

УДК 517.977, 514.747

**ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ  
В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ  
С НЕВЫПУКЛЫМ ЦЕЛЕВЫМ МНОЖЕСТВОМ<sup>1</sup>****П. Д. Лебедев, А. А. Успенский**

Рассмотрена задача управления по быстродействию с круговой вектограммой скоростей. Для одного класса невыпуклых плоских целевых множеств, у которых часть границы совпадает с отрезком прямой, выделены условия, позволяющие строить ветви сингулярных (рассеивающих) кривых в аналитической форме. Получены в явном виде формулы для псевдовершин — особых точек границы целевого множества, порождающих ветви сингулярного множества. Выявлена аналитическая связь между концевыми точками различных оптимальных траекторий, имеющих общие начальные условия на сингулярном множестве и попадающих на целевое множество в окрестности псевдовершины. Найдены формулы для крайних точек ветвей сингулярного множества. Развиваемые подходы к точному построению негладких решений динамических задач управления проиллюстрированы на конкретных примерах.

Ключевые слова: рассеивающая кривая, псевдовершина, отображение, кривизна.

**P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii. On the analytical construction of solutions for one class of time-optimal control problems with nonconvex target set.**

A time-optimal control problem with a circular velocity vectogram is considered. For one class of nonconvex planar target sets such that a part of their boundary coincides with a line segment, conditions are found that allow one to construct branches of singular (scattering) curves in analytical form. Explicit formulas are obtained for pseudovertrices, i.e., singular points of the boundary of the target set generating branches of the singular set. An analytical relation is revealed between the endpoints of different optimal trajectories that have the same initial conditions on the singular set and hit the target set in a neighborhood of a pseudoververtex. Formulas are found for the extreme points of branches of the singular set. The developed approaches to the exact construction of nonsmooth solutions of dynamic control problems are illustrated with examples.

Keywords: scattering curve, pseudoververtex, mapping, curvature.

MSC: 65P30, 49L25, 58K60, 35A18

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-128-140

**Введение**

В задаче управления по быстродействию с круговой вектограммой скоростей и замкнутым невыпуклым целевым множеством у функции оптимального результата возникают негладкие особенности вне зависимости от дифференциальных свойств границы целевого множества. Существование сингулярности решения задачи обусловлено наличием на границе цели особых точек — псевдовершин. Указанные точки порождают множества симметрии — биссектрисы. С точки зрения теории конфликтного управления биссектрисы суть рассеивающие кривые: из точек этих кривых исходит не одна, как в регулярном случае, а две или более оптимальные траектории, направленные в разные стороны от сингулярной кривой. В общем случае построение биссектрис осуществляется численными методами. Эти методы основаны на выделении псевдовершин целевого множества с последующим построением ветвей биссектрисы путем решения алгебраических или обыкновенных дифференциальных уравнений. Накопленный опыт построения решений таких задач позволяет выделить условия, при которых сингулярное множество может быть описано аналитически. В настоящей работе разобран случай,

<sup>1</sup>Исследование П. Д. Лебедева поддержано грантом РФФИ (проект №19-11-00105).

когда граница целевого множества содержит отрезки прямых. Получены аналитические формулы отображений, связывающих точки целевого множества. Речь идет о точках, которые, с одной стороны, являются финальными точками оптимальных траекторий с общими начальными условиями, с другой стороны, находятся в окрестности псевдовершины. Также найден и предъявлен пример множества с криволинейной границей, т.е. с границей, не имеющей отрезков прямых, для которого тем не менее удастся построить указанные отображения в явной аналитической форме.

Отметим, что специфика рассматриваемой динамической задачи позволяет свести изучение сингулярного множества ее решения к исследованию (главным образом геометрическими методами) свойств метрической проекции на замкнутое множество евклидова пространства. При этом в работе подробно рассмотрен случай, когда оператор проецирования имеет на целевом множестве не более двух значений.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается задача управления по быстродействию на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с замкнутым невыпуклым целевым множеством  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Задача заключается в приведении решения системы с текущими координатами  $\mathbf{x} = (x, y)$  на целевое множество  $M$  за кратчайшее время. Динамика системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \tag{1.1}$$

определяется векторным управлением  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , которое может принимать значения  $\mathbf{v} \in O(\mathbf{0}, 1)$ , где  $O(\mathbf{c}, r) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \leq r\}$  — круг радиуса  $r$  с центром в точке  $\mathbf{c}$ ;  $\mathbf{0} \triangleq (0, 0)$  — начало координат.

Оптимальным управлением  $\mathbf{v}$  в настоящей задаче при  $\mathbf{x} \notin M$  является вектор длины 1, сонаправленный с вектором, исходящим из точки  $\mathbf{x}$  до ближайшей к ней в евклидовой метрике точки  $\mathbf{y}$  границы множества  $M$ . Функция оптимального результата  $u(\mathbf{x}) = u(x, y)$  равна евклидову расстоянию  $\rho(\mathbf{x}, M) \triangleq \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|: \mathbf{y} \in M\}$  от точки  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  до множества  $M$ .

С задачей быстродействия с динамикой (1.1) и целевым множеством  $M$  связаны дифференциальные уравнения Гамильтона — Якоби

$$\min_{(v_1, v_2) \in O(\mathbf{0}, 1)} \left( v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0 \tag{1.2}$$

и эйконала

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 1. \tag{1.3}$$

Минимаксное решение [1, гл. IV] задачи Дирихле для уравнения (1.2) с краевым условием

$$u|_{\partial M} = 0 \tag{1.4}$$

совпадает с функцией оптимального результата  $u(x, y) = \rho((x, y), M)$  на множестве  $G = \mathbb{R}^2 \setminus M$  (см. [2, теорема 1]). Фундаментальное (обобщенное) решение  $u_k(x, y)$  задачи Дирихле для уравнения (1.3) с краевым условием (1.4) (введенное С.Н. Кружковым [3]) равно той же функции по модулю, но имеет противоположный знак:  $u_k(x, y) = -\rho((x, y), M)$ .

Будем считать, что граница  $\Gamma = \partial M$  целевого множества есть плоская кривая, заданная уравнением

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), t \in \Xi\}. \tag{1.5}$$

Здесь  $\Xi \subseteq \mathbb{R}$  — односвязное множество, а отображение  $\mathbf{x}: \Xi \rightarrow \mathbb{R}^2$  является дважды дифференцируемым всюду на  $\Xi$  за исключением, может быть, конечного числа точек. Заметим, что линии уровня  $\Phi(\tau) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: u(x, y) = \tau\}$  функции  $u(x, y) = \rho((x, y), M)$  при  $\tau > 0$

совпадают с волновыми фронтами [4] при распространения волны от множества  $M$  за время  $\tau$  в случае круговой вектограммы скоростей.

Если целевое множество выпуклое, то функция  $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$  тоже выпуклая и дифференцируемая на  $\mathbb{R}^2 \setminus M$  (см. [5, гл. II, § 8]). Если же множество  $M$  не выпукло, то у  $u(\mathbf{x})$  возникают сингулярные множества, обусловленные наличием более одной оптимальной траектории для системы с динамикой (1.1).

Будем обозначать через  $\Omega_M(\mathbf{y})$  объединение всех точек  $\mathbf{x} \in M$ , ближайших в евклидовой метрике к  $\mathbf{y}$ . Заметим, что данная конструкция играет ключевую роль в доказательстве того, что функция  $u(x, y) = \rho((x, y), M)$  является обобщенным (минимаксным) решением задачи Дирихле для уравнения (1.2) с краевым условием (1.4). Рассмотрим график  $g u(x, y)$  сужения функции  $u(x, y)$  на множество  $\mathbb{R}^2 \setminus M$ . Он представляет из себя поверхность в расширенном пространстве позиций, имеющем три координаты  $x, y, \tau$ . Через каждую его точку  $(x, y, u(x, y)) \in g u(x, y)$  проходит как минимум одна характеристика [1, гл. I, §1.2] уравнения (1.2) — отрезок  $[(x, y, u(x, y)), (x_p, y_p, 0)]$ , где  $(x_p, y_p) \in \Omega_M((x, y))$ .

**О п р е д е л е н и е 1** [6]. Биссектрисой  $L(M)$  замкнутого множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  назовем объединение

$$L(M) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2: \text{card}(\Omega_M(\mathbf{y})) > 1\}$$

всех точек, для которых множество  $\Omega_M(\mathbf{y})$  состоит из двух и более элементов.

Здесь  $\text{card}(\Omega_M(\mathbf{y}))$  означает мощность множества  $\Omega_M(\mathbf{y})$ . Она равна числу элементов, если множество  $\Omega_M(\mathbf{y})$  конечно. Однако возможны случаи, например, когда  $\mathbf{y}$  — центр окружности  $\partial O(\mathbf{x}, r)$ , дуга которой содержится в  $\Gamma$ , и все элементы дуги могут входить в  $\Omega_M(\mathbf{y})$ . Тогда  $\text{card}(\Omega_M(\mathbf{y}))$  — мощность бесконечного множества. Если для двух различных точек  $\mathbf{x}_1 \in \Gamma$ ,  $\mathbf{x}_2 \in \Gamma$  выполняется  $\mathbf{x}_1 \in \Omega_M(\mathbf{y})$  и  $\mathbf{x}_2 \in \Omega_M(\mathbf{y})$ , то будем говорить, что они порождают точку биссектрисы. Согласно классификации Р. Айзекса для задач быстрогодействия и дифференциальных игр биссектриса  $L(M)$  обладает свойством: из каждой ее точки  $\mathbf{y} \in L(M)$  исходит более одной оптимальной траектории — отрезка  $[\mathbf{y}, \mathbf{x}]$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_M(\mathbf{y})$  [7, пример 6.10.1]. Схожие с биссектрисой многообразия изучаются в теории волновых фронтов под названиями “conflict set” [8], “symmetry set” [9] и “medial axe” [10]. Отметим также, что в геометрической оптике фундаментальное решение краевой задачи (1.3), (1.4) является гладким в точках  $\mathbf{y} \in G$ , если  $\text{card}(\Omega_M(\mathbf{y})) = 1$ , и теряет классическое свойство дифференцируемости, когда  $\text{card}(\Omega_M(\mathbf{y})) > 1$  [11]. Другим важным применением множества  $L(M)$  служит его привлечение для вычисления меры невыпуклости множества  $M$  (подробнее см. [12]).

**О п р е д е л е н и е 2.** Будем называть точку  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  псевдовершиной множества  $M$ , а  $\hat{\mathbf{y}}$  — порожденной ею крайней точкой биссектрисы, если существуют последовательность  $\{(\bar{\mathbf{x}}_n, \tilde{\mathbf{x}}_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset M$  пар точек множества  $M$  и последовательность  $\{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(M)$  точек биссектрисы, для которых выполняются условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{\mathbf{x}}_n, \tilde{\mathbf{x}}_n) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}_n = \hat{\mathbf{y}}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \{ \bar{\mathbf{x}}_n, \tilde{\mathbf{x}}_n \} \subseteq \Omega_M(\mathbf{y}_n).$$

Если псевдовершина лежит на гладком участке кривой (1.5), важное значение приобретает отыскание зависимости между значениями параметра  $t$ , которые задают проекции точек биссектрисы. Она позволяет строить гладкие участки сингулярного множества  $L(M)$ . В общем случае  $L(M)$  может содержать точки бифуркации, но их отыскание — уже вторая задача. Она решается путем выделением тех элементов  $\mathbf{y}_i \in L(M)$ , для которых  $\text{card}(\Omega_M(\mathbf{y}_i)) > 2$ . Подробнее особые точки аналогичных биссектрисе множеств в евклидовых пространствах небольшой размерности изучены, например, В.Д. Седых [13; 14].

**О п р е д е л е н и е 3.** Пусть точка  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  является псевдовершиной множества  $M$ . Будем говорить, что непрерывная функция  $t_1 = g(t_2)$ , определенная на некоторой правой полукрестности  $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$  — это правое отображение биссектрисы в окрестности псевдовершин  $\mathbf{x}_0$ , если выполняются условия

$$\forall t_2 \in (t_0, t_0 + \varepsilon) g(t_2) < t_0, \tag{1.6}$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} g(t_2) = t_0, \quad (1.7)$$

$$\forall t_2 \in (t_0, t_0 + \varepsilon) \exists \mathbf{y} \in L(M): \{\mathbf{x}(g(t_2)), \mathbf{x}(t_2)\} \subseteq \Omega_M(\mathbf{y}). \quad (1.8)$$

**О п р е д е л е н и е 4.** Пусть точка  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  — псевдовершина множества  $M$ . Будем говорить, что непрерывная функция  $t_2 = \bar{g}(t_1)$ , определенная на некоторой левой полуокрестности  $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ ,  $\varepsilon > 0$ , является левым отображением биссектрисы в окрестности псевдовершины  $\mathbf{x}_0$ , если выполняются условия

$$\forall t_1 \in (t_0 - \varepsilon, t_0) \bar{g}(t_1) > t_0, \quad (1.9)$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \bar{g}(t_1) = t_0, \quad (1.10)$$

$$\forall t_1 \in (t_0 - \varepsilon, t_0) \exists \mathbf{y} \in L(M): \{\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(\bar{g}(t_1))\} \subseteq \Omega_M(\mathbf{y}). \quad (1.11)$$

В совокупности условия (1.6) и (1.7) означают, что замыкание графика непрерывной функции  $t_1 = g(t_2)$  имеет неподвижную точку; здесь  $g(t_0) \triangleq \lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} g(t_2) = t_0$ . Аналогично условия (1.9) и (1.10) означают, что замыкание графика непрерывной функции  $t_2 = \bar{g}(t_1)$  имеет неподвижную точку; здесь  $\bar{g}(t_0) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \bar{g}(t_1) = t_0$ . Пары таким образом доопределенных функций образует непрерывную перепараметризацию кривой  $\Gamma$  в окрестности псевдовершины:

$$\check{g}(t) = \begin{cases} \bar{g}(t_3), & t_3 \in (t_0 - \varepsilon, t_0), \quad \varepsilon > 0, \\ t_0, & t_3 = t_0, \\ g(t_3), & t_3 \in (t_0, t_0 + \varepsilon^*), \quad \varepsilon^* > 0. \end{cases}$$

Подробнее свойства отображений в геометрии изложены, например в [15, §4, 1°]. Вложения (1.8) и (1.11) показывают, что  $\mathbf{x}(t_1)$  и  $\mathbf{x}(t_2)$  порождают точку биссектрисы. Заметим, что есть псевдовершины, в окрестности которых не определено ни одно из выше приведенных отображений. Это может быть особая точка кривой (1.5), такая, что она является общей проекцией для всех точек одной из ветвей  $L(M)$ , как в [16, пример 4]. С другой стороны, в некоторых точках  $\mathbf{x}_0$  у биссектрисы существуют два различных правых или левых отображения. Подобный случай обуславливается тем, что одной псевдовершине могут соответствовать две различные крайние точки, лежащие на нормали к  $\Gamma$  в  $\mathbf{x}_0$  по разные стороны от  $\mathbf{x}_0$ , как в [6, пример 4.1].

## 2. Взаимосвязь между координатами проекций точек биссектрисы

Исследуем случай, когда кривая (1.5) содержит дугу, представимую как график функции в декартовых координатах.

Рассмотрим наборы из функции  $f(x)$ , точки  $x_0$  и двух чисел  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ , для которых выполнены следующие условия:

A1. Функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_2)$ .

A2. Функция  $f(x)$  дважды дифференцируема на интервалах  $(x_0 - \varepsilon_1, x_0)$  и  $(x_0, x_0 + \varepsilon_2)$ .

A3. График  $f(x)$  не совпадает с дугой окружности ни на каком интервале

$$(x_1, x_2) \subseteq (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_2).$$

Выделим те кривые  $\Gamma$ , которые содержат отрезки прямых линий. Заметим, что гладкая кривая может содержать отрезки прямых только в случае, если они гладко сопрягаются дугами кривых. В качестве параметра в формуле (1.5) в этом случае можно взять абсциссу  $x$  точки  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .

**Предложение.** Пусть граница  $\Gamma$  множества  $M$  совпадает с графиком явно заданной функции  $y = y(x)$ . Если выполнены следующие условия:

- 1) для функции  $y = y(x)$ , точки  $x_0$  и чисел  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$  справедливы соотношения А.1–А.3;
- 2) точка  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y(x_0))$ ,  $x_0 \in X$ , является псевдовершиной множества  $M$ , то существует такое число  $r > 0$ , что для всех пар точек  $(x_1, x_2)$  и  $(x_1^*, x_2^*)$  таких, что

$$\exists \mathbf{y} \in L(M): \{(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2))\} \subseteq \Omega_M(\mathbf{y}), \quad (2.1)$$

$$\exists \mathbf{y}^* \in L(M): \{(x_1^*, y(x_1^*)), (x_2^*, y(x_2^*))\} \subseteq \Omega_M(\mathbf{y}^*), \quad (2.2)$$

$$x_1 \in (x_0 - r, x_0), \quad x_1^* \in (x_0 - r, x_0), \quad (2.3)$$

$$x_2 \in (x_0, x_0 + r), \quad x_2^* \in (x_0, x_0 + r), \quad (2.4)$$

неравенство

$$x_1 < x_1^* \quad (2.5)$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$x_2 > x_2^*. \quad (2.6)$$

**Доказательство.** Обозначим  $\mathbf{x}_i = (x_i, y(x_i))$ ,  $\mathbf{x}_i^* = (x_i^*, y(x_i^*))$ ,  $i = 1, 2$ . Без ограничения общности полагаем, что функция  $y = y(x)$  является линейной в левой полуокрестности  $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ ,  $\varepsilon > 0$ , правая односторонняя кривизна  $k(x_0 + 0) > 0$ . Поскольку кривизна прямой равна нулю, то большая предельная кривизна находится с правой стороны от точки  $x_0$ . Рассмотрим часть биссектрисы  $L^0(M)$ , лежащую в достаточно малой окрестности  $\hat{\mathbf{y}}$ , такой, что  $L^0(M)$  вложено в надграфик функции  $y(x)$ . Поскольку отображение  $\mathbf{y} \mapsto \Omega_M(\mathbf{y})$  полунепрерывно сверху, то найдется число  $r > 0$  такое, что для всех точек  $\mathbf{x}$  с абсциссой  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$  порождаемые ими точки биссектрисы  $\mathbf{y} \in L(M)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_M(\mathbf{y})$  принадлежат  $L^0(M)$ . Допустим, есть точки  $x_1, x_2, x_1^*, x_2^* \in (x_0 - r, x_0 + r)$ , для которых выполняются условия (2.1)–(2.5), но не выполняется (2.6). Значит, отрезок нормали  $\pi_2$  от точки  $\mathbf{x}_i$  до точки  $\mathbf{y}$  пересекается либо с отрезком  $[\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}^*]$ , либо с отрезком  $[\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}^*]$ . Если точка  $\mathbf{x}_2$  находится на графике левее, чем  $\mathbf{x}_2^*$ , то чтобы пересечь нормаль, построенную к  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{x}_1$ , прямая  $\pi_2$  должна проходить через один из данных отрезков. Но два отрезка от точек до их проекции на множество могут пересекаться только либо в начальной точке, либо в конечной. Точки  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*$  по условиям предложения являются попарно различными, следовательно, отрезки пересекаются в точке  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$ . Но в этом случае у точки  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$  есть четыре различные проекции на  $M$  в окрестности псевдовершины  $\mathbf{x}_0$ . Это противоречит условию о том, что в любой достаточно малой окрестности псевдовершины кривая  $\Gamma$  не совпадает с дугой окружности, а значит, у точек  $\mathbf{y} \in L^0(M)$  биссектрисы в достаточно малой окрестности соответствующей  $\mathbf{x}_0$  крайней точки  $\hat{\mathbf{y}}$  выполняется  $\text{card}(\Omega_M(\mathbf{y})) = 2$  (подробнее см. [17]).  $\square$

**Лемма 1.** Пусть множество  $M$  имеет границу, совпадающую с графиком функции  $y = y(x)$ . Если выполнены следующие условия:

- 1) множество проекций  $\Omega_M(\mathbf{y})$  точки биссектрисы  $\mathbf{y}$  включает в себя точки  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y(x_1))$  и  $\mathbf{x}_2 = (x_2, y(x_2))$ ;
- 2)  $x_1 < x_2$ ;
- 3) функция  $y = y(x)$  в окрестности точки  $x = x_1$  совпадает с линейной функцией

$$y = y_0 + a(x - x_0), \quad (2.7)$$

то справедливо равенство

$$x_1 = x_c - \sqrt{\frac{(x_2 - x_c)^2 + (y(x_2) - y_0 - a(x_c - x_0))^2}{1 + a^2}}, \quad (2.8)$$

где

$$x_c = \frac{y_0 - ax_0 + y'(x_2)x_2 - y(x_2)}{y'(x_2) - a}. \quad (2.9)$$

**Доказательство.** Обозначим  $\mathbf{y} = (x^*, y^*)$  — координаты точки биссектрисы, для которой точки  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  входят во множество проекций. По построению  $\mathbf{y}$  лежит на пересечении нормалей к  $\Gamma$  в  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$ . Обозначим  $\mathbf{y}_c$  — точку пересечения касательных к  $\Gamma$  в тех же точках. Касательная в точке  $\mathbf{x}_1$  имеет уравнение (2.7) (будем обозначать ее как  $\gamma_1$ ), а в точке  $\mathbf{x}_2$

$$y - y(x_2) = y'(x_2)(x - x_2)$$

(будем обозначать ее как  $\gamma_2$ ). Подставив в последнее выражение значение ординаты из (2.7), получим равенство  $y_0 + a(x_c - x_0) - y(x_2) = y'(x_2)(x_c - x_2)$  для абсциссы точки  $\mathbf{y}_c$ . Выделив из него в явном виде значение  $x_c$ , можно записать равенство (2.9).

Из условия равенства отрезков, отложенных от точек  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  до точки пересечения нормалей  $\mathbf{y}$  следует, что равную длину имеют и отрезки, отложенные от  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  до точки пересечения касательных  $\mathbf{y}_c$ . Длина первого отрезка, поскольку он лежит на прямой  $\gamma_1$ , определяется по формуле

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_c\| = \frac{|x_1 - x_c|}{\sqrt{a^2 + 1}}. \quad (2.10)$$

Длина второго отрезка (с учетом значения абсциссы точки пересечения нормалей из (2.9) и того факта, что он вложен в прямую  $\gamma_2$ ) вычисляется как

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_c\| = \sqrt{(x_2 - x_c)^2 + (y(x_2) - y_0 - a(x_c - x_0))^2}. \quad (2.11)$$

По условию  $x_2 > x_1$ , тогда можно показать, что выполняется

$$x_c \geq x_1. \quad (2.12)$$

Допустим, что  $x_c < x_1$ . Значит  $\mathbf{y}_c$  лежит в полуплоскости  $\Pi_-$ , ограниченной прямой  $\pi_1$ , ортогональной к  $\gamma_1$ , проходящей через  $\mathbf{x}_1$ , при этом  $\mathbf{x}_2 \notin \Pi_-$ . Следовательно, угол  $\angle(\mathbf{y}_c, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  в треугольнике  $\Delta \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_c \mathbf{x}_2$  при вершине  $\mathbf{x}_1$  больше прямого. Однако поскольку треугольник  $\Delta \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_c \mathbf{x}_2$  равнобедренный с вершиной  $\mathbf{x}_c$ , то для угла при его вершине выполняется оценка  $\angle(\mathbf{y}_c, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < \pi/2$ . Получилось противоречие.

Из условия равенства длин (2.10) и (2.11) и оценки (2.12) (которая дает возможность раскрыть выражение под модулем) можно найти зависимость для абсцисс точек  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_c, \mathbf{x}_2$ :

$$\frac{x_c - x_1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{(x_2 - x_c)^2 + (y(x_2) - y_0 - a(x_c - x_0))^2}.$$

Умножив обе части последнего выражения на  $\sqrt{a^2 + 1}$  (очевидно, что данная величина отлична от нуля при любом действительном  $a$ ) и затем прибавив к ним  $x_1$ , получим равенство (2.8).  $\square$

**Лемма 2.** Пусть множество  $M$  имеет границу, совпадающую с графиком функции  $y = y(x)$ . Если выполнены следующие условия:

- 1) множество проекций  $\Omega_M(\mathbf{y})$  точки биссектрисы  $\mathbf{y}$  включает в себя точки  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y(x_1))$  и  $\mathbf{x}_2 = (x_2, y(x_2))$ ;
- 2)  $x_1 < x_2$ ,
- 3) функция  $y = y(x)$  в окрестности точки  $x = x_2$  совпадает с линейной функцией (2.7), то справедливо равенство

$$x_2 = \bar{x}_c + \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x}_c)^2 + (y(x_1) - y_0 - a(\bar{x}_c - x_0))^2}{1 + a^2}}, \quad (2.13)$$

где

$$\bar{x}_c = \frac{y_0 - ax_0 + y'(x_1)x_1 - y(x_1)}{y'(x_1) - a}. \quad (2.14)$$

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 1 с той только разницей, что точка  $\bar{\mathbf{y}}_c$  пересечения касательных к  $\text{gr } y(x)$  лежит левее точки  $\mathbf{x}_2$ . Поэтому в формуле (2.13) расстояние между точками  $\bar{\mathbf{y}}_c$  и  $\mathbf{x}_1$  прибавляется к абсциссе  $\bar{x}^c$  точки  $\bar{\mathbf{y}}_c$ , вычисляемой по формуле (2.14).  $\square$

**Теорема.** Пусть граница  $\Gamma$  множества  $M$  совпадает с графиком функции  $y = y(x)$ . Если выполнены следующие условия:

- 1) для функции  $y = y(x)$ , точки  $x_0$  и чисел  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$  справедливы соотношения А.1–А.3;
- 2) точка  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y(x_0))$  является псевдовершиной множества  $M$ ;
- 3) в левой полукрестности  $(x_0 - \varepsilon_1, x_0)$  функция  $y(x)$  совпадает с линейной, то для некоторого числа  $\varepsilon > 0$  существует отображение биссектрисы правой полукрестности псевдовершины  $\mathbf{x}_0$ , заданное формулой

$$x_1(x_2) = x_c^*(x_2) - \sqrt{\frac{(x_2 - x_c^*(x_2))^2 + (y(x_2) - y_0 - y'(x_0)(x_c^*(x_2) - x_0))^2}{1 + y'(x_0)^2}}, \quad (2.15)$$

$$x_c^*(x_2) = \frac{y(x_0) - y'(x_0)x_0 + y'(x_2)x_2 - y(x_2)}{y'(x_2) - y'(x_0)}. \quad (2.16)$$

Доказательство. Поскольку по условиям теоремы в точке  $\mathbf{x}_0$  выполняются условия предложения, то в некоторой полукрестности  $(x_0 - \varepsilon, x_0)$  функция  $x_2 = x_2(x_1)$ , связывающая абсциссы проекций точек биссектрисы является монотонно убывающей. В точке  $x = x_0$  имеет место разрыв кривизны  $k(x)$  кривой  $\Gamma$ , обусловленный тем, что в ней смыкаются прямая и часть  $\Gamma$ , прямой не являющейся. При этом знаки односторонней кривизны в  $x_0$  слева и справа совпадают (точнее,  $k(x_0 - 0) = 0$ , следовательно, можно считать, что  $k(x_0 - 0)$  имеет тот же знак, что и  $k(x_0 + 0)$ ). Как показано в [18, теорема 3], крайняя точка  $\hat{\mathbf{y}}$ , соответствующая псевдовершине данного типа, единственна и совпадает с тем из предельных положений центра  $\mathbf{c}(x)$  кривизны, который ближе к  $\Gamma$ . Поскольку по условию теоремы в достаточно малой окрестности псевдовершины  $\Gamma$  не содержит дуги окружности, то  $\Omega_M(\hat{\mathbf{y}}) = \{\mathbf{x}_0\}$ . Отсюда для всех точек  $\mathbf{y} \in L(M)$  при  $\mathbf{y} \rightarrow \hat{\mathbf{y}}$  пары проекций  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \subseteq \Omega_M(\mathbf{y})$  сходятся к точке  $\mathbf{x}_0$ , при этом находясь по разные стороны от нее. То есть в окрестности псевдовершины определены отображения биссектрисы для координат точек.

По условиям теоремы точка  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y(x_0))$  лежит на гладком участке графика функции  $y = y(x)$ . Поэтому в ней определена производная  $y'(x_0)$ . Поскольку слева от псевдовершины кривая  $\Gamma$  совпадает с отрезком прямой  $\gamma$ , то уравнение  $\gamma$  совпадает с уравнением касательной к  $\Gamma$  в псевдовершине

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0). \quad (2.17)$$

По свойствам псевдовершины гладкой кривой в некоторых достаточно малых полукрестностях  $[x_0 - \varepsilon_0, x_0]$  и  $[x_0, x_0 + \varepsilon_0]$ , таких что для каждой точки  $(x_2, y(x_2))$  при  $x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon_0]$  найдется точка  $(x_1, y(x_1))$ ,  $x_1 \in [x_0 - \varepsilon_0, x_0)$  такая что они порождают точку биссектрисы. Выберем полукрестность  $[x_0 - \varepsilon_0, x_0)$  такой, чтобы для точек  $(x, y) = (x_1, y(x_1))$  при  $x_1 \in [x_0 - \varepsilon_0, x_0)$  выполнялось равенство (2.17). Тогда согласно лемме 1 для любой точки  $(x_2, y(x_2))$  при  $x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon_0]$  найдется точка с абсциссой  $x_1$  такая что эти две точки порождают точку биссектрисы. Подставив в выражения (2.8), (2.9) в качестве коэффициента  $a$  значение  $y'(x_0)$ , а в качестве значения ординаты  $y_0$  — значение  $y'(x_0)$ , получаем выражения (2.15), (2.16).  $\square$

**Следствие.** Пусть граница  $\Gamma$  множества  $M$  совпадает с графиком функции  $y = y(x)$ . Если выполнены следующие условия:

- 1) для функции  $y = y(x)$ , точки  $x_0$  и чисел  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$  справедливы соотношения А.1–А.3;
- 2) точка  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y(x_0))$  является псевдовершиной множества  $M$ ;
- 3) в правой полукрестности  $(x_0, x_0 + \varepsilon_1)$  функция  $y(x)$  совпадает с линейной,

то для некоторого числа  $\varepsilon > 0$  существует отображение биссектрисы левой полукрестности псевдовершины  $\mathbf{x}_0$ , заданное формулой

$$x_2(x_1) = \bar{x}_c^*(x_1) + \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x}_c^*(x_1))^2 + (y(x_1) - y_0 - y'(x_0)(\bar{x}_c^*(x_1) - x_0))^2}{1 + y'(x_0)^2}}, \quad (2.18)$$

$$\bar{x}_c^*(x_1) = \frac{y(x_0) - y'(x_0)x_0 + y'(x_1)x_1 - y(x_1)}{y'(x_1) - y'(x_0)}. \quad (2.19)$$

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы, но опирается на лемму 2.  $\square$

З а м е ч а н и е. Координаты крайней точки  $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{x}, \hat{y})$  биссектрисы для псевдовершины, удовлетворяющей условиям теоремы, можно найти как предельное положение центра кривизны [19, гл. III, §25] графика  $y = y(x)$  в точке  $x = x_0$  справа:

$$\hat{x} = x_0 - \frac{y'(x_0)^3 + y'(x_0)}{y''(x_0 + 0)}, \quad (2.20)$$

$$\hat{y} = y(x_0) - \frac{y'(x_0)^2 + 1}{y''(x_0 + 0)}. \quad (2.21)$$

Аналогично крайняя точка  $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{x}, \hat{y})$  биссектрисы для псевдовершины, соответствующей условиям следствия, совпадает с предельным положением центра кривизны в точке  $x = x_0$  слева:

$$\hat{x} = x_0 - \frac{y'(x_0)^3 + y'(x_0)}{y''(x_0 - 0)}, \quad (2.22)$$

$$\hat{y} = y(x_0) - \frac{y'(x_0)^2 + 1}{y''(x_0 - 0)}. \quad (2.23)$$

### 3. Примеры решения задачи 1

П р и м е р 1. Пусть требуется решить задачу 1, выделив рассеивающую кривую, если множество  $M$  есть подграфик функции

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ 2 \sec x - 2, & x \in [0, \pi/2). \end{cases} \quad (3.1)$$

Анализ границы целевого множества показывает, что есть одна псевдовершина  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y(x_0)) = (0, 0)$ , в ней выполняются условия теоремы. Ей соответствует крайняя точка биссектрисы, координаты которой найдены из (2.20), (2.21):  $\hat{\mathbf{y}} = (0, 0.5)$ . По формуле (2.16) абсцисса точки пересечения касательной к графику функции (3.1) в точке  $x_2 > x_0$  и прямой  $y = 0$ , которая совпадает с частью этого графика при  $x < 0$ , определяется как

$$x_c^*(x_2) = \frac{x_2 \cdot 2 \sin x_2 / \cos^2 x_2 - (2 \sec x_2 - 2)}{2 \sin x_2 / \cos^2 x_2} = x_2 - \frac{\cos x_2 - \cos^2 x_2}{\sin x_2}.$$

Подставив  $x_c^*(x_2)$  в (2.15), можно получить отображение биссектрисы в правой полукрестности псевдовершины, выполняющееся на интервале  $(0, \pi/2)$ :

$$x_1(x_2) = x_2 - \operatorname{tg} \frac{x_2}{2} \left( \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 x_2 - \cos^2 x_2} + \cos x_2 \right). \quad (3.2)$$

Линии уровня  $\Phi$  функции оптимального результата  $u(x, y)$  с шагом 0.2 и рассеивающая кривая  $L(M)$  представлены на рис. 1.

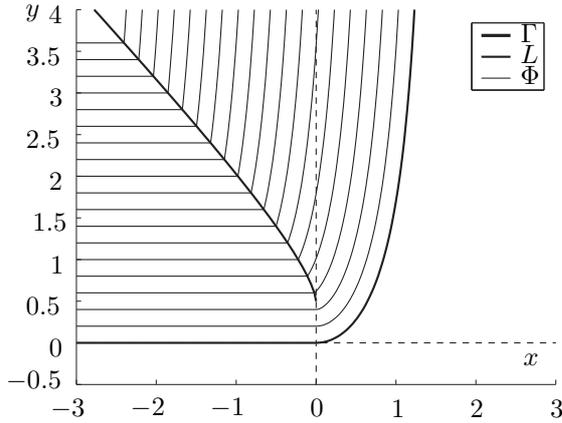


Рис. 1. Граница  $\Gamma$  целевого множества, биссектриса  $L(M)$  и линии уровня  $\Phi$  функции оптимального результата  $u(x, y)$  в примере 1.

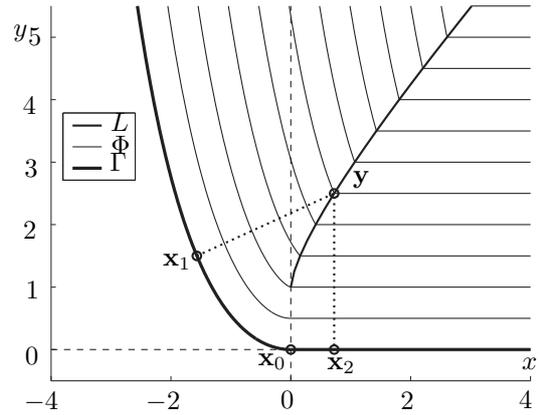


Рис. 2. Граница  $\Gamma$  целевого множества, биссектриса  $L(M)$ , линии уровня  $\Phi$  функции оптимального результата  $u(x, y)$ , точка  $y \in L(M)$ , ее проекции  $x_1, x_2 \in \partial M$  и оптимальные траектории  $[y, x_1]$  и  $[y, x_2]$  в примере 2.

Пример 2. Пусть требуется решить задачу 1, выделив рассеивающую кривую, если множество  $M$  есть подграфик функции

$$y(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x - 1, & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x \in [0, \infty). \end{cases} \quad (3.3)$$

Анализ границы целевого множества показывает, что есть одна псевдовершина  $x_0 = (x_0, y(x_0)) = (0, 0)$ , в ней выполняются условия следствия. Ей соответствует крайняя точка биссектрисы, координаты которой найдены из (2.22), (2.23):  $\hat{y} = (0, 1)$ . По формуле (2.19) абсцисса точки пересечения касательной к графику функции (3.3) в точке  $x_1 < x_0$  и прямой  $y = 0$ , которая совпадает с частью этого графика при  $x > x_0$ , вычисляется по формуле

$$\bar{x}_c^*(x_1) = \frac{x_1 \operatorname{sh} x_1 - (\operatorname{ch} x_1 - 1)}{\operatorname{sh} x_1} = x_1 - \frac{\operatorname{ch} x_1 - 1}{\operatorname{sh} x_1}.$$

Подставив  $\bar{x}_c^*(x_1)$  в (2.18), можно получить (после преобразований) отображение биссектрисы правой полуокрестности псевдовершины, выполняющееся на любом полуинтервале  $(-\varepsilon, 0)$  при  $\varepsilon > 0$ :

$$x_2(x_1) = x_1 - \operatorname{sh} x_1. \quad (3.4)$$

Линии уровня  $\Phi$  функции оптимального результата  $u(x, y)$  с шагом 0.5 и рассеивающая кривая  $L(M)$  представлены на рис. 2. На рисунке также обозначена псевдовершины  $x_0$ , точка биссектрисы  $y$ , ее проекции  $x_1$  и  $x_2$  на целевое множество  $M$  и оптимальные траектории (пунктирными линиями).

В примерах 1 и 2 формулы (3.2) и (3.4) были получены с использованием того факта, что часть границы целевого множества является лучом прямой. Однако в общем случае  $\Gamma$  может иметь более сложную структуру. Покажем, что аналитические формулы отображений в редких случаях могут быть записаны и для тех псевдовершин, в которых не выполняются теоретические результаты из разд. 2.

Пример 3. Пусть требуется решить задачу 1, выделив в ней рассеивающую кривую, если множество  $M$  ограничено сверху кривой  $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in (-\infty, +\infty)\}$ , где

$$x(t) = \begin{cases} t - \frac{2}{2\sqrt{4t^2 + 1}}, & t \in (-\infty, 0), \\ 0.25 \sin 2t, & t \in [0, \pi/4), \\ 0.25, & t \in [\pi/4, +\infty), \end{cases} \quad (3.5)$$

$$y(t) = \begin{cases} t^2 + \frac{1}{4\sqrt{4t^2 + 1}}, & t \in (-\infty, 0), \\ 0.25 \cos 2t, & t \in [0, \pi/4], \\ \pi/4 - t, & t \in [\pi/4, +\infty). \end{cases} \quad (3.6)$$

На границе множества есть одна псевдовершина  $\mathbf{x}_0 = (x(t_0), y(t_0))$ , соответствующая значению параметра  $t_0 = 0$ . Производные первого порядка (3.5) и (3.6) в  $t_0$  принимают значения  $x'(t_0) = 0.5, y'(t_0) = 0$ . Важной особенностью псевдовершины является то, что предельные односторонние значения кривизны

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

в ней имеют различные знаки:  $k(t_0 - 0) = 0.25, k(t_0 + 0) = -0.25$ . Подобная ситуация разобрана в [6]; согласно теореме 3.1 и следствию 3.1 из [6] крайняя точка имеет координаты  $\hat{\mathbf{y}} = (0, 0.5)$ . Отображение биссектрисы левой полукрестности псевдовершины  $\mathbf{x}_0(t_0)$  находится аналитически:

$$t_2(t_1) = -0.5 \operatorname{arctg} \frac{2t_1^3}{3t_1^2 + 1} \quad (3.7)$$

и справедливо на любом интервале  $(-\varepsilon, 0)$  при  $\varepsilon > 0$ . Строгое обоснование формулы (3.7) строится на том факте, что  $M$  можно представить как  $M = M^* + O(\mathbf{0}, r)$ , где  $r = 0.25, M^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq x^2, x \in (-\infty, 0]\}$  — подграфик функции  $f(x) = x^2$  с областью определения  $X = (-\infty, 0]$ . Биссектриса  $L(M^*)$  множества  $M^*$  имеет ту особенность, что для всех ее точек одной из проекций является  $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$  (подробнее см. [16, пример 4]). Координаты точки  $\mathbf{y}^* = (x^*, y^*) \in L(M^*)$  определяются по формулам

$$x^* = -\bar{x}_1^3, \quad (3.8)$$

$$y^* = 1.5\bar{x}_1^3 + 0.5, \quad (3.9)$$

где  $\bar{x}_1$  — абсцисса той проекции  $\mathbf{x}_1$  точки биссектрисы, которая не совпадает с  $\mathbf{x}^0$ . Поскольку все точки  $L(M^*)$  удалены от  $M^*$  на расстояние, большее чем  $r$ , то  $L(M) = L(M^*)$ . Значит, для точки  $\mathbf{y}^*$  с координатами (3.8), (3.9) множество  $\Omega_M(\mathbf{y}^*)$  состоит из двух элементов, один из которых  $\mathbf{x}_1$  лежит на нормали к графику функции  $f(x) = x^2$  в точке  $x = x_1$  на расстоянии  $r$  от  $(\bar{x}_1, \bar{x}_1^2)$ , а другой  $\mathbf{x}_2$  — на отрезке  $[\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^*]$  на расстоянии  $r$  от  $\mathbf{x}^0$ . При конкретном  $x_1 < 0$  параметр  $t_1$  такой, что  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ , причем

$$t_1 = \bar{x}_1. \quad (3.10)$$

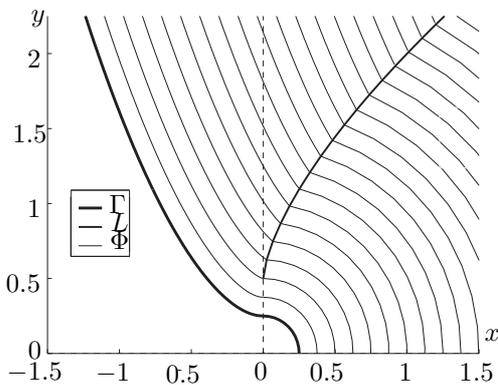


Рис. 3. Граница  $\Gamma$  целевого множества, биссектриса  $L(M)$  и линии уровня  $\Phi$  функции оптимального результата  $u(x, y)$  в примере 3.

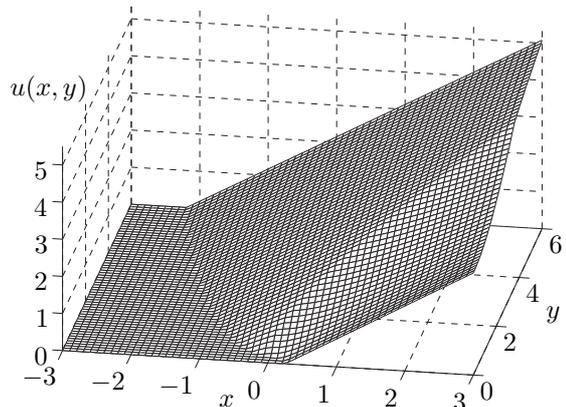


Рис. 4. График функции оптимального результата  $u(x, y)$  в примере 3.

Тогда и параметр  $t_2$  такой, что  $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2$ , при этом

$$t_2 = 0.5(\pi/2 - \operatorname{arctg}(y^*/x^*)) = 0.5 \operatorname{arctg}(x^*/y^*) = 0.5 \operatorname{arctg} \frac{-\bar{x}_1^3}{1.5\bar{x}_1^2 + 0.5}. \quad (3.11)$$

Подставив в равенство (3.11) значение  $x_1$  из (3.10), получим (3.7).

Линии уровня  $\Phi$  функции оптимального результата  $u(x, y)$  с шагом 0.125 и рассеивающая кривая  $L(M)$  представлены на рис. 3. График функции оптимального результата  $u(x, y)$  на прямоугольной сетке с ячейкой  $0.1 \times 0.1$  показан на рис. 4.

### Заключение

Для одного класса плоских задач управления по быстродействию для случая замкнутого невыпуклого множества выявлены условия, налагаемые на границу цели, которые допускают построение сингулярного множества решения в явном аналитическом виде. На основе полученных аналитических соотношений предложены алгоритмы построения линий уровня и графика функции оптимального результата. Предъявлены примеры задач управления с различной геометрией границы целевого множества, для которых сингулярные множества построены точно, в аналитической форме.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва–Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных технологий, 2003. 336 с.
2. **Lebedev P.D., Uspenskii A.A.** Analytical and numerical construction of the optimal outcome function for a class of time-optimal problems // *Comput. Math. Modeling.* 2008. Vol. 19, iss. 4. P. 375–386. doi: 10.1007/s10598-008-9007-9.
3. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // *Мат. сб.* 1975. Т. 98 (140), №3 (11). С. 450–493.
4. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996. 334 с.
5. **Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
6. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Построение рассеивающих кривых в одном классе задач быстродействия при скачках кривизны границы целевого множества // *Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та.* 2020. Т. 55. С. 93–112. doi: 10.35634/2226-3594-2020-55-07.
7. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
8. **Siersma D.** Properties of conflict sets in the plan // *Banach Center Publ.* 1999. Vol. 50. P. 267–276. doi: 10.4064/-50-1-267-276.
9. **Giblin P.J., Reeve G.** Centre symmetry sets of families of plane curves // *Demonstratio Mathematica.* 2015. Vol. 48, iss. 2. P. 167–192. doi: 10.1515/dema-201-0016.
10. **Giblin P.G.** Symmetry sets and medial axes in two and three dimensions // *The Mathematics of Surfaces IX* / eds. Roberto Cipolla and Ralph Martin. Berlin: Springer-Verlag, 2000. P. 306–321. doi: 10.1007/978-1-4471-0495-7\_18.
11. **Алимов А.Р., Царьков И.Г.** Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // *Успехи мат. наук.* 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84. DOI: doi.org/10.4213/rm9698.
12. **Ушаков В.Н., Ершов А.А., Першаков М.В.** Об одном дополнении к оценке Л.С. Понтрягина геометрической разности множеств на плоскости // *Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та.* 2019. Т. 4. С. 63–73. doi: 10.20537/2226-3594-2019-54-06.
13. **Седых В.Д.** О топологии волновых фронтов в пространствах небольших размерностей // *Изв. РАН. Сер. математическая.* 2012. Т. 76, вып. 2. С. 171–214. doi: 10.4213/im8202.
14. **Седых В.Д.** Топология особенностей роста устойчивой вещественной каустики типа  $E_6$  // *Изв. РАН. Сер. математическая.* 2018. Т. 82, вып. 3. С. 154–169. doi: 10.4213/im8643.
15. **Позняк Э.Г., Шикин Е.В.** Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990. 384 с.

16. Лебедев П.Д. Вычисление меры невыпуклости плоских множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 84–94.
17. Лебедев П.Д., Успенский А.А. Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. высших учеб. заведений. Математика. 2008. №3 (550). С. 27–37.
18. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Geometric singularities of the solution of the Dirichlet boundary problem for Hamilton-Jacobi equation with a low order of smoothness of the border curve // Mathematical analysis with applications : Intern. Conf. (CONCORD-90, Ekaterinburg, July 2018) / eds. B S. Pinelas, A. Kim, V. Vlasov . Cham : Springer, 2020. P. 109–122. (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics; vol. 318). doi: 10.1007/978-3-030-42176-2\_11.
19. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Едиториал, УРСС, 2003. 432 с.

Поступила 31.03.2021

После доработки 31.05.2021

Принята к публикации 5.06.2021

Лебедев Павел Дмитриевич

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: pleb@yandex.ru

Успенский Александр Александрович

д-р физ.-мат. наук, зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: uspen@imm.uran.ru

## REFERENCES

1. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first order PDEs: the dynamical optimization perspective*. Basel: Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1. Translated to Russian under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poriyadka: Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*. Moscow; Izhevsk: Inst. Komp'yuter. Issled. Publ., 2003, 336 p.
2. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Analytical and numerical construction of the optimal outcome function for a class of time-optimal problems. *Comput. Math. Modeling*, 2008, vol. 19, no. 4, pp. 375–386. doi: 10.1007/s10598-008-9007-9.
3. Kruzhkov S.N. Generalized solutions of the Hamilton–Jacobi equations of eikonal type. I. Formulation of the problems; existence, uniqueness and stability theorems; some properties of the solutions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1975, vol. 27, no. 3, pp. 406–446. doi: 10.1070/SM1975v027n03ABEH002522.
4. Arnold V.I. *Singularities of caustics and wave fronts*. Heidelberg: Springer Netherlands, 1990, 259 p. doi: 10.1007/978-94-011-3330-2. Translated to Russian under the title *Osobennosti kaustik i volnovykh frontov*. Moscow: FAZIS Publ., 1996, 334 p.
5. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nondifferentiable optimization*. N Y: Springer-Verlag, 1985, 452 p. ISBN: 978-0-387-90951-6. Original Russian text published in Dem'yanov V.F. Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya*. Moscow: Nauka Publ., 1981, 384 p.
6. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Construction of scattering curves in one class of time-optimal control problems with leaps of a target set boundary curvature. *Izv. IMI UdGU*, 2020, vol. 55, pp. 93–112 (in Russian). doi: 10.35634/2226-3594-2020-55-07.
7. Isaacs R. *Differential games*. N Y, John Wiley and Sons, 1965, 384 p. ISBN: 0471428604. Translated to Russian under the title *Differentsial'nye igry*. Moscow: Mir Publ., 1967, 479 p.
8. Siersma D. Properties of conflict sets in the plan. *Banach Center Publ.*, 1999, vol. 50, pp. 267–276. doi: 10.4064/-50-1-267-276.
9. Giblin P.J., Reeve G. Centre symmetry sets of families of plane curves. *Demonstratio Mathematica*, 2015, vol. 48, no. 2, pp. 167–192. doi: 10.1515/dema-201-0016.
10. Giblin P.G. Symmetry sets and medial axes in two and three dimensions. In: *The Mathematics of Surfaces IX*, Roperto Cipolla and Ralph Martin (eds.). Berlin: Springer-Verlag, 2000, pp. 306–321. doi: 10.1007/978-1-4471-0495-7\_18.

11. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Connectedness and solarly in problems of best and near-best approximation. *Russian Math. Surveys*, 2016, vol. 71, no. 1, pp. 1–77. doi: 10.1070/RM9698.
12. Ushakov V.N., Ershov A.A., Pershakov M.V. On one addition to evaluation by L.S. Pontryagin of the geometric difference of sets in a plane. *Izv. IMI UdGU*, 2019, vol. 54, pp. 63–73 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2019-54-06.
13. Sedykh V.D. On the topology of wave fronts in spaces of low dimension. *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 2, pp. 375–418. doi: 10.1070/IM2012v076n02ABEH002588.
14. Sedykh V.D. Topology of singularities of a stable real caustic germ of type  $E_6$ . *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 3, pp. 596–611. doi: 10.1070/IM8643
15. Poznyak E.G., Shikin E.V. *Differentsial'naya geometriya: pervoe znakomstvo* [Differential geometry: The first acquaintance]. Moscow: MGU, 1990, 384 p. ISBN: 978521100959.
16. Lebedev P.D. Calculating the nonconvexity measure of plane sets. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2007, vol. 13, no. 3, pp. 84–94 (in Russian).
17. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Geometry and asymptotics of wavefronts. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2008, vol. 52, no. 3, pp. 24–33. doi: 10.3103/S1066369X08030031.
18. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Geometric singularities of the solution of the Dirichlet boundary problem for Hamilton–Jacobi equation with a low order of smoothness of the border curve. In: Pinelas S., Kim A., Vlasov V. (eds), *Mathematical Analysis With Applications*. Cham: Springer, 2020, pp. 109–122, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 318. doi: 10.1007/978-3-030-42176-2\_11.
19. Rashevskii P.K. *Kurs differentsial'noj geometrii* [A course in differential geometry]. Moscow: URSS Publ., 2003, 432 p. ISBN: 5-354-00294-X.

Received April 31, 2021

Revised May 31, 2021

Accepted June 7, 2021

**Funding Agency:** P.D. Lebedev's research is supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00105).

*Pavel Dmitrievich Lebedev*, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: pleb@yandex.ru.

*Aleksandr Aleksandrovich Uspenskii*, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: uspen@imm.uran.ru.

Cite this article as: P.D. Lebedev, A. A. Uspenskii. On the analytical construction of solutions for one class of time-optimal control problems with nonconvex target set, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 128–140.