mu} \Lambda_{2i}^2 \Big\{ \Big(F^* \Big[\sum_{j < i} C_{21}(t_i, \cdot) \chi_{[0,t_i]}(\cdot) \Big] \Big)(t) + \sum_{j \le i} C_{22}(j)\, G_j(t) \chi_{[0,t_j]}(t) \Big\},$$

$$\gamma_2^0 = \sum_{i=1}^{\mu}\Lambda_{2i}^1\Big\{\mathcal{Y}_{11}(t_i)\alpha + \mathcal{Y}_{12}(t_i)\delta + \int\limits_0^{t_i} C_{11}(t_i,s)f(s)\,ds + \int\limits_0^{t_i}\sum_{j:t_j<t_i} C_{12}(t_j,s)g(t_j)ds\Big\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\mu}\Lambda_{2i}^2\Big\{\mathcal{Y}_{21}^i\,\alpha + \mathcal{Y}_{22}^i\,\delta + \int\limits_0^{t_i}\sum_{j<i} C_{21}^i(t_j,s)f(s)\,ds + \sum_{j\le i} C_{22}^i(j)g(t_j)\Big\}. \qquad (2.3)$$

Далее, для первого слагаемого в левой части (1.8) имеем

$$\int\limits_0^T \Lambda_3^1(t)x(t)\,dt = \int\limits_0^T \Lambda_3^0(t)u(t)\,dt + \gamma_3^0,$$

где

$$\Lambda_3^0(t) = \Big(F^*\Big[\int\limits_{(\cdot)}^T \Lambda_3^1(\tau)C_{11}(\tau,\cdot)\,d\tau\Big]\Big)(t) + \int\limits_t^T \Lambda_3^1(\tau)\Big\{\int\limits_t^{\tau}\sum_{j:t_j<\tau} C_{12}(t_j,s)\chi_{[0,t_j]}(t)G_j(t)\,ds\Big\}\,d\tau,$$

$$\gamma_3^0 = \int\limits_0^T \Lambda_3^1(t)\Big\{\mathcal{Y}_{11}(t)\,\alpha + \mathcal{Y}_{12}(t)\,\delta + \int\limits_0^t C_{11}(t,s)f(s)\,ds + \int\limits_0^t \sum_{j:t_j<t} C_{12}(t_j,s)g(t_j)\,ds\Big\}\,dt. \qquad (2.4)$$

Таким образом, окончательное выражение для левой части ограничения (1.8) принимает вид

$$\int\limits_0^T \Lambda_3^1(t)x(t)\,dt + \int\limits_0^T \Lambda_3^2(t)u(t)\,dt = \int\limits_0^T \Lambda_3(t)u(t)\,dt + \gamma_3^0,$$

где $\Lambda_3(t) = \Lambda_3^0(t) + \Lambda_3^2(t)$.

Для записи исходной задачи в форме, приведенной к управляющим воздействиям, введем обозначения $\Lambda(t) = \mathrm{col}(\Lambda_2(t)\,,\,\Lambda_3(t))$, $\gamma = \mathrm{col}(\gamma_2\,,\,\gamma_3)$ $\gamma^0 = \mathrm{col}(\gamma_2^0\,,\,\gamma_3^0)$. Теперь задачу (1.1)–(1.4), (1.6)–(1.8) записываем следующим образом:

$$\int\limits_0^T M(t)\,u(t)\,dt = \beta - \beta^0, \quad \Lambda_1 u(t) \le \gamma_1, \quad t\in[0,T], \quad \int\limits_0^T \Lambda(t)\,u(t)\,dt \le \gamma - \gamma^0. \qquad (2.5)$$

Отметим, что в (2.5) все элементы матриц $M(t)$, $\Lambda(t)$ и векторов β^0, γ^0 (см. (2.2)–(2.4)) выражены в явном виде через параметры оператора Коши рассматриваемой системы управления.

Для построения внутренних оценок множества ℓ-достижимости воспользуемся кусочно-постоянными программными управлениями. Зафиксируем разбиение отрезка $[0,T]$ точками $0=\vartheta_0<\vartheta_1<\ldots<\vartheta_{\mathcal{K}}=T$ и обозначим через $\chi_k(t)$ характеристическую функцию промежутка $[\vartheta_{k-1},\vartheta_k)$. Определим на этом разбиении управления вида

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} d_k\chi_k(t), \qquad (2.6)$$

где $d_k\in\mathbb{R}^r, k=1,\ldots,\mathcal{K}$, — постоянные векторы. Обозначим

$$M^k = \int\limits_{\vartheta_{k-1}}^{\vartheta_k} M(t)\,dt, \quad \Lambda^k = \int\limits_{\vartheta_{k-1}}^{\vartheta_k} \Lambda(t)\,dt.$$

Зафиксируем в пространстве целевых значений $\mathbb{R}^N$ систему векторов λ_j, $j = 1,\ldots,\mathcal{N}$, и для каждого j сформулируем задачу линейного программирования

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \lambda_j' \cdot M^k d_k \to \max, \quad \Lambda_1 d_k \le \gamma_1, \quad k = 1,\ldots,\mathcal{K}, \quad \sum_{i=1}^{\mathcal{K}} \Lambda^i d_i \le \gamma - \gamma^0. \tag{2.7}$$

Пусть $\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_{\mathcal{N}_1}}$ — подмножество набора $\{\lambda_j\}$, $j = 1,\ldots,\mathcal{N}$, для каждого элемента которого задача (2.7) имеет решение $\mathcal{D}^{j_i} = (d_1^{j_i},\ldots,d_{\mathcal{K}}^{j_i})$, $i = j_1,\ldots,j_{\mathcal{N}_1}$. Каждое такое решение при его подстановке в (2.6) определяет программное управление $u^{j_i}(t)$, дающее достижимое значение целевого вектор-функционала ℓ:

$$\ell\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \int_0^T M(t)\cdot u^{j_i}(t)\,dt = \rho^{j_i}. \tag{2.8}$$

Совокупность этих значений (точек в пространстве $\mathbb{R}^N$) позволяет получить внутреннюю оценку множества достижимости.

Теорема. Пусть P — множество всех выпуклых комбинаций точек $\rho^{j_i}, i = j_1,\ldots,j_{\mathcal{N}_1}$, определяемых равенством (2.8). Тогда любое значение $\beta \in \mathbb{R}^N$, такое что точка $\rho = \beta - \beta^0$ принадлежит множеству P, является достижимым значением целевого вектор-функционала ℓ в задаче (1.1)–(1.4), (1.6)–(1.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждое управление $u^{j_i}(t)$ удовлетворяет ограничениям задачи (2.7). Этим ограничениям удовлетворяет и любое управление $u(t) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_1} \omega_i\, u^{j_i}(t)$, где $\omega_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_1} \omega_i = 1$. Действительно, из $\Lambda_1\, u^{j_i}(t) \le \gamma_1$ выводим

$$\omega_i\,\Lambda_1\, u^{j_i}(t) = \Lambda_1 \omega_i\, u^{j_i}(t) \le \omega_i\,\gamma_1, \quad i = 1,\ldots,\mathcal{N}_1.$$

Суммируя почленно эти неравенства, имеем $\Lambda_1\, u(t) \le \gamma_1$. Аналогично, из

$$\int_0^T \Lambda(t)\, u^{j_i}(t)\,dt \le \gamma - \gamma^0$$

следует, что

$$\omega_i \int_0^T \Lambda(t)\, u^{j_i}(t)\,dt = \int_0^T \Lambda(t)\,\omega_i\, u^{j_i}(t)\,dt \le \omega_i\,(\gamma - \gamma^0), \quad i = 1,\ldots,\mathcal{N}_1.$$

Суммируя почленно эти неравенства, получаем

$$\int_0^T \Lambda(t)u(t)\,dt \le \gamma - \gamma^0.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что точке множества P, определяемой фиксированным набором коэффициентов выпуклой комбинации, соответствует программное управление с тем же набором коэффициентов при управлениях $u^{j_i}(t)$. $\square$

Отметим, что точность получаемой в силу теоремы внутренней оценки зависит от разбиения основного промежутка $[0,T]$ и “разнообразия” используемых направлений λ_j, которые вместе с моментной матрицей определяют градиент целевой функции в соответствующей задаче линейного программирования. Представляется целесообразным начинать с набора всевозможных векторов λ_j, каждая координата которых может принимать одно из трех значений: $0, 1, -1$, при этом из набора исключается вектор с нулевыми координатами. При необходимости уточнения оценки (расширения множества P) в исходный набор добавляются полусуммы каждых двух различных векторов исходного набора, затем так же можно поступить с новым набором и т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гусев М.И., Осипов И.О.** Асимптотическое поведение множеств достижимости на малых временных промежутках // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 86–99. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-86-99 .
2. **Rodina L.I., Khammadi A. Kh.** Statistical characteristics of attainability set of controllable systems with random coefficients // Russian Math. (Iz. VUZ). 2014. Vol. 58, no. 11. P. 43–53. doi: 10.3103/S1066369X14110061 .
3. **Пацко В.С., Федотов А.А.** Структура множества достижимости для машины Дуббинса со строго односторонним поворотом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 171–187. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-171-187
4. **Polyak B.T.** Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Ser. A. Math. Analysis. Watam Press. 2004. Vol. 11, no. 2-3. P. 255–267.
5. **Пацко В.С., Стародубцев И.С., Федотов А.А.** Физическая визуализация множеств достижимости в задачах управления // Тр. Юбилейной 25-й Междунар. науч. конф. (ГРАФИКОН'2015) / АНО "Институт физико-технической информатики" (Протвино). 2015. С. 22–27.
6. **Maksimov V.P.** On the ℓ-attainability sets of continuous discrete functional differential systems // IFAC PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 310–313. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.401 .
7. **Максимов В.П.** Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики // Прикл. математика и вопросы управления. 2019. № 4. С. 124–135. doi: 10.15593/2499-9873/2019.4.08 .
8. **Максимов В.П.** О построении программных управлений в задаче о достижимых значениях целевых функционалов для динамических моделей экономики с дискретной памятью // Прикл. математика и вопросы управления. 2020. № 3. С. 89–104. doi: 10.15593/2499-9873/2020.3.05 .
9. **Maksimov V.P.** The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components // Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2019. Vol. 29, no. 1. P. 40–51. doi: 10.20537/vm190104 .
10. **Maksimov V.P.** On a class of linear continuous-discrete systems with discrete memory // Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2020. Vol. 30, no. 3. P. 385–395. doi: 10.35634/vm200303 .
11. **Krein M.G., Nudel'man A.A.** The Markov moment problem and extremal problems. NY: AMS, 1977. 417 p.
12. **Maksimov V.P.** Conditional optimal control in enclosing solutions to boundary value problems with an uncertainty // Functional Differential Equations. 2020. Vol. 27, no. 3-4. P. 95–101. doi: 10.26351/FDE/27/3-4/5 .

Поступила 29.03.2021
После доработки 19.05.2021
Принята к публикации 31.05.2021

Максимов Владимир Петрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Пермский государственный национальный исследовательский университет
г. Пермь
e-mail: maksimov@econ.psu.ru

REFERENCES

1. Gusev M.I., Osipov I.O. Asymptotic behavior of reachable sets on small time intervals. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 86–99 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-86-99 .
2. Rodina L.I., Khammadi A.Kh. Statistical characteristics of attainability set of controllable systems with random coefficients. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 11, pp. 43–53. doi: 10.3103/S1066369X14110061 .

3. Patsko V.S., Fedotov A.A. The structure of the reachable set for the Dubins car with a strictly one-sided turn. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 171–187. (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-171-187 .
4. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Math. Analysis*, 2004, vol. 11, no. 2-3, pp. 255–267.
5. Patsko V.S., Starodubtsev I.S., Fedotov A.A. Physical visualization of reachable sets in control problems. In: *Proc. XXV Int. sci. conf. "GraphiCon'2015", ANO Inst. phys. techn. inform. (Protvino)*. 2015, pp. 22–27.
6. Maksimov V.P. On the ℓ-attainability sets of continuous discrete functional differential systems. *IFAC PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 310–313. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.401 .
7. Maksimov V.P. Attainable values of on-target functionals in economic dynamics problems. *Appl. Math. Contr. Sci.*, 2019, no. 4, pp. 124–135 (in Russian). doi: 10.15593/2499-9873/2019.4.08 .
8. Maksimov V.P. On the construction of program control in the problem on attainable values of on-target functionals for dynamic economic models with discrete memory. *Appl. Math. Contr. Sci.*, 2020, no. 3, pp. 89–104 (in Russian). doi: 10.15593/2499-9873/2020.3.05 .
9. Maksimov V.P. The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 40–51. doi: 10.20537/vm190104 .
10. Maksimov V.P. On a class of linear continuous-discrete systems with discrete memory. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2020, vol. 30, no. 3, pp. 385–395. doi: 10.35634/vm200303 .
11. Krein M.G., Nudel'man A.A. *The Markov moment problem and extremal problems.* N Y: AMS, 1977, 417 p. ISBN: 0821845004 .
12. Maksimov V.P. Conditional optimal control in enclosing solutions to boundary value problems with an uncertainty. *Functional Diff. Eq.*, 2020, vol. 27, no. 3-4, pp. 95–101. doi: 10.26351/FDE/27/3-4/5 .

Received March 29, 2021
Revised May 19, 2021
Accepted May 31, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00332).

Vladimir Petrovich Maksimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Perm State University, Perm, 614990 Russia, e-mail: maksimov@econ.psu.ru .

Cite this article as: V. P. Maksimov. On internal estimates of reachable sets for continuous–discrete systems with discrete memory, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 141–151 .