ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 3 2021

УДК 517.911.5

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

А. А. Азамов, А. О. Бегалиев

Рассматриваются уравнения Пфаффа с непрерывными коэффициентами. Индивидуальная задача Коши для уравнения Пфаффа преобразуется к равносильной системе интегральных уравнений специального типа, которая является переопределенной. Доказывается, что в случае гладких коэффициентов совместимость такой системы равносильна критерию интегрируемости Фробениуса. Излагается теорема существования решения для полученного типа интегральных уравнений методом ломаных Эйлера, позволяющим построить приближенное решение уравнения Пфаффа. Приводится также аналог теоремы Нагумо о единственности решения задачи Коши.

Ключевые слова: уравнение Пфаффа, интегральное уравнение, совместимость системы, критерий Фробениуса, теорема существования, ломаные Эйлера, теорема единственности, условие Нагумо.

A. A. Azamov, A. O. Begaliev. An existence theorem and an approximate solution method for the Pfaff equation with continuous coefficients.

Pfaff equations with continuous coefficients are considered. A specific Cauchy problem for the Pfaff equation is transformed to an equivalent system of integral equations of a special type, which is overdetermined. It is shown that in the case of smooth coefficients the consistency of the system is equivalent to the Frobenius integrability criterion. A theorem on the existence of a solution for the obtained type of integral equations is presented. The solution is found by the Euler polygonal method, which allows one to construct an approximate solution of the Pfaff equation. An analog of Nagumo's theorem on the uniqueness of the solution to the Cauchy problem is also given.

Keywords: Pfaff equation, integral equation, consistency of a system, Frobenius criterion, existence theorem, Euler's broken lines, uniqueness of solution, Nagumo condition.

MSC: 34A12, 58A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-12-24

Введение

В статье устанавливаются теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения Пфаффа, когда коэффициенты лишь непрерывны. Отметим, что уравнения и системы Пфаффа, а также другие переопределенные системы уравнений в частных производных [1–3] возникли в XIX в. в виде важных приложений к термодинамике [4], дифференциальной геометрии [1; 5; 6] и теоретической физике [7]. Однако долгое время чуть ли не единственным существенным результатом о системах Пфаффа оставалась теорема Фробениуса об интегрируемости [8; 9]. За последние десятилетия интерес к таким уравнениям снова возрождается в связи с новыми применениями в теории слоений [10–12] и теоретической физике [13]. Глубже стала разрабатываться теория линейных систем Пфаффа [14; 15]. Особый интерес вызывают алгебраические интегралы систем Пфаффа с полиномиальными коэффициентами [3; 16–20]. В статьях [21; 22] рассмотрена обратная задача для уравнения Пфаффа, а в [23] изучено поведение интегральных поверхностей около сингулярных кривых по аналогии с теорией особых точек динамических систем. Отметим также, что в свое время С. Лефшец использовал однородное уравнение Пфаффа для аналитического выражения продолжения полиномиального векторного поля с плоскости $\mathbb{R}^2$ на сферу Пуанкаре [24]. В [25] предложена

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (проект ОТ-Ф4-84).

модификация уравнения Лефшеца для обеспечения проективности независимо от четности степени полинома. О других приложениях уравнения Пфаффа см. [26; 27].

С точки зрения приложений к геометрии является естественным рассмотрение уравнений Пфаффа с гладкими коэффициентами. Вместе с тем в приложениях к термодинамическим процессам условие гладкости оказывается слишком жестким, поскольку в слоистых средах оно, как правило, не выполняется. В связи с этим в статьях [28; 29] развит подход, базирующийся на теории обобщенных функций, который по самому существу пригоден только для линейных систем Пфаффа. В работе [12], посвященной исследованию единственности решения задачи Коши, система Пфаффа с непрерывными коэффициентами изучается посредством аппроксимации гладкими системами, удовлетворяющими критерию Фробениуса. В настоящей статье предлагается подход, основанный на преобразовании задачи Коши для уравнения Пфаффа к равносильной системе интегральных уравнений. Для уравнения в пространстве $\mathbb{R}^3$ этот подход изложен в [30]. Отметим, что результат работы [30] не допускает непосредственного обобщения на случай произвольного числа переменных и требует введения специальных обозначений. С другой стороны, излагаемую здесь теорию легко обобщить для систем уравнений Пфаффа.

Преобразование уравнения Пфаффа к системе интегральных уравнений позволяет перенести соответствующие методы и результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений [31]. Здесь приводятся аналоги теоремы Пеано о существовании и метод Эйлера приближенного решения задачи Коши, а также, для полноты, аналог теоремы Нагумо о единственности.

1. Постановка задачи

Объектом нашего рассмотрения является уравнение Пфаффа, выражающее обращение в 0 дифференциальной формы

$$\omega = a_1(X)dX_1 + a_2(X)dX_2 + \cdots + a_n(X)dX_n + a_0(X)dX_0 = 0, \tag{1.1}$$

где $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n, X_0) \in \Delta$, $\Delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$. В дальнейшем всюду предполагается, что область Δ не содержит особых точек, где все коэффициенты $a_j(X)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, одновременно обращаются в 0. Уравнение (1.1) задает поле гиперплоскостей в области Δ. Оно называется *интегрируемым* (в области Δ), если существует семейство многообразий коразмерности 1 (гладких гиперповерхностей), однократно покрывающих Δ и в каждой своей точке касающихся гиперплоскости поля (1.1). В частном случае интегралом может быть сама гиперплоскость поля (1.1). В общем случае каждое такое многообразие будет огибающим гиперплоскости (1.1). Оно называется *интегральным многообразием*, или короче, *интегралом уравнения Пфаффа*. В случае $n = 1$ непрерывность коэффициентов $a_j(X)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, достаточно для интегрируемости (следствие теоремы Пеано), а в случае $n \geq 2$ даже уравнение с гладкими коэффициентами может быть неинтегрируемым. Если все коэффициенты $a_j(X)$ непрерывно дифференцируемые в области Δ, то условие Фробениуса

$$\omega \wedge d\omega = 0 \tag{1.2}$$

необходимо и достаточно для интегрируемости уравнения (1.1) [8; 9]. При выполнении этого условия через каждую точку X^0, $X^0 \in \Delta$, проходит единственная интегральная гиперповерхность. Подчеркнем, что в этом смысле условие Фробениуса по существу является условием интегрируемости в целом, т. е. для всей области Δ.

Далее для определенности предположим, что $a_0(X) \neq 0$ в некоторой односвязной окрестности D точки X^0, $D \subset \Delta$. Тогда уравнение (1.1) будет равносильно системе

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, u), \tag{1.3}$$

где $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $u = X_0$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_j = X_j$, $f_j(x, u) = -a_j(X)/a_0(X)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Хотя условие Фробениуса в форме (1.2) формально не предустматривает гладкости правых частей системы (1.3), однако такое требование в неявном виде участвует в операции внешнего дифференцирования (см. [9, теоремы 3.1, 6.1, гл. VI]). Если это требование выполнено, то условие (1.2) в координатах $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ примет вид

$$\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u} f_j(x,u) = \frac{\partial f_j(x,u)}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j(x,u)}{\partial u} f_i(x,u), \tag{1.4}$$

где $1 \le i < j \le n$.

В работе [12] уравнение (1.1) изучено при условии непрерывности коэффициентов методом аппроксимации непрерывных функций гладкими. При этом условие (1.2) переносится на аппроксимирующие уравнения. Здесь предлагается другой подход, в котором система (1.3) преобразуется к равносильной системе интегральных уравнений и рассматривается сама по себе.

2. Эквивалентная система интегральных уравнений

Итак, пусть функции f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и $(x^0, u^0) \in D$. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, u), \quad u(x^0) = u^0. \tag{2.1}$$

Нам потребуются специальные обозначения, которые могут оказаться полезными и при изучении других задач об уравнениях Пфаффа. Вектор, полученный из x заменой координаты x_k на s_k, обозначим через $x|^0 s_k$ и результат назовем *главным аргументом* (k фиксировано, $k = 1, 2, \ldots, n$). Из главного аргумента образуем *подчиненные аргументы* согласно следующему правилу. Расположим координаты точки $x|^0 s_k$ в вершинах правильного n-угольника (рис. 1). Если номер j координаты больше n, но не превосходит $2n$, то отождествим его с $j - n \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Сделав в векторе $x|^0 s_k$ пару замен $s_k \to x_k^0$, $x_{k+1} \to s_{k+1}$, получим *первый подчиненный аргумент*, который обозначим через $x|^1 s_{k+1}$. Заменяя в $x|^1 s_{k+1}$ переменную s_{k+1} на x_{k+1}^0 и x_{k+2} на s_{k+2}, получим *второй подчиненный аргумент* $x|^2 s_{k+2}$ и т. д. Последний член этого ряда $x|^{n-1} s_{k+n}$ выводим из $x|^{n-2} s_{k+n-1}$ парой замен $s_{k+n-1} \to x_{k+n-1}^0$, $x_{k+n} \to s_{k+n}$. В последнем подчиненном аргументе $x|^{n-1} s_{k+n}$ координаты состоят из чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, за исключением координаты с номером $k + n - 1$, которая есть s_{k+n-1}. На рис. 1 дана схематическая иллюстрация процесса образования подчиненных аргументов. Здесь внутренний круг изображает главный аргумент, штриховые круги выполняют роль многоточий, а остальные соответствуют подчиненным аргументам. При каждом переходе с меньшего круга на больший число компонент с верхним индексом 0 увеличивается на единицу; индекс координаты s_i также увеличивается на единицу, но при этом сдвигается на одну позицию по часовой стрелке. Например, при $n = 4$, $k = 3$ имеем главный аргумент (x_1, x_2, s_3, x_4) и три подчиненных аргумента (x_1, x_2, x_3^0, s_4), (s_1, x_2, x_3^0, x_4^0), $(x_1^0, s_2, x_3^0, x_4^0)$.

Теорема 1. *Задача Коши* (2.1) *равносильна системе из* n *интегральных уравнений*

$$u(x) = u^0 + \sum_{l=0}^{n-1} \int_{x_{k+l}^0}^{x_{k+l}} f_{k+l}[x|^l s_{k+l}, u(x|^l s_{k+l})] ds_{k+l}, \tag{2.2}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$.

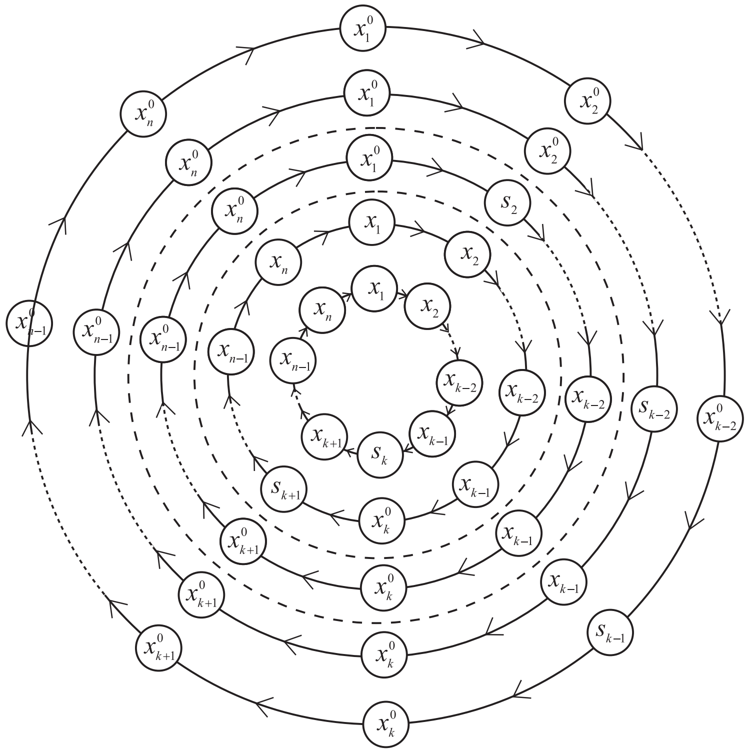

Рис. 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Под знаком суммы в k-м уравнении (2.2) — только одно слагаемое, соответствующее индексу $l = 0$, т. е.

$$\int\limits_{x_k^0}^{x_k} f_k[x|^0 s_k, u(x|^0 s_k)]ds_k$$

зависит от x_k, а во всех остальных слагаемых на месте x_k стоит x_k^0. Поэтому из (2.2) вытекает $\partial u/\partial x_k = f_k[x|^0 x_k, u(x|^0 x_k)]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $f_k[x|^0 x_k, u(x|^0 x_k)]$ получено из интегранта $f_k[x|^0 s_k, u(x|^0 s_k)]$ обратной подстановкой $s_k \to x_k$. (Аналогичный смысл имеют выражения типа $x|^l y$, используемые ниже.)

Обратное докажем рассуждениями, называемыми иногда в литературе методом телевизионной башни [32]. Из уравнения $\partial u(x)/\partial x_1 = f_1(x, u(x))$ следует

$$u(x) = u(x|^0 x_1^0) + \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1[x|^0 s_1, u(x|^0 s_1)]ds_1. \tag{2.3}$$

Далее из векторной системы (2.1) выделим второе уравнение. Подставляя в нем $x_1 = x_1^0$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u(x|^1 x_1^0)}{\partial x_2} = f_2[x|^1 x_1^0, u(x|^1 x_1^0)],$$

интегрирование которого (в пределах от x_2^0 до x_2) дает

$$u(x|^1 x_1^0) = u(x|^1 x_2^0) + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} f_2[x|^1 s_2, u(x|^1 s_2)]ds_2. \tag{2.4}$$

Повторяя эту процедуру, на последнем шаге будем иметь уравнение

$$\frac{\partial u(x|^{n-1}x_n)}{\partial x_n} = f_n[x|^{n-1}x_n, u(x|^{n-1}x_n)],$$

из которого следует

$$u(x|^{n-1}x_n) = u(x|^{n-1}x_n^0) + \int\limits_{x_n^0}^{x_n} f_n[x|^{n-1}s_n, u(x|^{n-1}s_n)]ds_n. \tag{2.5}$$

Очевидно, $u(x|^{n-1}x_n^0) = u(x^0) = u^0$. Поэтому почленное сложение соотношений (2.3)–(2.5) приводит к уравнению (2.2) для $k = 1$. Для $k = 2, 3, \ldots, n$ рассуждения аналогичны.

П р и м е ч а н и е 1. В действительности получено несколько больше, чем утверждается в теореме 1. Зафиксируем k. Если $u(x)$ — решение задачи Коши (2.1), то функции $u(x|^{n-1}x_{n+k-1})$, $u(x|^{n-2}x_{n+k-2})$, $\ldots$, $u(x|^1x_{k+1})$, $u(x|^0x_k)$ являются решениями задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в количестве n, а именно

$$\frac{u(x|^l x_{k+l})}{\partial x_{k+l}} = f_{k+l}[x|^l x_{k+l}, u(x|^l x_{k+l})], u(x|^l x_{k+l})|_{x_{k+l}=x_{k+l}^0} = u(x|^{l+1}x_{k+l+1}), \tag{2.6}$$

$l = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, интегральное уравнение (2.2) с заданным k равносильно системе (2.6).

П р и м е ч а н и е 2. Система (2.2) Пфаффа может быть сведена к системе интегральных уравнений не единственным способом. В самом деле, каждая перестановка $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, такая что $\sigma(1) = 1$, порождает преобразование $\hat{\sigma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определяемое формулой $\hat{\sigma}(x) = (x_1, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. Зафиксировав σ, задачу Коши (2.1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \hat{u}(y)}{\partial y} = \hat{f}(y, \hat{u}(y)), y(0) = \sigma(x_0), \tag{2.7}$$

где $y = \sigma_k(x)$, $\hat{u}(y) = u(\hat{\sigma}^{-1}(y))$, $\hat{f}(y, \hat{u}) = f(\hat{\sigma}^{-1}(y), \hat{u})$. По теореме 1 задача Коши (2.7) равносильна соответствующей системе из n интегральных уравнений вида (2.2). Легко заметить, что в общем случае все они попарно различны. Таким образом, задачу Коши (2.1) можно привести к системе интегральных уравнений $(n-1)!$ способами.

Например, в случае $n = 3$ имеем две системы. Первая из них представлена формулами

$$u(x) = u^0 + \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1[s_1, x_2, x_3, u(*)]ds_1 + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} f_2[x_1^0, s_2, x_3, u(*)]ds_2 + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} f_3[x_1^0, x_2^0, s_3, u(*)]ds_3,$$

$$u(x) = u^0 + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} f_2[x_1, s_2, x_3, u(*)]ds_2 + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} f_3[x_1, x_2^0, s_3, u(*)]ds_3 + \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1[s_1, x_2^0, x_3^0, u(*)]ds_1,$$

$$u(x) = u^0 + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} f_3[x_1, x_2, s_3, u(*)]ds_3 + \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1[s_1, x_2, x_3^0, u(*)]ds_1 + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} f_2[x_1^0, s_2, x_3^0, u(*)]ds_2,$$

а вторая имеет вид

$$u(x) = u^0 + \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1[s_1, x_2, x_3, u(*)]ds_1 + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} f_3[x_1^0, x_2, s_3, u(*)]ds_3 + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} f_2[x_1^0, s_2, x_3^0, u(*)]ds_2,$$

$$u(x) = u^0 + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} f_3[x_1, x_2, s_3, u(*)]ds_3 + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} f_2[x_1, s_2, x_3^0, u(*)]ds_2 + \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1[s_1, x_2^0, x_3^0, u(*)]ds_1,$$

$$u(x) = u^0 + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} f_2[x_1, s_2, x_3, u(*)]ds_2 + \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1[s_1, x_2^0, x_3, u(*)]ds_1 + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} f_3[x_1^0, x_2^0, s_3, u(*)]ds_3$$

(Аргументы функции $u(*)$ те же, что и первые три аргумента функции f_k в соответствующих выражениях под интегралом).

3. Ослабленное условие интегрируемости

Как было отмечено выше, формулировка условия интегрируемости Фробениуса в виде $\omega \wedge d\omega = 0$ без предположения дифференцируемости функций f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, является малосодержательной. Чтобы ослабить условие интегрируемости, прежде всего мы должны представить критерий интегрируемости в удобной форме.

Пусть функция f непрерывно дифференцируемая. Тогда следующие предложения равносильны:

a) система (1.3) интегрируема в области D;

b) имеют место тождества (1.4) в области D;

c) система интегральных уравнений (2.2) с одной неизвестной функцией $u(x)$ имеет решение для каждой точки $(x^0, u^0) \in D$.

Равносильность a) и b) есть критерий Фробениуса, а равносильность a) и c) непосредственно вытекает из теоремы 1.

В отличие от критерия Фробениуса условие c) не требует гладкости (даже липщицевости) функции f, так как в доказательстве теоремы 1 использована только непрерывность f, поэтому равносильность a) и c) сохраняет силу для непрерывных систем (1.3) .

В дальнейшем утверждение c) будем называть *условием совместимости* системы Пфаффа.

С л е д с т в и е теоремы 1. *Система* (1.3) *интегрируема в области* D *тогда и только тогда, когда выполнено ослабленное условие совместимости.*

Система (2.1) из n уравнений с одной неизвестной функцией $u(x)$ является переопределенной и добавление условия Фробениуса, состоящего из $\dfrac{n(n-1)}{2}$ соотношений, превращает ее в определеную систему. Условие совместимости, состоящее из $(n-1)$ равенства, также выступает в этой роли.

Отметим, что в отличие от условия Фробениуса условие c) не является явным, но может быть формулировано индивидуально — для отдельной задачи Коши (2.1). Ясно, что если функция f непрерывно дифференцируемая в области D, то ослабленное условие равносильно критерию Фробениуса (1.4) . В этом случае как существование, так и единственность решения задачи Коши для системы (1.3) имеют место автоматически. В случае условия совместимости оба свойства раздваиваются. Например, решение может не существовать по двум причинам: либо оттого, что одно из интегральных уравнений (2.2) не имеет решения, либо потому что каждое из уравнений (2.2) имеет решение, но у переопределенной системы (2.2) отсутствует решение (т. е. система (2.2) несовместна). С другой стороны, для каждого из уравнений (2.2) может найтись более одного решения, тем не менее решение системы (2.2) при этом окажется единственным. В связи со сказанным обсудим вопросы существования и единственности решения отдельно взятого уравнения системы (2.2). В силу равноправности таких уравнений займемся существованием решения первого из них. Это может быть установлено любым из известных способов [33], используемых для доказательства существования решения интегрального уравнения, равносильного задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, например, с помощью теоремы Шаудера [34].

4. Метод ломаных Эйлера

Насколько нам известно, вопрос о приближенном решении уравнения Пфаффа до сих пор не затрагивался. В силу условия совместимости достаточно построить приближенное решение одного из интегральных уравнений (2.2). Здесь изложим аналог метода ломаных Эйлера [35] для $k = 1$, т. е. для уравнения

$$u(x) = u_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \int_{x_{1+l}^0}^{x_{1+l}} f_{1+l}[x|^l s_{1+l}, u(x|^l s_{1+l})] ds_{1+l}. \tag{4.1}$$

Положим

$$\Pi = \left\{ (x,u) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \, \|x\| \le a, \;\; \left|u - u^0\right| \le b \right\},$$

$$M = \max_{(x,u)\in\Pi} |f(x,u)|, \quad d = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \;\; \text{где} \;\; \|x\| = \max_K |x_k|;$$

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| \left|x_k - x_k^0\right| \le d, k = 1,2,\ldots,n \right\}, \quad K^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| x_k^0 \le x_k \le x_k^0 + d, k = 1,2,\ldots,d \right\}.$$

Уравнение (4.1) будем рассматривать в пределах параллелепипеда Π. Зафиксировав целое положительное число N, построим ломаную $\upsilon_N(x)$ в кубе K. Построение начнем с ортанта K^+. С этой целью разделим K^+ на N^n клеток, которые пронумеруем посредством мультииндекса $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_N)$, где $0 \le i_k \le n-1$, $k = 1,2,\ldots,N$. Совокупность всех мультииндексов обозначим через I (при фиксированном N). Будем пользоваться также обозначениями $\mathbf{0} = \{0,0,\ldots,0\}$, $\mathbf{1} = \{1,1,\ldots,1\}$. Затем построим сетку в K^+ с узлами $x^{\mathbf{i}} = x^0 + \boldsymbol{i}h$, $\mathbf{i} \in I$. Каждый мультииндекс $\mathbf{i} \in I$ определяет кубик $K_{\mathbf{i}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| x^{\mathbf{i}} \le x < x^{\mathbf{i}+1} \right\}$, где неравенство $x^{\mathbf{i}} \le x < x^{\mathbf{i}+1}$ понимается покоординатно. Кроме того, если $i_k + 1 = N$, строгое неравенство $x_k < x_k^{i_k+1}$ следует заменить на нестрогое $x_k \le x_k^N$ для соответствующего k.

Приближение $\upsilon_N(x)$ построим методом телевизионной башни. Для $x \in K_0$ положим $\upsilon_N(x) \equiv u^0$. Предполагая $\upsilon_N(x)$ уже построенным на $K_{(i_1,0,\ldots,0)}$, $i_1 < N$, уточним его для $x \in K_{(i_1+1,0,\ldots,0)}$ формулой

$$\upsilon_N(x) = u^0 + \int_{x_1^0+h}^{x_1} f_1[s_1 - h, x_2, \ldots, x_n, \upsilon_N(s_1 - h, x_2, \ldots, x_n)] ds_1$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} \int_{x_k^0}^{x_k} f_{1+l}[x|^l s_{1+l}, u(x|^l s_{1+l})] ds_{1+l}$$

Тем самым $\upsilon_N(x)$ определяется в полосе ("в тени башни на земле") $x_1^0 \le x_1 \le x_1^0 + d$, $x_k^0 \le x_k < x_k^0 + h$, $k = 2,3,\ldots,n$.

Теперь продолжим $\upsilon_N(x)$ на полосу ("заметаемую тенью башни на земле") $x_j^0 \le x_j < x_j^0 + d$ для $j = 1,2$ и $x_j^0 \le x_j < x_j^0 + h$ для $j = 3,4,\ldots,n$ рекуррентной формулой

$$\upsilon_N(x) = \upsilon_N(x_1, x_2, x_3^0, \ldots, x_n^0) + \int_{x_1^0+h}^{x_1} f_1[x_1|^0 s_1, \upsilon_N(x_1|^0 s_1)] ds_1$$

$$+\int\limits_{x_2^0+h}^{x_2} f_2[x_2|^1 s_2 - h, \upsilon_N(x_2|^1 s_2 - h)]ds_2$$

$$+\sum_{l=2}^{n}\int\limits_{x_{l+1}^0}^{x_{l+1}} f_{l+1}[x_{l+1}|^l s_{l+1} - h, \upsilon_N(x_{l+1}|^l s_{l+1} - h)]ds_{l+1}.$$

Этот процесс продолжим аналогичным образом для полос следующих размерностей. На последнем шаге функция $\upsilon_N(x)$ из полосы, определяемой условием $x_k^0 \le x_k < x_k^0 + d$ для $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ и $x_n^0 \le x_n < x_n^0 + h$, продолжается на ортант K^+ формулой

$$\upsilon_N(x) = \upsilon_N(x_n|^{n-1}x_n^0) + \sum_{l=0}^{n-2}\int\limits_{x_{l+1}^0}^{x_{l+1}} f_{l+1}[x_n|^{n-1}s_n - h, \upsilon_N(x_n|^{n-1}s_n - h)]ds_n. \qquad (4.2)$$

Теперь опишем схему продолжения $\upsilon_N(x)$ на весь куб K. Пусть $\Delta = \{-1,\ +1\}$, $\sigma \in \Delta^n$. Каждый элемент σ определяет ортант K^σ, состоящий из точек $x \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющих условиям $x_k^0 \le x_k < x_k^0 + d$, если $\sigma_k = 1$, и $x_k^0 - d \le x_k \le x_k^0$, если $\sigma_k = -1$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

В частности, если $\sigma = \mathbf{1}$, то $K^\sigma = K^+$. Очевидно, $K = \bigcup_{\sigma\in\Delta^n} K^\sigma$. Для определения $\upsilon_N(x)$ на ортанте K^σ достаточно в формуле (4.2) аргумент $x_1|^0 s_1 - h$ заменить на $x_1|^0 s_1 - \sigma_1 h$, а аргумент $x_2|^1 s_2 - h$ заменить на $x_2|^1 s_2 - \sigma_2 h$ и т. д. На последнем шаге аргумент $x_n|^{n-1}s_n - h$ нужно заменить на $x_n|^{n-1}s_n - \sigma_n h$.

Аналогично со случаем $n = 1$ проверяются оценки $|\upsilon_N(x) - u_0| \le b$ и $|\upsilon_N(x) - \upsilon_N(x')| \le C\,|x - x'|$. Поэтому по теореме Арцелы — Асколи последовательность $\{\upsilon_N(x)\}$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность $\upsilon_{N_m}(x)$, предел $\tilde{\upsilon}(x)$ которой является искомым решением. Следовательно, имеет место

Теорема 2. *Интегральное уравнение* (4.1) *имеет решение, определенное в кубе* K. □

Если при этом функция f удовлетворяет условию Липшица, то имеет место оценка

$$|\upsilon_N(x) - \tilde{\upsilon}(x)| \le C_f(e^{Ld} - 1)h,$$

где C_f — постоянная, зависящая от f, L — константа Липшица функции f.

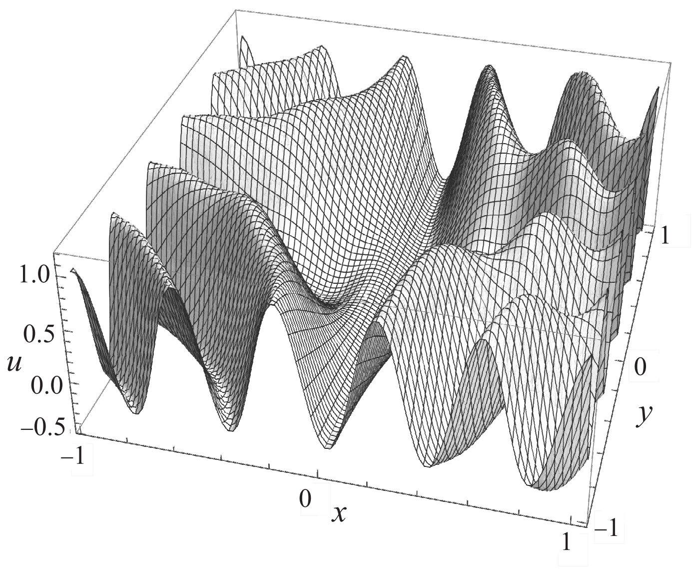

Рис. 2.

На рис. 2 изображена часть графика приближенного решения задачи Коши $u(-1,\,-1)=1$ для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\Big[\frac{u^2}{50}+10\sin(5\pi xy)\Big],\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x\Big[\frac{u^2}{50}+10\sin(5\pi xy)\Big],$$

соответствующая квадранту $-1\le x\le 1, -1\le y\le 1$. Преобразование задачи Коши (2.1) к системе (4.1) позволяет также доказать существование непродолжаемых решений. В случае $n=1$ отрезок определения решения задачи Коши продолжается лишь в двух направлениях, которые являются равноправными, что позволяет изучать вопрос в одном из этих направлений. В случае $n>1$ приходится привлечь лемму Цорна. Пусть U — семейство всех пар $(u(\cdot),\Phi)$, где $u(\cdot)$ решение задачи Коши (2.1), определенное в открытой области Φ. Семейство U не пусто, так как содержит построенную выше пару $(\tilde{v}(\cdot),\mathrm{K})$.

Семейство U — это частично упорядоченное множество: если $\Phi_1\subset\Phi_2$ и сужение $u_2(\cdot)$ на Φ_1 совпадает с $u_1(\cdot)$, то будем считать $(u_1(\cdot),\Phi_1)\prec(u_2(\cdot),\Phi_2)$. Это отношение является частичном порядком. При этом каждая цепь $V\subset U$ имеет наименьшую верхнюю грань $(\bar{u}(\cdot),\bar{\Delta})$, у которой $\bar{\Delta}=\bigcup_{(u,\Phi)\in V}\Phi$, а решение $\bar{u}(\cdot)$ определяется по следующему правилу. Пусть $x\in\bar{\Delta}$, так что $x\in\tilde{\Phi}$ для некоторой пары $(\tilde{u}(\cdot),\tilde{\Phi})$. Тогда $\bar{u}(x)=\tilde{u}(x)$ для $x\in\tilde{\Delta}$. Корректность определения $\bar{u}(\cdot)$ очевидна. Таким образом, применима лемма Цорна: семейство U имеет максимальные элементы, являющиеся непродолжаемыми решениями задачи Коши (2.1).

5. Единственность решения задачи Коши

Задача о единственности решения задачи Коши для уравнения Пфаффа хорошо изучена (см. статью [36] и список литературы к ней). В частности, теорема Осгуда и ее усиление легко переносятся на случай задачи (2.1). Здесь приведем аналог теоремы Нагумо [37], который не был затронут в [12].

Теорема 3. *Пусть D — выпуклая окрестность точки (x^0,u^0) и для любых $(x,\nu),(x,w)\in D$, $\nu\ne w$, имеет место неравенство*

$$\big|(x-x^0)\cdot[f(x,\nu)-f(x,w)]\big|<|\nu-w|\,.$$

Тогда задача Коши (2.1) имеет единственное решение (т. е. любые два решения совпадают в некоторой окрестности x^0; $x\cdot y$ обозначает скалярное произведение).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что задача (2.1) имеет два решения $\nu(x)$ и $w(x)$, определенные в некоторой выпуклой области $\Psi\subset\mathbb{R}^n$, начальные значения которых совпадают: $\nu(x^0)=w(x^0)$, но при этом существует точка $x^*\in\Psi$, что $\nu(x^*)\ne w(x^*)$. Положим $\tilde{x}(t)=x^0+t(x^*-x^0)$, $0\le t\le 1$, и $\tilde{u}(t)=u(\tilde{x}(t))$.

Тогда

$$\frac{d\tilde{u}(t)}{dt}=F(t,\tilde{u}(t)),$$

где $F(t,\tilde{u})=(x^*-x^0)\cdot f[\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)]$. Очевидно, $\tilde{u}(0)=u(x^0)=u^0$. Кроме того,

$$\frac{|F(t,\nu)-F(t,w)|}{|\nu-w|}=\frac{\big|[f(\tilde{x},\nu)-f(\tilde{x},w)]\cdot(\tilde{x}-x^0)\big|}{|\nu-w|}<1.$$

Следовательно, для задачи Коши (2.1) выполнено условие теоремы Нагумо, так что $\nu(\tilde{x}(t))=w(\tilde{x}(t))$, $t\in[0,1]$. В частности, $\nu(x^*)=w(x^*)$, что противоречит предположению. □

Благодарности. Авторы выражают признательность О. С. Ахмедову за полезное обсуждение, а также рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cartan É.** Sur centaines expressions differentielles et le probleme de Pfaff. // Ann. Sci. deÉ, N.S. 1899. Vol. 16, no. 3. P. 239–332.
2. **Han C.K.** Pfaffian systems of Frobenius type and solvability of generic overdetermined PDE systems // Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations / eds. M. Eastwood, W. Miller. P. 421–429. (The IMA Volumes Math. Appl.; vol. 144.) doi: 10.1007/978-0-387-73831-4_21 .
3. **Jouanolou J.P.** Equations de Pfaff algebriques. Berlin: Springer, 1979. 255 p. (Lecture Notes in Math.; vol. 708.) doi: 10.1007/BFb0063393 .
4. **Howard R.** Methods of thermodynamics. NY: Blaisdell Publ. Comp., 1965. 233 p. ISBN: 0486694453 .
5. **Годбийон К.** Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188 с.
6. **Рашевский П.К.** Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.; Ленинград: Гостехиздат, 1947. 354 с.
7. **Шутц Б.** Геометрические методы математической физики. М.: Мир, 1984. 304 с.
8. **Картан А.** Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.
9. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир. 1970. 720 с.
10. **Тамура И.** Теория слоений. М.: Мир, 1979. 320 с.
11. **Bedford E., Kalka M.** Foliations and complex Monge–Ampere equations // Comm. On Pure and Appl. Math. 1991. Vol. 30. P. 543–571. doi: 10.1002/cpa.3160300503 .
12. **Luzatto S., Türeli S., War K.** A Frobenius theorem for corank-1 continuous distributions in dimensions two and three. arXiv: 1411.5896v5 [math.DG] 11 Apr 2016. 29 p.
13. **Popescu P., Popescu M.** Some aspects concerning the dynamics given by Pfaff forms // Physics AUC. 2011. Vol. 21. P. 195–202.
14. **Hakopian H.A., Tonoyan M.G.** Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems // New York J. Math. 2004. Vol. 10. P. 89–116.
15. **Василевич Н.Д., Прохорович Т.Н.** Линейная система Пфаффа трех уравнений на CP^m // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 848–849.
16. **Brunella M., Gustavo M.L.** Bounding the degree of solutions to Pfaff equations // Publ. Mat. 2000. Vol. 44, no. 2. P. 593–604. doi: 10.5565/PUBLMAT_44200_10 .
17. **Cerveau D., Lins-Neto A.** Holomorphic foliations in $CP(2)$ having an invariant algebraic curve // Ann. Inst. Fourier. 1991. Vol. 41, no. 5. P. 883–903. doi: 10.5802/aif.1278 .
18. **Coutinho S.C.** A constructive proof of the density of algebraic Pfaff equations without algebraic solutions // Ann. Inst. Fourier. 2007. Vol. 57, no. 5. P. 1611–1621. doi: 10.5802/aif.2308 .
19. **Mendes L.G.** Bounding the degree of solutions to Pfaff equations // Publ. Mat. 2000. Vol. 44, no. 2. P. 593–604. doi: 10.5565/PUBLMAT_44200_10 .
20. **Źoladek H.** On algebraic solutions of algebraic Pfaff equations // Studia Math. 1995. Vol. 114, no. 2. P. 117–126. doi: 10.4064/sm-114-2-117-126 .
21. **Изобов Н.А.** О существовании линейных систем Пфаффа с множеством нижних характеристических векторов положительной плоской меры // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 12. С. 1623–1630.
22. **Изобов Н.А., Платонов А.С.** Построение линейного уравнения Пфаффа с произвольно заданными характеристическим и нижним характеристическим множествами // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 12. С. 1596–1603.
23. **Спичекова Н. В.** О поведении интегральных поверхностей одного уравнения Пфаффа, имеющего незамкнутую особую кривую // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1429–1432.
24. **Лефшец С.** Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Иностранная литература, 1961. 388 с.
25. **Azamov A., Suvsanov Sh., Tilavov A.** Studing of behavior at infinity of vector fields on Poincare's sphere: revisited // Qualitative theory of dynamical systems. 2016. Vol. 15, no. 1. P. 211–220. doi: 10.1007/s12346-015-0176-6 .
26. **Dryuma V.** On geometrical properties of the spaces defined by the Pfaff equations // Buletinul Academiei de stiiente. A Republicii Moldova. Matemetica Number. 2005. Vol. 47. no. 1. P. 69–84.
27. **Musen P.** On the application of Pfaff's method in the theory of variation of astronomical constants: NASA Technical Note D-2301. Greenbelt, MD: Goddard Space Flight Center, 1964.
28. **Mardare S.** On Pfaff systems with L^p coefficients in dimension two // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 2005. No. 340. P. 879–884. doi: 10.1016/j.crma.2005.05.013 .

29. **Mardare S.** On Pfaff systems with L^p coefficients and their applications in differential geometry // J. Math. Pures. Appl. 2005. Vol. 84, no. 12. P. 1659–1692. doi: 10.1016/j.matpur.2005.08.002 .
30. **Azamov A.A., Begaliyev A.O.** Existence and uniqueness of the solution of a Cauchy problem for the Pfaff equation with continuous coefficients // Uzb. Math. J. 2019. No. 2. P. 18–26. doi: 10.29229/uzmj.2019-2-2 .
31. **Гайшун И.В.** Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2004. 272 с.
32. **Siu Y.T.** Partial differential equations with compatibility condition. URL: https://www.coursehero.com/ file/8864495/Lecture-notes-1/ .
33. **Арутюнов А.В.** Лекции по выпуклому и многозначному анализу М.: Физматлит, 2014. 184 с.
34. **Edwards R.E.** Functional analysis: Theory and applications. NY: Holt, Rhinehart and Winston, 1965. 783 p. ISBN: 0030505356 .
35. **Коддингтон Э.А., Левинсон Н.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений М.: Иностранная литература, 1958. 475 с.
36. **Cid J.Á** On uniqueness criteria for systems of ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 281, no. 1. P. 264–275. doi: 10.1016/S0022-247X(03)00096-9 .
37. **Mejstrik T.** Some remarks on Nagumo's theorem. // Czechoslovak Math. J. 2012. Vol. 62, no. 1. P. 235–242. doi: 10.1007/s10587-012-0008-7 .

Поступила 27.05.2021
После доработки 19.06.2021
Принята к публикации 12.07.2021

Азамов Абдулла Азамович
академик АН РУз, профессор
зав. лабораторией
Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз
г. Ташкент
e-mail: abdulla.azamov@gmail.com

Бегалиев Азиз Олимназарович
младший науч. сотрудник
Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз
г. Ташкент
e-mail: azizuzmu@mail.ru

REFERENCES

1. Cartan É. Sur centaines expressions differentielles et le probleme de Pfaff. *Ann. Sci. de lÉ.N.S.*, 1899, vol. 16, pp. 239–332.
2. Han C.K. Pfaffian systems of Frobenius type and solvability of generic overdetermined PDE systems. In: Eastwood M., Miller W. (eds), *Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations*, Ser. The IMA Volumes Math. Appl., vol. 144, pp. 421–429. doi: 10.1007/978-0-387-73831-4_21 .
3. Jouanolou J.P. *Equations de Pfaff algebriques.* Ser. Lecture Notes Math., vol. 708. Berlin: Springer, 1979, 255 p. doi: 10.1007/BFb0063393 .
4. Howard R. *Methods of thermodynamics.* NY: Blaisdell Publ. Comp., 1965, 233 p. ISBN: 0486694453 .
5. Godbillon C. *Géométrie différentielle et mécanique analytique.* Paris: Hermann, 2018, 184 p. ISBN: 978-2705656584 . Translated to Russian under the title *Differentsial'naya Geometriya i Analiticheskaya Mekhanika*, Moscow: Mir Publ., 1973, 188 p.
6. Rashevskii P.K. *Geometricheskaya teoriya uravnenii s chastnymi proizvodnymi* [Geometric theory of equations with partial derivatives]. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1947, 354 p.
7. Schutz B.F. *Geometrical methods of mathematical physics.* Cambridge; NY: Cambridge Univ. Press, 1980, 250 p. ISBN: 0521232716 . Translated to Russian under the title *Geometricheskie metody matematicheskoi fiziki*, Moscow: Mir Publ., 1984, 304 p.

8. Cartan H. *Formes differentielles.* Paris: Hermann, 1967, 186 p. ISBN: 978-2705667177. Cartan H. *Calcul differentiel.* Paris: Hermann, 1967, 178 p. Translated to Russian under the title *Differentsial'noe ischislenie. Differentsial'nye formy.* Moscow: Mir Publ., 1971, 392 p.
9. Hartman P. *Ordinary differential equations.* Boston: Birkhäuser, 1982, 612 p. ISBN: 3764330686. Translated to Russian under the title *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya.* Moscow: Mir Publ., 1970, 720 p.
10. Tamura I. *Topologiya sloenii* [Topology of foliations]. Moscow: Mir Publ., 1979, 320 p.
11. Bedford E., Kalka M. Foliations and complex Monge–Ampere equations. *Comm. On Pure and Appl. Math.*, 1991, vol. 30, pp. 543–571. doi: 10.1002/cpa.3160300503.
12. Luzatto S., Türeli S., War K. A Frobenius theorem for corank-1 continuous distributions in dimensions two and three. Available on *arXiv*: 1411.5896v5 [math.DG] 11 Apr 2016. 29 p.
13. Popescu P., Popescu M. Some aspects concerning the dynamics given by Pfaff forms. *Physics AUC*, 2011, vol. 21, pp. 195–202.
14. Hakopian H.A., Tonoyan M.G. Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems. *New York J. Math.*, 2004, vol. 10, pp. 89–116.
15. Vasilevich N.D., Prokhorovich T.N. A linear Pfaff system of three equations on CP^m. *Differ. Equ.*, 2003, vol. 39, no. 6, pp. 896–898. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000008417.90581.a4.
16. Brunella M., Gustavo M.L. Bounding the degree of solutions to Pfaff equations. *Publ. Mat., Barc.*, 2000, vol. 44, no. 2, pp. 593–604. doi: 10.5565/PUBLMAT_44200_10.
17. Cerveau D., Lins-Neto A. Holomorphic foliations in $CP(2)$ having an invariant algebraic curve. *Ann. Inst. Fourier*, 1991, vol. 41, no. 4, pp. 883–903. doi: 10.5802/aif.1278.
18. Coutinho S. A constructive proof of the density of algebraic Pfaff equations without algebraic solutions. *Ann. Inst. Fourier*, 2007, vol. 57, no. 5, pp. 1611–1621. doi: 10.5802/aif.2308.
19. Mendes L.G. Bounding the degree of solutions to Pfaff equations. *Publ. Mat., Barc.*, 2000, vol. 44, no. 2, pp. 593–604. doi: 10.5565/PUBLMAT_44200_10.
20. Źoladek H. On algebraic solutions of algebraic Pfaff equations. *Studia Math.*, 1995, vol. 114, no. 2, pp. 117–126. doi: 10.4064/sm-114-2-117-126.
21. Izobov N.A. On the existence of linear Pfaffian systems whose set of lower characteristic vectors has a positive plane measure. *Differ. Equ.*, 1997, vol. 33, no. 12, pp. 1626–1632.
22. Izobov N.A., Platonov A.S. Construction of a linear Pfaff equation with arbitrarily given characteristics and lower characteristic sets. *Differ. Equ.*, 1998, vol. 34, no. 12, pp. 1600–1607.
23. Spichekova N.V. On the behavior of integral surfaces of a Pfaff equation with a nonclosed singular curve. *Differ. Equ.*, 2005, vol. 41, no. 10, pp. 1509–1513. doi: 10.1007/s10625-005-0308-x.
24. Lefschetz S. *Differential equations: geometric theory.* N Y: Interscience Publishers, 1963, 390 p. Translated to Russian under the title *Geometricheskaya teoriya differentsial'nykh uravnenii.* Moscow: Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1961, 388 p.
25. Azamov A., Suvanov Sh., Tilavov A. Studying of behavior at infinity of vector fields on Poincare's sphere: revisited. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 2016, vol. 15, no. 1, pp. 211–220. doi: 10.1007/s12346-015-0176-6.
26. Dryuma V. On geometrical properties of the spaces defined by the Pfaff equations. *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat.*, 2005, vol. 2005, no. 1(47), pp. 69–84.
27. Musen P. *On the application of Pfaff's method in the theory of variation of astronomical constants*, NASA Technical Note D-2301, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD. 1964.
28. Mardare S. On Pfaff systems with L^p coefficients in dimension two. *Comptes Rendus Mathematique*, 2005, vol. 340, no. 12, pp. 879–884. doi: 10.1016/j.crma.2005.05.013.
29. Mardare S. On Pfaff systems with L^p coefficients and their applications in differential geometry. *J. Math. Pures Appl.*, 2005, vol. 84, no. 12, pp. 1659–1692. doi: 10.1016/j.matpur.2005.08.002.
30. Azamov A.A., Begaliyev A.O. Existence and uniqueness of the solution of a Cauchy problem for the Pfaff equation with continuous coefficients. *Uzb. Math. Journal*, 2019, no. 2, pp. 18–26. doi: 10.29229/uzmj.2019-2-2.
31. Gaishun I.V. *Vpolne razreshimye mnogomernye differentsial'nye uravneniya* [Completely Solvable Multidimensional Differential Equations]. M.: Editorial URSS, 2004. 272 p.
32. Siu Y.T. *Partial differential equations with compatibility condition.* Available on https://www.coursehero.com/file/8864495/Lecture-notes-1/+.
33. Arutyunov A.V. *Lektsii po vypuklomu i mnogoznachnomu analizu* [Lectures on convex and set-valued analysis]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2014, 184 p. ISBN: 978-5-9221-1558-2.

34. Edwards R.E. *Functional analysis: theory and applications.* NY: Holt, Rhinehart and Winston, 1965, 783 p. ISBN: 0030505356 .
35. Coddington E., Levinson N. *Theory of ordinary differential equations.* NY: McGraw-Hill, 1955, 429 p. ISBN: 0070115427 . Translated to Russian under the title *Teoriya obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii.* Moscow: Inostrannaya Literatura Publ., 1958, 475 p.
36. Cid J.Á On uniqueness criteria for systems of ordinary differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, vol. 281, no. 1, pp. 264–275. doi: 10.1016/S0022-247X(03)00096-9 .
37. Mejstrik T. Some remarks on Nagumo's theorem. *Czech. Math. J.*, 2012, vol. 62, no. 1, pp. 235–242. doi: 10.1007/s10587-012-0008-7 .

Received May 27, 2021
Revised June 19, 2021
Accepted July 12, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan (project no. OT-F4-84).

Abdulla Azamov, Academician of AS RUz, Prof., V.I.Romanovskii Institute of Mathematics of the Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, 100174 Uzbekistan, e-mail: abdulla.azamov@gmail.com .

Aziz Begaliyev, PhD student, V.I.Romanovskii Institute of Mathematics of the Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, 100174 Uzbekistan, e-mail: azizuzmu@mail.ru .

Cite this article as: A. A. Azamov, A. O. Begaliev. An existence theorem and an approximate solution method for the Pfaff equation with continuous coefficients, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 12–24 .