

УДК 517.977

О ПОЛИЭДРАЛЬНОМ МЕТОДЕ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ЦЕЛЕВОГО УКЛОНЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ МНОГОШАГОВЫХ СИСТЕМАХ

Е. К. Костоусова

Рассматривается задача конфликтного управления для линейной многошаговой системы с двумя управлениями, где цель одного управления состоит в приведении траектории на заданное целевое множество в заданный конечный момент времени; цель другого противоположна. Здесь возникают две подзадачи: задача сближения и задача уклонения. Предполагается, что целевое множество является невырожденным параллелепипедом, а оба управления стеснены параллелотопозначными ограничениями. Работа посвящена развитию быстрого полиэдрального метода синтеза управлений в задаче уклонения на основе построения параллелотопозначных трубок. Исследуются две схемы построения трубок такого рода и соответствующих стратегий управления для уклонения от цели. Доказано, что при определенных условиях обе схемы позволяют получить частные решения задачи целевого уклонения. При этом наложенные здесь условия несколько слабее, чем были анонсированы ранее. Более того, для обоих случаев найдены гарантированные оценки снизу для величины отклонения траектории от сечений трубки. Последнее сечение по построению содержит целевое множество. Проведено сравнение локальных свойств обеих схем.

Ключевые слова: управляемая система, системы с неопределенностью, задача уклонения, полиэдральные методы, параллелотопы.

E. K. Kostousova. On the polyhedral method of control synthesis in the problem of target evasion in discrete-time systems.

A conflict-control problem is considered for a linear discrete-time system with two controls, where the aim of the first control is to steer the trajectory of the system to a given target set, whereas the aim of the second control is opposite. Two subproblems arise here, namely, an approach problem and an evasion problem. It is assumed that the target set is a nondegenerate parallelepiped and both controls are subject to given parallelotope-valued constraints. The paper is devoted to the development of a fast polyhedral method of control synthesis in the evasion problem based on the construction of parallelotope-valued tubes. Two construction schemes for such tubes and the corresponding control strategies of avoiding the target set are studied. It is proved that under certain conditions both schemes provide particular solutions to the target evasion problem. The conditions imposed here are somewhat weaker than previously announced. Moreover, for both cases, guaranteed lower bounds are found for the deviation of the trajectory from the tube cross-sections. Here the last cross-section contains the target set by construction. The local properties of the schemes are compared.

Keywords: control system, systems with uncertainties, evasion problem, polyhedral methods, parallelotopes.

MSC: 93C41, 93C55, 93B50, 93B40, 52B12

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-101-114

1. Введение

Рассматривается линейная многошаговая система с двумя управлениями (одно из них можно трактовать как возмущение) в условиях конфликта, когда цель одного управления состоит в приведении траектории системы на заданное целевое множество в заданный конечный момент времени, а цель другого противоположна. Здесь возникают две подзадачи — задача сближения и задача уклонения. Хорошо известны подходы к решению обеих подзадач такого рода, основанные на построении трубок разрешимости [1–3] (для дифференциальных систем они известны как стабильные мосты [1]).

Однако точное построение трубок траекторий может быть выполнено только в редких, относительно простых, случаях. В настоящее время имеются разнообразные численные методы, основанные на разных описаниях рассматриваемых множеств, — с помощью уравнений интегральной воронки, опорных функций, уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана и пр. (см.

[1–4]; здесь и ниже для примера дано только несколько ссылок из большого числа работ; см. также библиографию в них). С геометрической точки зрения можно выделить, в частности, методы, основанные на аппроксимации множеств многогранниками с большим числом вершин и граней [5–8] или объединением конечного числа точек [9]. Методы такого рода могут давать вполне точные аппроксимации, но быть достаточно трудоемкими, особенно для систем большой размерности. Другая группа методов, с меньшей трудоемкостью, основана на оценивании множеств областями простой фиксированной формы, такими как эллипсоиды [2; 3; 10; 11], параллелепипеды / параллелотопы [12].

В этом русле были разработаны конструктивные эллипсоидальные схемы решения линейных задач сближения [2; 3; 5; 13], а также полиэдральные схемы, в которых используются полиэдральные (параллелотопозначные) трубки разрешимости [14; 15]. Развитие аналогичной техники может быть полезно и для решения задачи уклонения, например с целью конструирования опасных возмущений [7]. Так, разработанная для задач сближения полиэдральная техника [14] сначала была адаптирована для решения задач управления самолетом с возмущениями [7; 16], а затем развита далее для решения задачи уклонения в линейных дифференциальных системах и с использованием метода последовательной линеаризации применена для формирования опасных возмущений в задачах управления самолетом [17].

Данная статья посвящена развитию полиэдрального метода синтеза управлений в задаче терминального целевого уклонения для линейных многошаговых систем на основе построения полиэдральных трубок. Описываются и исследуются две полиэдральные схемы решения этой задачи, намеченные в [18]. Вторая схема представляет собой некий аналог техники, разработанной в [17] для задачи уклонения в дифференциальных системах. Мы предполагаем, что целевое множество является невырожденным параллелепипедом, а оба управления стеснены заданными параллелотопозначными ограничениями. Приведены рекуррентные уравнения двух типов для центров и матриц, определяющих параллелотопозначные сечения вышеупомянутых трубок, и даны явные формулы для построения стратегий управления с обратной связью на основе соответствующих трубок. Доказано, что при определенных условиях обе схемы позволяют получить частные решения задачи целевого уклонения. Отметим, что наложенные здесь условия несколько слабее, чем в [18]. Более того, получены гарантированные оценки снизу для величины отклонения траектории от сечений трубок. При этом последнее сечение по построению содержит целевое множество. Проведено сравнение локальных свойств обеих схем.

В работе используются следующие обозначения: \mathbb{R}^n и $\mathbb{R}^{n \times m}$ — линейные пространства вещественных n -векторов и $n \times m$ -матриц соответственно; \top — знак транспонирования; $\|x\|_2 = (x^\top x)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ — нормы вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$; $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ — единичный орт вдоль оси $0x_i$ (единица стоит на i -м месте), $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$; $A = \{a_i^j\} = \{a^j\}$ — матрица с элементами a_i^j и со столбцами a^j (верхним индексом нумеруем столбцы, нижним — компоненты векторов); 0 — нулевая матрица (вектор) произвольной размерности; I — единичная матрица; $\text{Abs } A$ — матрица абсолютных величин элементов матрицы $A = \{a_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$: $\text{Abs } A = \{|a_i^j|\}$; $\text{diag } \pi$, $\text{diag } \{\pi_i\}$ — диагональная матрица с компонентами π_i вектора π на диагонали; $\det A$ — определитель матрицы A ; $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_i^j|$ — норма матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, индуцированная нормой $\|x\|_\infty$; $\text{int } \mathcal{W}$ — совокупность внутренних точек множества $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$; $\rho(l|\mathcal{W}) = \sup\{l^\top x | x \in \mathcal{W}\}$ — опорная функция множества \mathcal{W} ; $\text{sign } z$ — функция знака числа: равна $-1, 0, 1$ соответственно при $z < 0, z = 0, z > 0$. Кроме того, используем для краткости обозначения типа $k = 1, \dots, n$ вместо $k = 1, 2, \dots, n$.

2. Постановка задачи

Пусть состояние $x \in \mathbb{R}^n$ объекта описывается системой

$$x[k] = A[k]x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

и задано целевое множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$. Здесь $A[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B[k] \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C[k] \in \mathbb{R}^{n \times n_v}$ — известные матрицы, $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$ и $v[k] \in \mathbb{R}^{n_v}$ — управления/возмущения, стесненные ограничениями

$$u[k] \in \mathcal{R}[k] \subset \mathbb{R}^{n_u}, \quad v[k] \in \mathcal{Q}[k] \subset \mathbb{R}^{n_v}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Будем называть такие управления *допустимыми*. Цель управления u — добиться выполнения включения $x[N] \in \mathcal{M}$, а v — обеспечить $x[N] \notin \mathcal{M}$.

Будем предполагать, что множества \mathcal{M} и $\mathcal{R}[k]$, $\mathcal{Q}[k]$ являются параллелепипедом и параллелотопами соответственно. Напомним определения данных множеств.

Параллелепипедом $\mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x \mid x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i, \|\xi\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$; $P = \{p_j^i\} = \{p^i\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — неособая матрица ($\det P \neq 0$) со столбцами p^i единичной длины ($\|p^i\|_2 = 1$); $\pi \in \mathbb{R}^n$, $\pi \geq 0$. Условие нормировки $\|p^i\|_2 = 1$ может быть опущено в целях упрощения формул. Векторные неравенства ($\leq, <, \geq, >$) здесь и ниже понимаются покомпонентно. Можно сказать, что p — центр параллелепипеда, P — матрица ориентации, p^i — направления, π_i — величины его “полуосей”. Называем параллелепипед *невырожденным*, если $\pi > 0$.

Параллелотопом $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x \mid x = p + \bar{P}\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$, $\bar{P} = \{\bar{p}^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $m \leq n$ (p определяет центр параллелотопа, \bar{P} — форму). Называем параллелотоп *невырожденным*, если $m = n$ и $\det \bar{P} \neq 0$.

Каждый параллелепипед $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ — это параллелотоп $\mathcal{P}[p, \bar{P}]$ с $\bar{P} = P \operatorname{diag} \pi$; каждый невырожденный параллелотоп — это параллелепипед с $P = \bar{P} \operatorname{diag} \{\|\bar{p}^i\|_2^{-1}\}$, $\pi_i = \|\bar{p}^i\|_2$ или, иначе, с $P = \bar{P}$, $\pi = e$, где $e = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$.

Ниже считаем выполненным следующее предположение.

Предположение 1. Все матрицы $A[k]$ — неособые ($\det A[k] \neq 0$, $k = 1, \dots, N$), множества $\mathcal{R}[k]$ и $\mathcal{Q}[k]$ — это параллелотопы, \mathcal{M} — невырожденный параллелепипед:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[k] &= \mathcal{P}[r[k], \bar{R}[k]], \quad \bar{R}[k] \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad \mathcal{Q}[k] = \mathcal{P}[q[k], \bar{Q}[k]], \quad \bar{Q}[k] \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}, \\ \mathcal{M} &= \mathcal{P}(p_f, P_f, \pi_f) = \mathcal{P}[p_f, \bar{P}_f], \quad \bar{P}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det \bar{P}_f \neq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Итак, сформулируем задачи целевого сближения и уклонения.

Задача 1 (задача целевого сближения). Дана система (2.1)–(2.2). Для любого i , $0 \leq i \leq N-1$, найти множество разрешимости $\mathcal{W}^a[i]$ и такую стратегию управления $u = u[k, x]$, удовлетворяющую ограничениям $u[k, x] \in \mathcal{R}[k]$, $k = i+1, \dots, N$, чтобы всякое решение $x[\cdot]$ уравнения $x[k] = A[k]x[k-1] + B[k]u[k, x[k-1]] + C[k]v[k]$, $k = i+1, \dots, N$, с начальным условием $x[i] = x^i \in \mathcal{W}^a[i]$ удовлетворяло включению $x[N] \in \mathcal{M}$, каковы бы ни были допустимые реализации $v[\cdot]$.

Мнозначную функцию $\mathcal{W}^a[\cdot]$ ($\mathcal{W}^a[k]$, $k = 0, \dots, N$) называют *трубкой разрешимости*.

Задача 2 (задача целевого уклонения). Дана система (2.1)–(2.2). Для любого i , $0 \leq i \leq N-1$, найти множество $\mathcal{W}^e[i]$ и такую стратегию управления $v = v[k, x]$, удовлетворяющую ограничениям $v[k, x] \in \mathcal{Q}[k]$, $k = i+1, \dots, N$, чтобы всякое решение $x[\cdot]$ уравнения

$$x[k] = A[k]x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k, x[k-1]], \quad k = i+1, \dots, N, \quad (2.4)$$

с начальным условием $x[i] = x^i \notin \mathcal{W}^e[i]$ удовлетворяло условию $x[N] \notin \mathcal{M}$, каковы бы ни были допустимые реализации $u[\cdot]$.

Ключевым элементом теперь является построение трубки $\mathcal{W}^e[\cdot]$.

Вышеупомянутые множества и соответствующие трубки определяются указанными условиями неединственным образом. Условимся использовать введенные обозначения $\mathcal{W}^a[i]$ и $\mathcal{W}^e[i]$ для максимальных и минимальных множеств соответственно, т. е. для множеств всех точек, удовлетворяющих указанным условиям. Заметим, что индексы “а” и “е” взяты от слов approach (сближение) и evasion (уклонение).

Здесь уместно отметить, что задачу целевого уклонения можно было бы сформулировать в следующей форме, более близкой к постановкам и конструкциям из [1, гл. 2].

Задача 2' (задача целевого уклонения). Для любого i , $0 \leq i \leq N-1$, найти множество $\mathcal{W}^e[i]$ и такую *стратегию управления* $v = v[k, x]$, удовлетворяющую ограничениям $v[k, x] \in \mathcal{Q}[k]$, $k = i+1, \dots, N$, чтобы всякое решение $x[\cdot]$ уравнения (2.4) с $x[i] = x^i \in \check{\mathcal{W}}^e[i]$ удовлетворяло условию $x[N] \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}$, каковы бы ни были допустимые реализации $u[\cdot]$.

Фигурирующие здесь множества $\check{\mathcal{W}}^e[i]$ оказываются дополнениями $\mathcal{W}^e[i]$ до \mathbb{R}^n : $\check{\mathcal{W}}^e[i] = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{W}^e[i]$. Согласно классическому результату теории дифференциальных антагонистических позиционных игр [1, гл. 2] — теореме об альтернативе для дифференциальных игр сближения-уклонения — множество позиций в таких играх разбивается (это несколько в огрубленном виде) на два множества (на стабильные мосты), одно из которых решает задачу о сближении, а другое — задачу об уклонении. В рассматриваемом нами случае многошаговых систем для введенных множеств, вообще говоря, справедливы только включения $\mathcal{W}^a[i] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \check{\mathcal{W}}^e[i] = \mathcal{W}^e[i]$, так что, вообще говоря, $\mathcal{W}^a[i] \cup \check{\mathcal{W}}^e[i] \neq \mathbb{R}^n$. При этом множества $\mathcal{W}^e[i]$ “устроены проще”, чем $\check{\mathcal{W}}^e[i]$: при наложенных выше условиях они, в отличие от $\check{\mathcal{W}}^e[i]$, оказываются выпуклыми. Поэтому и было решено здесь для формулировки задачи уклонения сразу использовать множества $\mathcal{W}^e[i]$.

Но точное построение множеств $\mathcal{W}^a[i]$ и $\mathcal{W}^e[i]$, как известно [2; 5; 13], достаточно затруднительно, особенно для систем большой размерности. Чтобы упростить вычисления, используем трубки с сечениями в виде параллелотопов или параллелепипедов (называем их *полиэдральными трубками*) и рассмотрим следующие задачи.

Задача 3 (полиэдральная задача целевого сближения). При выполнении предположения 1 найти решение задачи 1 в классе *полиэдральных трубок* $\mathcal{P}^a[\cdot] = \mathcal{P}[p^a[\cdot], \bar{P}^a[\cdot]]$. Более того, ввести семейство таких трубок.

Ранее нами были описаны семейства полиэдральных трубок $\mathcal{P}^+[\cdot] = \mathcal{P}[p^+[\cdot], P^+[\cdot], \pi^+[\cdot]]$ и $\mathcal{P}^-[\cdot] = \mathcal{P}[p^-[\cdot], \bar{P}^-[\cdot]]$, дающие внешние и внутренние оценки для трубки разрешимости $\mathcal{W}^a[\cdot]$ (т.е. $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{W}^a[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k]$, $k = 0, \dots, N$), даже для более общего класса систем с фазовыми ограничениями и неопределенностями / управлениями в матрицах [15], и доказано, что трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$, фактически, определяют решения задачи 3.

В настоящей работе сосредоточимся на решении следующей задачи.

Задача 4 (полиэдральная задача целевого уклонения). Дана система (2.1)–(2.2) и выполнено предположение 1. Решить задачу 2 в классе *полиэдральных трубок* $\mathcal{P}^e[\cdot]$, т.е. для любого момента $i \in \{0, \dots, N-1\}$ найти *параллелотоп* $\mathcal{P}^e[i] = \mathcal{P}[p^e[i], \bar{P}^e[i]]$ и *стратегию управления* $v = v[k, x]$, удовлетворяющую ограничениям $v[k, x] \in \mathcal{Q}[k]$, $k = i+1, \dots, N$, так чтобы каждое решение $x[\cdot]$ уравнения (2.4), начинающееся в произвольной точке вне $\mathcal{P}^e[i]$ ($x[i] = x^i \notin \mathcal{P}^e[i]$), оказалось в конечный момент вне целевого множества ($x[N] \notin \mathcal{M}$) при любом допустимом управлении $u[\cdot]$. Более того, ввести семейство таких трубок $\mathcal{P}^e[\cdot]$.

В силу приведенных формулировок имеем $\mathcal{W}^a[k] \subseteq \mathcal{W}^e[k] \subseteq \mathcal{P}^e[k]$, $k = 0, \dots, N$.

Назовем трубку $\mathcal{W}[\cdot]$ *невыврожденной*, если все ее сечения $\mathcal{W}[k]$ имеют непустые внутренности: $\text{int } \mathcal{W}[k] \neq \emptyset$, $k = 0, \dots, N$. Очевидно, что невырожденность трубки $\mathcal{W}^e[\cdot]$ (и тем более $\mathcal{W}^a[\cdot]$) влечет невырожденность трубок $\mathcal{P}^e[\cdot]$.

Ниже будут представлены два способа решения задачи 4, дающие целые семейства ее частных решений, ориентированные на случай с невырожденной трубкой $\mathcal{W}^e[\cdot]$. При этом в обоих случаях будем опираться на тот факт, что, оперируя с невырожденными параллелотопозначными трубками $\mathcal{P}^e[\cdot]$, удобно оценивать отклонение траектории $x[\cdot]$ от сечений трубки в терминах относительных координат

$$\zeta^e[k] = \bar{P}^e[k]^{-1}(x[k] - p^e[k]), \quad (2.5)$$

обладающих тем свойством, что условие $x[k] \notin \mathcal{P}^e[k]$ эквивалентно $\|\zeta^e[k]\|_\infty > 1$.

3. Решение задачи 4: способ I

В первом способе решения полиэдральной задачи целевого уклонения используется следующее семейство полиэдральных трубок, являющееся, как можно проверить прямыми выкладками, подсемейством введенного нами ранее и упомянутого выше семейства трубок $\mathcal{P}^+[\cdot]$, внешних для трубки разрешимости $\mathcal{W}^a[\cdot]$ из задачи 1 (см. в библиографии из [15] ссылку [17]).

Пусть P_f^+ — произвольная неособая матрица ($\det P_f^+ \neq 0$). Рассмотрим следующую систему рекуррентных соотношений с явными формулами для вычисления центров и матриц параллелотопов $\mathcal{P}^+[k] = \mathcal{P}[p^+[k], \bar{P}^+[k]]$ — сечений трубки $\mathcal{P}^+[\cdot]$:

$$p^+[k-1] = A[k]^{-1}(p^+[k] - B[k]r[k] - C[k]q[k]), \quad k = N, \dots, 1, \quad p^+[N] = p_f, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}^+[k-1] &= A[k]^{-1} \bar{P}^+[k] (I + \text{diag } \alpha^+[k] - \text{diag } \gamma^+[k]), \quad k = N, \dots, 1, \\ \bar{P}^+[N] &= P_f^+ \text{diag} ((\text{Abs}((P_f^+)^{-1} \bar{P}_f)) e), \\ \alpha^+[k] &= (\text{Abs } \Xi^+[k]) e, \quad \Xi^+[k] = \bar{P}^+[k]^{-1} B[k] \bar{R}[k], \quad k = N, \dots, 1, \\ \gamma^+[k] &= (\text{Abs } \Theta^+[k]) e, \quad \Theta^+[k] = \bar{P}^+[k]^{-1} C[k] \bar{Q}[k], \quad k = N, \dots, 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Формулы (3.1)–(3.2) включают заданные параметры системы (2.1)–(2.2) и целевого множества \mathcal{M} , а неособая матрица P_f^+ в условии на правом конце выступает в качестве параметра, определяющего параметризованное семейство трубок.

Если решим эту систему “справа налево” при фиксированной матрице P_f^+ и найдем трубку $\mathcal{P}^+[\cdot]$, то сможем воспользоваться следующей стратегией управления $v = v^I[k, x]$, где на каждом шаге используются текущая позиция x и сечение найденной трубки:

$$\begin{aligned} v^I[k, x] &= q[k] + \bar{Q}[k] \chi^I[k, x], \\ \chi_j^I[k, x] &= \text{sign}(\Theta^+[k])_{i_*[k]}^j \cdot \text{sign}(\bar{P}^+[k-1]^{-1}(x - p^+[k-1]))_{i_*[k]}, \quad j = 1, \dots, n_v, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$i_*[k] \in \text{Argmax}_{1 \leq i \leq n} |(\bar{P}^+[k-1]^{-1}(x - p^+[k-1]))_i|, \quad (3.4)$$

где $i_*[k] = i_*[k, x] \in \{1, \dots, n\}$ — произвольный индекс (возможно, не единственный), удовлетворяющий (3.4), т. е. обеспечивающий указанный максимум.

Для произвольной траектории $x[\cdot]$ системы (2.1)–(2.2) введем аналогично (2.5) относительные координаты

$$\zeta^+[k] = \bar{P}^+[k]^{-1}(x[k] - p^+[k]). \quad (3.5)$$

Теорема 1. Пусть для системы (2.1)–(2.2) выполнено предположение 1, P_f^+ — произвольная неособая матрица и система соотношений (3.1)–(3.2) имеет такое решение $(p^+[\cdot], \bar{P}^+[\cdot])$, что оказываются выполненными условия

$$\delta^+[k] \stackrel{\text{def}}{=} e + \alpha^+[k] - \gamma^+[k] > 0, \quad k = N, \dots, 1, \quad (3.6)$$

где $\alpha^+[k]$ и $\gamma^+[k]$ определены в (3.2). Тогда:

- (1) все сечения трубки $\mathcal{P}^+[\cdot]$ оказываются невырожденными: $\det \bar{P}^+[k] \neq 0, k = N, \dots, 0$;
- (2) трубка $\mathcal{P}^+[\cdot] = \mathcal{P}[p^+[\cdot], \bar{P}^+[\cdot]]$ вместе со стратегией управления $v^I[\cdot, \cdot]$ вида (3.3)–(3.4) дает частное решение задачи 4;
- (3) если $x[\cdot]$ — траектория, соответствующая $x[0] \notin \mathcal{P}^+[0]$, управлению $v^I[\cdot, \cdot]$ и некоторому (произвольному) допустимому управлению $u[\cdot]$, то справедливы следующие гарантированные оценки снизу для отклонения траектории от трубки $\mathcal{P}^+[\cdot]$, записанные в терминах относительных координат:

$$\|\zeta^+[k]\|_\infty - 1 \geq (\|\zeta^+[0]\|_\infty - 1) \prod_{l=1}^k \delta_{i_*[l]}^+ \geq (\|\zeta^+[0]\|_\infty - 1) \prod_{l=1}^k \min_{1 \leq i \leq n} \delta_i^+[l], \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.7)$$

Заметим, что нестрогое неравенство $\delta^+[k] \geq 0$ означает непустоту параллелопада $\mathcal{P}^+[k-1]$. Из приведенного ниже доказательства можно извлечь следующее полезное замечание.

З а м е ч а н и е 1. Второе утверждение теоремы справедливо также, если стратегию управления строить по формулам (3.3), где вместо (3.4) в качестве $i_*[k]$ брать любой индекс $i[k] = i[k, x] \in \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющий $|(\bar{P}^+[k-1]^{-1}(x - p^+[k-1]))_{i[k]}| > 1$, причем такая стратегия всегда может быть построена для любой точки $x[0] \notin \mathcal{P}^+[0]$. При этом справедлива оценка, получающаяся из (3.7) заменой $\|\zeta^+[0]\|_\infty$ на $|\zeta_{i[1]}^+[0]|$ и $i_*[l]$ на $i[l]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение теоремы вытекает по индукции из формул (3.2), условия (3.6) и предположения 1, поскольку матрицы $\bar{P}^+[k]$, $k = N, \dots, 0$, оказываются представимы в виде произведений неособых матриц. Здесь на шаге $k = N$ использован тот факт, что матрица типа $\text{diag}((\text{Abs}(AB))e)$ при неособых A и B не может иметь нулевых элементов на диагонали, так как ни одна из строк $A \cdot B$ не может быть нулевой.

Пусть найдена трубка $\mathcal{P}^+[\cdot]$ и пусть $x[\cdot]$ — траектория, соответствующая $x[i] \notin \mathcal{P}^+[i]$, управлению $v^I[\cdot, \cdot]$ и некоторому $u[\cdot]$ с допустимыми значениями $u[k] = r[k] + \bar{R}[k]\xi[k]$, $\|\xi[k]\|_\infty \leq 1$. Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно воспользоваться методом индукции по k и проверить, что если $x[k-1] \notin \mathcal{P}^+[k-1]$ при некотором $k \in \{i+1, \dots, N\}$, то применение $v^I[k, x[k-1]]$ приводит к $x[k] \notin \mathcal{P}^+[k]$, или, с использованием относительных координат (3.5), что из $\|\zeta^+[k-1]\|_\infty > 1$ вытекает $\|\zeta^+[k]\|_\infty > 1$. С учетом (2.1)–(2.3), (3.1), (3.5) для $k-1$ и (3.2) имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \zeta^+[k] &= \bar{P}^+[k]^{-1}(x[k] - p^+[k]) \\ &= \bar{P}^+[k]^{-1}(A[k]x[k-1] + B[k]\bar{R}[k]\xi[k] + C[k]\bar{Q}[k]\chi^I[k, x[k-1]] - A[k]p^+[k-1]) \\ &= \bar{P}^+[k]^{-1}A[k]P^+[k-1]\zeta^+[k-1] + \Xi^+[k]\xi[k] + \Theta^+[k]\chi^I[k, x[k-1]] \\ &= \text{diag}(e + \alpha^+[k] - \gamma^+[k])\zeta^+[k-1] + \Xi^+[k]\xi[k] + \Theta^+[k]\chi^I[k, x[k-1]], \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $k = i+1, \dots, N$, $\|\zeta^+[i]\|_\infty > 1$. Неравенство $\|\zeta^+[k-1]\|_\infty > 1$ означает, что существует такой индекс $i[k] \in \{1, \dots, n\}$, что $|\zeta_{i[k]}^+[k-1]| > 1$. Заметим, что в условиях и обозначениях замечания 1 здесь можно считать, что $i[k]$ найден по указанному там правилу $i[k] = i[k, x[k-1]]$, а в условиях теоремы 1 будем считать, что $i[k] = i_*[k]$. Рассмотрим $i[k]$ -ю компоненту вектора $\zeta^+[k]$ и без ограничения общности предположим, что $\zeta_{i[k]}^+[k-1] > 1$ (случай $\zeta_{i[k]}^+[k-1] < -1$ рассматривается аналогично). Имеем

$$\zeta_{i[k]}^+[k] = (1 + \alpha_{i[k]}^+[k] - \gamma_{i[k]}^+[k])\zeta_{i[k]}^+[k-1] + e^{i[k]}(\Xi^+[k]\xi[k] + \Theta^+[k]\chi^I[k, x[k-1]]). \quad (3.9)$$

При этом

$$\begin{aligned} |e^{i[k]} \Xi^+[k]\xi[k]| &\leq e^{i[k]}(\text{Abs} \Xi^+[k])e = \alpha_i^+[k], \quad i = 1, \dots, n, \\ &e^{i[k]} \Theta^+[k]\chi^I[k, x[k-1]] \\ &= \sum_j (\Theta^+[k])_{i[k]}^j \cdot \text{sign}(\Theta^+[k])_{i[k]}^j \cdot \text{sign} \zeta_{i[k]}^+[k-1] = \sum_j |(\Theta^+[k])_{i[k]}^j| = \gamma_{i[k]}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тогда из (3.9) с помощью (3.10), (3.6) и неравенства $\zeta_{i[k]}^+[k-1] > 1$ заключаем, что

$$\begin{aligned} \zeta_{i[k]}^+[k] &\geq (1 + \alpha_{i[k]}^+[k] - \gamma_{i[k]}^+[k])\zeta_{i[k]}^+[k-1] - \alpha_{i[k]}^+[k] + \gamma_{i[k]}^+[k] \\ &= (1 + \alpha_{i[k]}^+[k] - \gamma_{i[k]}^+[k])(\zeta_{i[k]}^+[k-1] - 1) + 1 > 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Желаемое неравенство $\|\zeta^+[k]\|_\infty > 1$ доказано. Если $i[k] = i_*[k]$, т.е. выбирается из условия (3.4), то $\|\zeta^+[k-1]\|_\infty = \zeta_{i_*[k]}^+[k-1]$ и с учетом (3.11) получаем

$$\|\zeta^+[k]\|_\infty - 1 \geq |\zeta_{i_*[k]}^+[k]| - 1 \geq (\zeta_{i_*[k]}^+[k-1] - 1) \cdot \delta_{i_*[k]}^+[k] = (\|\zeta^+[k-1]\|_\infty - 1) \cdot \delta_{i_*[k]}^+[k],$$

откуда следуют неравенства (3.7). \square

З а м е ч а н и е 2. В [7] описан довольно эффективный метод построения “отталкивающих” (repulsive) трубок, применяя который (с соответствующими изменениями) можно находить трубки $\mathcal{V}[\cdot]$, дающие решения задачи 2 и имеющие сечениями политопа $\mathcal{V}[k]$; последние могут быть меньше, чем $\mathcal{P}^+[k]$, так что $\mathcal{W}^e[k] \subseteq \mathcal{V}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k]$. С другой стороны, построение $\mathcal{P}^+[\cdot]$ и $v^I[\cdot, \cdot]$ основано на явных формулах и гораздо менее трудоемко.

4. Решение задачи 4: способ II

Интересно рассмотреть и исследовать также второй способ решения задачи 4, представляющий собой некоторый аналог способа построения трубок и стратегий управления из [17] применительно к случаю многошаговых систем. Можно заметить, что он оказывается похож на способ, разработанный нами ранее для решения полиэдральной задачи сближения 3 (см., например, [15]).

В этом русле рассмотрим трубки $\mathcal{P}^e[\cdot] = \mathcal{P}[p^e[\cdot], \bar{P}^e[\cdot]]$, удовлетворяющие системе

$$p^e[k-1] = A[k]^{-1}(p^e[k] - B[k]r[k] - C[k]q[k]), \quad k = N, \dots, 1, \quad p^e[N] = p_f, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}^e[k-1] &= A[k]^{-1}(\bar{P}^e[k](I + \text{diag } \alpha^e[k]) - C[k]\bar{Q}[k]\Gamma^e[k]), \quad k = N, \dots, 1, \\ \bar{P}^e[N] &= P_f^+ \text{diag}((\text{Abs}(P_f^+)^{-1}\bar{P}_f))e, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\alpha^e[k] = (\text{Abs } \Xi^e[k])e, \quad \Xi^e[k] = \bar{P}^e[k]^{-1}B[k]\bar{R}[k], \quad k = N, \dots, 1.$$

Здесь опять наличествует целое параметрическое семейство трубок, где параметрами являются произвольная неособая матрица P_f^+ в краевом условии и матричная функция $\Gamma^e[\cdot]$, входящая в правые части уравнений и удовлетворяющая условиям

$$\Gamma^e[k] \in \mathcal{G}^{n_v \times n}, \quad k = 1, \dots, N, \quad \mathcal{G}^{m \times n} \stackrel{\text{def}}{=} \{\Gamma = \{\gamma_i^j\} \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \|\Gamma\|_\infty \leq 1\}. \quad (4.3)$$

Называем такие P_f^+ и $\Gamma^e[\cdot]$ *допустимыми параметрами*.

Имея трубку $\mathcal{P}^e[\cdot]$, введем стратегию управления $v = v^I[k, x]$ вида

$$\begin{aligned} v^I[k, x] &= q[k] + \bar{Q}[k]\chi^I[k, x], \\ \chi^I[k, x] &= \Gamma^e[k] \frac{\bar{P}^e[k-1]^{-1}(x - p^e[k-1])}{\max\{\|\bar{P}^e[k-1]^{-1}(x - p^e[k-1])\|_\infty, 1\}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Теорема 2. Пусть для системы (2.1)–(2.2) выполнено предположение 1, P_f^+ и $\Gamma^e[\cdot]$ — произвольные допустимые параметры ($\det P_f^+ \neq 0$, а $\Gamma^e[\cdot]$ удовлетворяет (4.3)) и система соотношений (4.1)–(4.2) имеет такое решение $(p^e[\cdot], \bar{P}^e[\cdot])$, что оказываются выполненными условия

$$\begin{aligned} \delta^e[k] &\stackrel{\text{def}}{=} e + \alpha^e[k] - \gamma^e[k] > 0, \quad k = N, \dots, 1, \\ \gamma^e[k] &= (\text{Abs } \Theta^e[k])e, \quad \Theta^e[k] = \bar{P}^e[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k], \quad k = N, \dots, 1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\alpha^e[k]$ определены в (4.2). Тогда:

- (1) все сечения трубки $\mathcal{P}^e[\cdot]$ оказываются невырожденными: $\det \bar{P}^e[k] \neq 0$, $k = N, \dots, 0$;
- (2) трубка $\mathcal{P}^e[\cdot] = \mathcal{P}[p^e[\cdot], \bar{P}^e[\cdot]]$ вместе со стратегией управления $v^I[\cdot, \cdot]$ вида (4.4) дает частное решение задачи 4;
- (3) если $x[\cdot]$ — траектория, соответствующая $x[0] \notin \mathcal{P}^e[0]$, управлению $v^I[\cdot, \cdot]$ и произвольному допустимому управлению $u[\cdot]$, то справедливы следующие гарантированные оценки снизу для отклонения траектории от трубки $\mathcal{P}^e[\cdot]$, записанные в терминах относительных координат (2.5):

$$\|\zeta^e[k]\|_\infty - 1 \geq (\|\zeta^e[0]\|_\infty - 1) \prod_{l=1}^k \delta_{i_*[l]}^e \geq (\|\zeta^e[0]\|_\infty - 1) \prod_{l=1}^k \min_{1 \leq i \leq n} \delta_i^e[l], \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

где индексы $i_*[k]$ взяты из условий $i_*[k] \in \text{Argmax}_{1 \leq i \leq n} |\zeta_i^e[k-1]|$, аналогичных (3.4).

Доказательству теоремы предпошлим следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $S = \{s_i^j\} = I + \text{diag } \alpha \pm \Theta \Gamma$, где $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$, $\Theta = \{\theta_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\Gamma = \{\gamma_i^j\} \in \mathcal{G}^{m \times n}$, причем в формуле для S стоит любой из указанных знаков, и пусть $e + \alpha - \gamma > 0$, где $\gamma = (\text{Abs } \Theta) e$. Тогда $\det S \geq \prod_{j=1}^n (1 + \alpha_j - \gamma_j)$.

Доказательство. Сначала покажем, что S — матрица с доминирующей диагональю [19, § 7.2, упр. 3], т.е. $d_j \stackrel{\text{def}}{=} |s_j^j| - \sum_{k \neq j} |s_j^k| > 0$, $j = 1, \dots, n$. Заметим, что при $\Gamma \in \mathcal{G}^{m \times n}$ имеем $\|\Gamma\|_\infty \leq 1$ и $|\gamma_j^j| \leq 1$ для всех элементов Γ . Поэтому $|(\Theta \Gamma)_j^j| \leq \sum_k |\theta_j^k| = \gamma_j$ и тогда в силу условия $e + \alpha - \gamma > 0$ получаем $|1 + \alpha_j \pm (\Theta \Gamma)_j^j| = 1 + \alpha_j \pm (\Theta \Gamma)_j^j$. Следовательно,

$$\begin{aligned} d_j &= 1 + \alpha_j \pm (\Theta \Gamma)_j^j - \sum_{k \neq j} |(\Theta \Gamma)_j^k| \geq 1 + \alpha_j - \sum_k |(\Theta \Gamma)_j^k| \\ &\geq 1 + \alpha_j - \sum_l |\theta_j^l| \sum_k |\gamma_l^k| \geq 1 + \alpha_j - \sum_l |\theta_j^l| \cdot \|\Gamma\|_\infty \geq 1 + \alpha_j - \gamma_j > 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Осталось применить утверждение из [19, § 7.2, упр. 4] о том, что для матрицы S с доминирующей диагональю $\det S \geq \prod_{j=1}^n d_j$. \square

Доказательство теоремы 2. Первое утверждение получается по индукции на основе формул (4.2), где все матрицы $A[k]$ и $\bar{P}^e[N]$ — неособые, с привлечением леммы 1 и условия (4.5).

Далее рассуждения проводятся по схеме доказательства теоремы 1 с использованием относительных координат (2.5). При этом с учетом (2.1)–(2.3), (4.1), (2.5) для $k-1$ и (4.2) приходим аналогично (3.8) к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \zeta^e[k] &= \bar{P}^e[k]^{-1}(x[k] - p^e[k]) = \bar{P}^e[k]^{-1}A[k]P^e[k-1]\zeta^e[k-1] + \Xi^e[k]\xi[k] + \Theta^e[k]\chi^{II}[k, x[k-1]] \\ &= \text{diag}(e + \alpha^e[k])\zeta^e[k-1] - \Theta^e[k]\Gamma^e[k]\zeta^e[k-1] + \Xi^e[k]\xi[k] + \Theta^e[k]\chi^{II}[k, x[k-1]]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если $\|\zeta^e[k-1]\|_\infty > 1$ и $i_*[k] \in \text{Argmax}_{1 \leq i \leq n} |\zeta_i^e[k-1]|$, то $\|\zeta^e[k-1]\|_\infty = |\zeta_{i_*[k]}^e[k-1]| > 1$. Положим без ограничения общности, что $\zeta_{i_*[k]}^e[k-1] > 1$. При этом

$$\zeta_{i_*[k]}^e[k-1] = |\zeta_{i_*[k]}^e[k-1]| = \|\zeta^e[k-1]\|_\infty = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = \varepsilon[k-1] > 0. \quad (4.9)$$

Далее для упрощения записи формул будем опускать в очевидных местах у большинства величин индекс k . Тогда из (4.8) с учетом неравенств $\text{Abs}(\Xi^e \xi) \leq \alpha^e$, аналогичных указанным в (3.10), а также (4.4) и (4.9), получаем, что

$$\begin{aligned} \zeta_{i_*}^e[k] &= (1 + \alpha_{i_*}^e)\zeta_{i_*}^e[k-1] - e^{i_* \top} \Theta^e \Gamma^e \zeta^e[k-1] + e^{i_* \top} \Xi^e \xi + e^{i_* \top} \Theta^e \chi^{II}[k, x[k-1]] \\ &\geq (1 + \alpha_{i_*}^e)\zeta_{i_*}^e[k-1] - \alpha_{i_*}^e + (-1 + (\max\{\|\zeta^e[k-1]\|_\infty, 1\})^{-1})e^{i_* \top} \Theta^e \Gamma^e \zeta^e[k-1] \\ &= (1 + \alpha_{i_*}^e)(1 + \varepsilon) - \alpha_{i_*}^e + (-1 + (1 + \varepsilon)^{-1})e^{i_* \top} \Theta^e \Gamma^e \zeta^e[k-1]. \end{aligned}$$

При условии $\|\Gamma^e\|_\infty \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} |e^{i \top} \Theta^e \Gamma^e \zeta^e[k-1]| &\leq \sum_l |(\Theta^e)_i^l| \cdot \sum_j |(\Gamma^e)_l^j| \cdot |\zeta_j^e[k-1]| \leq \sum_l |(\Theta^e)_i^l| \cdot \|\Gamma^e\|_\infty \cdot \|\zeta^e[k-1]\|_\infty \\ &\leq \gamma_i^e \cdot \|\zeta^e[k-1]\|_\infty, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \zeta_{i_*}^e[k] &\geq 1 + (1 + \alpha_{i_*}^e)\varepsilon + (-\varepsilon)(1 + \varepsilon)^{-1}\gamma_{i_*}^e(1 + \varepsilon) = 1 + (1 + \alpha_{i_*}^e - \gamma_{i_*}^e)\varepsilon \\ &= 1 + (1 + \alpha_{i_*}^e - \gamma_{i_*}^e)(\|\zeta^e[k-1]\|_\infty - 1), \end{aligned}$$

откуда следует справедливость второго и третьего утверждений теоремы. \square

5. Обсуждение способов I и II

Выше были представлены два способа решения задачи 4, дающие целые семейства ее частных решений. При этом $\mathcal{W}^e[0] \subseteq \bigcap \mathcal{P}^+[0]$ и $\mathcal{W}^e[0] \subseteq \bigcap \mathcal{P}^e[0]$, где $\mathcal{W}^e[0]$ — минимальное множество в задаче уклонения 2, а пересечения взяты по всем трубкам, которые могут быть найдены по формулам из теорем 1 и 2 соответственно. Имеем следующую ситуацию. Пусть построено несколько трубок $\mathcal{P}^{+,i}[\cdot]$ по формулам из теоремы 1 или несколько трубок $\mathcal{P}^{e,j}[\cdot]$ по формулам из теоремы 2. Отметим, что каждая из них может быть найдена независимо от остальных, что открывает возможности для параллельных вычислений. Пусть дана начальная точка x^0 . Если она оказывается вне хотя бы одного из параллелотопов $\mathcal{P}^{+,i}[0]$ или $\mathcal{P}^{e,j}[0]$, то, используя соответствующие стратегии управления v^I или v^{II} , можно гарантированно обеспечить уклонение от целевого множества \mathcal{M} в конечный момент времени.

Очевидно, что при решении полиэдральной задачи уклонения желательно, чтобы параллелотопы $\mathcal{P}^{+,i}[0]$ и $\mathcal{P}^{e,j}[0]$ оказывались как можно меньше. Их размеры зависят от выбранных значений параметров семейств. Выделение в семействах элементов, наилучших в смысле какого-либо критерия, нелокального или локального, представляет собой отдельную задачу [2, § 2.7; 10, разд. 8.3].

Сравним локальные свойства трубок $\mathcal{P}^+[\cdot]$ и $\mathcal{P}^e[\cdot]$, считая выполненным следующее предположение.

Предположение 2. *Положим, что для некоторого $k \in \{N, \dots, 1\}$ параллелотопы $\mathcal{P}^+[k]$ и $\mathcal{P}^e[k]$ невырождены и совпадают: $\mathcal{P}^+[k] = \mathcal{P}^e[k]$, $\text{vol } \mathcal{P}^+[k] = \text{vol } \mathcal{P}^e[k] > 0$.*

Напомним, что объем невырожденного параллелотопа $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}]$ определяется формулой [20, гл. IX, § 5]: $\text{vol } \mathcal{P} = 2^n |\det \bar{P}|$.

З а м е ч а н и е 3. При выполнении предположения 2 имеем $\delta^+[k] = \delta^e[k]$, где $\delta^+[k]$ и $\delta^e[k]$ определены в (3.6) и (4.5), и условие (3.6), которое оказывается наложено в теореме 1 при таком k , совпадает с соответствующим условием в (4.5) из теоремы 2. Кроме того, в гарантированных оценках для уклонения (3.7) и (4.6) сомножители типа $\min_{1 \leq i \leq n} \delta_i^e[l]$ в произведениях, соответствующие шагу l , удовлетворяющему предположению 2, получаются одинаковыми.

Утверждение 1. *Пусть для системы (2.1)–(2.2) выполнено предположение 1. Пусть при некотором $k \in \{N, \dots, 1\}$ параллелотопы $\mathcal{P}^+[k-1]$ и $\mathcal{P}^e[k-1]$ находятся по формулам (3.1), (3.2) и (4.1), (4.2) соответственно, где $\Gamma^e[k]$ — произвольные матрицы, удовлетворяющие условию $\|\Gamma^e[k]\|_\infty \leq 1$, причем выполнены предположение 2 и условие из (3.6) (и, следовательно, из (4.5)). Тогда на этом шаге:*

- (1) $\text{vol } \mathcal{P}^+[k-1] \leq \text{vol } \mathcal{P}^e[k-1]$ при любой допустимой матрице $\Gamma^e[k]$;
- (2) ни при какой допустимой матрице $\Gamma^e[k]$ по формулам (4.1)–(4.2) нельзя получить параллелотоп $\mathcal{P}^e[k-1]$, удовлетворяющий строгому включению $\mathcal{P}^e[k-1] \subset \mathcal{P}^+[k-1]$;
- (3) в случае $n = 1$ имеем $\mathcal{P}^+[k-1] \subseteq \mathcal{P}^e[k-1]$, какова бы ни была $\Gamma^e[k] \in \mathcal{G}^{n_v \times n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства первого утверждения достаточно сравнить $|\det \mathcal{P}^+[k-1]|$ и $|\det \mathcal{P}^e[k-1]|$, которые ввиду (3.2) и (4.2) отличаются друг от друга множителями типа $|\det(I + \text{diag}(\alpha - \gamma))|$ и $|\det(I + \text{diag} \alpha - \Theta \Gamma)|$ соответственно, и применить лемму 1.

Второе утверждение следует из первого, поскольку в силу монотонности по включению функционала объема из $\mathcal{P}^e[k-1] \subset \mathcal{P}^+[k-1]$ получалось бы $\text{vol } \mathcal{P}^e[k-1] < \text{vol } \mathcal{P}^+[k-1]$, что противоречит неравенству, доказанному выше.

При $n = 1$ все величины в (3.2) и (4.2) — скалярные, и, с учетом леммы 1 для одномерного случая несложно видеть, что $|\bar{P}^e[k-1]| \geq |A[k]^{-1}| \cdot |\bar{P}^e[k]| \cdot (1 + \alpha^e[k] - \gamma^e[k]) = |\bar{P}^+[k-1]|$, откуда согласно определению параллелотопа вытекает включение $\mathcal{P}^+[k-1] \subseteq \mathcal{P}^e[k-1]$. \square

При $n > 1$ включение $\mathcal{P}^+[k-1] \subseteq \mathcal{P}^e[k-1]$ доказать не удалось. Заметим, что с привлечением аппарата опорных функций такое включение эквивалентно совокупности неравенств

$\rho(\pm l^{e,i} | \mathcal{P}^+[k-1]) \leq \rho(\pm l^{e,i} | \mathcal{P}^e[k-1])$, $l^{e,i} = (\mathcal{P}^e[k-1]^{-1})^\top e^i$, $i = 1, \dots, n$, где $\pm l^{e,i}$ — нормали к граням $\mathcal{P}^e[k-1]$. Вместо этого несложно проверить следующее утверждение.

Утверждение 2. В условиях утверждения 1 при любой матрице $\Gamma^e[k] \in \mathcal{G}^{n_v \times n}$ справедливы следующие неравенства для значений опорных функций:

$$\rho(\pm l^{+,i} | \mathcal{P}^e[k-1]) \geq \rho(\pm l^{+,i} | \mathcal{P}^+[k-1]), \quad l^{+,i} = (\mathcal{P}^+[k-1]^{-1})^\top e^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $T = (I + \text{diag } \alpha - \text{diag } \gamma)^{-1}(I + \text{diag } \alpha - \Theta\Gamma)$, где α , γ , Θ и Γ — такие же, как в лемме 1, и $e + \alpha - \gamma > 0$. Тогда $(\text{Abs } T)e \geq e$.

Доказательство. Заметим, что при $\Gamma \in \mathcal{G}^{m \times n}$ имеем для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ согласно промежуточным оценкам из (4.7), что $\sum_j |(\Theta\Gamma)_i^j| \leq \gamma_i$, а если к тому же $e + \alpha - \gamma > 0$, то $|1 + \alpha_i - (\Theta\Gamma)_i^i| = 1 + \alpha_i - (\Theta\Gamma)_i^i$. Поэтому для компонент вектора $t = (\text{Abs } T)e$ получаем

$$\begin{aligned} t_i &= (|1 + \alpha_i - (\Theta\Gamma)_i^i| + \sum_{j \neq i} |(\Theta\Gamma)_i^j|) / |1 + \alpha_i - \gamma_i| = (1 + \alpha_i - (\Theta\Gamma)_i^i + \sum_{j \neq i} |(\Theta\Gamma)_i^j|) / (1 + \alpha_i - \gamma_i) \\ &\geq (1 + \alpha_i - \sum_j |(\Theta\Gamma)_i^j|) / (1 + \alpha_i - \gamma_i) \geq 1. \quad \square \end{aligned}$$

Доказательство утверждения 2. Вычислим и сравним значения опорных функций из (5.1), считая без ограничения общности одинаковыми центры параллелотопов $\mathcal{P}^+[k-1]$ и $\mathcal{P}^e[k-1]$ нулевыми и применяя формулу для опорной функции параллелотопа [12]: $\rho(l | \mathcal{P}[p, \bar{P}]) = l^\top p + (\text{Abs } (l^\top \bar{P}))e$. Принимая во внимание специальный выбор векторов $l^{+,i}$, получаем

$$\rho(\pm l^{+,i} | \mathcal{P}^+[k-1]) = (\text{Abs } (e^{i^\top} \bar{P}^+[k-1]^{-1} \bar{P}^+[k-1]))e = 1.$$

А учитывая соотношения (3.2) и (4.2) и предположение 2, имеем выражения типа

$$\rho(\pm l^{+,i} | \mathcal{P}^e[k-1]) = (\text{Abs } (e^{i^\top} (I + \text{diag } \alpha - \text{diag } \gamma)^{-1} \bar{P}^{-1} A A^{-1} (\bar{P} (I + \text{diag } \alpha) - C \bar{Q} \Gamma)))e.$$

Осталось воспользоваться леммой 2. □

Замечание 4. Соотношения (5.1) означают, что все те вершины параллелотопа $\mathcal{P}^e[k-1]$, на которых достигаются значения опорных функций в (5.1) на всех $2n$ векторах, задающих нормали к граням $\mathcal{P}^+[k-1]$, лежат вне $\text{int } \mathcal{P}^+[k-1] = \bigcup_{\varepsilon \in (0,1]} \mathcal{P}[p^+[k-1], (1-\varepsilon)\bar{P}^+[k-1]]$.

Замечание 5. Доказанные при выполнении предположения 2 для $k \in \{N, \dots, 1\}$ соотношения $\text{vol } \mathcal{P}^+[k-1] \leq \text{vol } \mathcal{P}^e[k-1]$ и (5.1) в случае $k > 1$ не могут гарантировать, что подобные неравенства будут справедливы и для $\mathcal{P}^+[0]$ и $\mathcal{P}^e[0]$. Однако в численных экспериментах в модельных примерах для систем, полученных путем дискретизации по Эйлера дифференциальных систем, при вычислении нескольких трубок $\mathcal{P}^{+,i}[\cdot]$ и $\mathcal{P}^{e,j}[\cdot]$ оказывалось, что трубка с наименьшим по объему сечением в момент $k = 0$ — это трубка $\mathcal{P}^+[\cdot]$, построенная в силу (3.1)–(3.2) при $P_f^+ = P_f$, где P_f — матрица ориентации целевого параллелепипеда \mathcal{M} из (2.3), когда имеем $\mathcal{P}^+[N] = \mathcal{M}$. Один из таких примеров приведен ниже.

6. Пример

Проиллюстрируем решение задачи 4 на примере системы, полученной путем дискретизации по Эйлера двумерной колебательной системы, рассматриваемой на интервале времени $t \in [0, \theta]$:

$$A[k] \equiv I + h_N \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}, \quad B[k] \equiv h_N \cdot (0, 1)^\top, \quad \mathcal{R}[k] \equiv \mathcal{P}(0, I, 1) \subseteq \mathbb{R}^1, \quad C[k] \equiv h_N \cdot (1, 0)^\top,$$

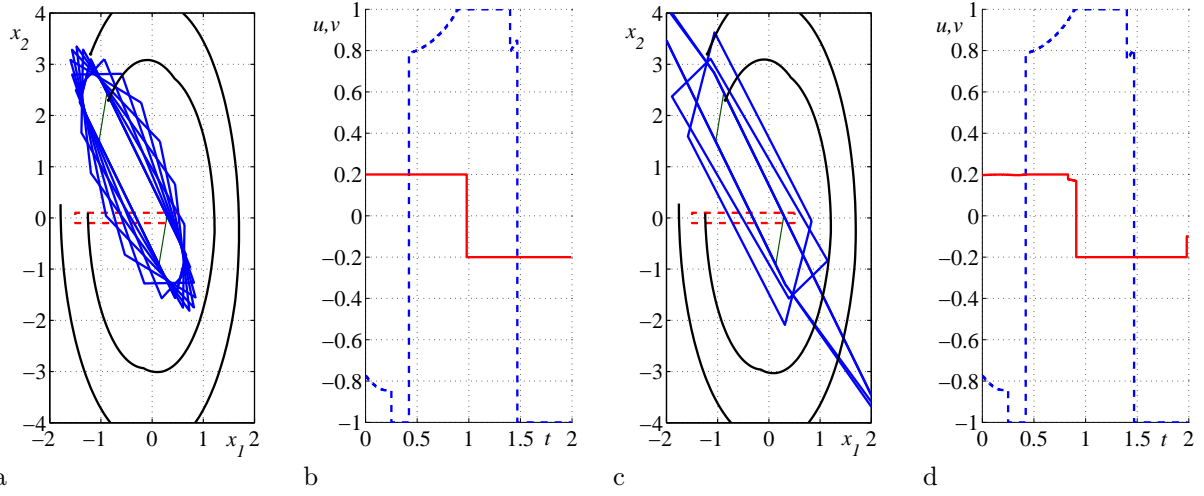


Рис. 1. Результаты полиэдрального синтеза управлений в примере: а, b — способ I, с, d — способ II. Управления u для $x^{0,2}$ показаны штриховыми линиями, v — сплошными.

$$\mathcal{Q}[k] \equiv \mathcal{P}(0, I, 0.2) \subseteq \mathbb{R}^1, \quad \mathcal{M} = \mathcal{P}((-0.5, 0)^\top, I, (1, 0.1)^\top), \quad h_N = \theta/N, \quad \theta = 2, \quad N = 200.$$

Были найдены семь трубок $\mathcal{P}^{+,i}[\cdot]$ по формулам (3.1), (3.2) из теоремы 1 и четыре трубки $\mathcal{P}^{e,j}[\cdot]$ по формулам (4.1), (4.2) из теоремы 2. Параметры трубок выбраны аналогично [18, разд. IV]. Параллелотопозначные сечения $\mathcal{P}^{+,i}[0]$ и $\mathcal{P}^{+,j}[0]$ показаны толстыми линиями на частях рис. 1а, рис. 1с соответственно. Объемы сечений $\mathcal{P}^{+,i}[0]$, $i = 1, \dots, 7$, оказались равны 2.3789, 3.3204, 4.0025, 4.3782, 4.3653, 3.9730, 3.2727, причем минимальный, равный 2.3789, получился у трубки $\mathcal{P}^{+,1}[\cdot]$, соответствующей $P_f^+ = P_f$, у которой $\mathcal{P}^{+,1}[N] = \mathcal{M}$. Объемы сечений $\mathcal{P}^{e,j}[0]$, $j = 1, \dots, 4$, оказались равны 4.6666, 5.7698, 4.3743, 4.18957, причем минимальный, равный 4.18957, получился у трубки $\mathcal{P}^{e,4}[\cdot]$, соответствующей функции $\Gamma^{e,4}[\cdot]$, значения которой конструируются по специальной формуле исходя из соображений “локальной минимизации объема” и малости h_N (подробнее см. в [18, разд. IV]). Заметим, что выбор параметра $\Gamma^e[\cdot]$ является ключевым для получения меньших трубок; один из возможных эффективных эвристических способов его выбора предложен в [17, разд. 3]. Также построена трубка $\mathcal{P}^a[\cdot]$, дающая одно из решений задачи 3 и найденная по формулам [15, (8)–(10), (13)], примененным для случая нашей линейной системы (2.1)–(2.3), в которых значения параметра $\Gamma[\cdot]$ вычислены по специальной формуле исходя из соображений “локальной максимизации объема” и малости h_N (подробнее см. в [18, разд. IV]). Сечение $\mathcal{P}^a[0]$ показано на частях рис. 1а, рис. 1с тонкими линиями; целевое множество \mathcal{M} изображено штриховыми линиями.

Рассмотрены две начальные точки: $x^{0,1} = (-0.85, 2.3)^\top$ и $x^{0,2} = (-1.2, 3.2)^\top$. Для каждой из них выделены трубки $\mathcal{P}^{+,i^*}[\cdot]$ и $\mathcal{P}^{e,j^*}[\cdot]$ с максимальным значением величин типа $\|\bar{P}^{-1}(x^0 - p)\|_\infty$ и использованы соответствующие стратегии управления $v^I[\cdot, \cdot]$ и $v^{II}[\cdot, \cdot]$. В качестве $u[\cdot, \cdot]$ применена стратегия управления для решения задачи сближения 3, соответствующая построенной трубке $\mathcal{P}^a[\cdot]$, аналогичная (4.4) и подобная [15, формулы (14)–(15)]. Результаты моделирования траекторий $x^1[\cdot]$ и $x^2[\cdot]$, исходящих из $x^{0,1}$ и $x^{0,2}$, а также найденные значения управлений u и v для $x^{0,2}$ представлены на рис. 1. При обоих управлениях v^I и v^{II} получили, что для траекторий x^1 (для которых $x^{0,1} \in \mathcal{P}^a[0]$) имеем $x^1[N] \in \mathcal{M}$, как гарантируется теоретически аналогично [15, теорема 3.1], а $x^2[N] \notin \mathcal{M}$, как и гарантируется теоремами 1 и 2.

7. Заключение

В работе представлены и исследованы две схемы решения задачи целевого уклонения с заданным конечным моментом времени с помощью полиэдральных (параллелотопозначных) трубок. Указаны рекуррентные соотношения для упомянутых трубок и стратегии управления,

которые могут быть вычислены на основе этих трубок. Привлекательное свойство предлагаемого метода заключается в том, что построение полиэдральных трубок и стратегий управления основано на явных формулах и может проводиться в реальном времени на компьютерах с невысокой мощностью. Доказанные в работе теоремы 1 и 2, обосновывающие обе схемы, усиливают результаты, приведенные нами ранее в [18], и отличаются, во-первых, более слабыми условиями (3.6) и (4.5), обеспечивающими к тому же выполнение налагаемых прежде дополнительных условий [18, (16)], и, во-вторых, тем, что предоставляют гарантированные оценки снизу для величины отклонения траектории от сечений трубок, последнее из которых содержит целевое множество. При сравнении локальных свойств обеих схем оказалась, что первая схема не хуже второй в смысле объемов параллелотопов — сечений трубок, которые могут быть вычислены по соответствующим формулам на очередном шаге при условии совпадения сечений в исходный момент. Представляется, что описанный метод может быть особенно полезен для важного класса многошаговых систем, полученных дискретизацией аналогичных дифференциальных систем, поскольку, подобно [15, замечание 3], при этом матрицы $A[k]$ при достаточно мелком шаге дискретизации оказываются неособыми, а также можно обратиться к некоторым эвристическим способам выбора параметра $\Gamma^e[\cdot]$, аналогичным предложенным ранее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. NY: Springer, 1988. 517 p.
2. **Kurzanski A.B., Vályi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
3. **Kurzanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. (Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85). doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
4. **Taras'ev A.M., Tokmantsev T.B., Uspenskii A.A., Ushakov V.N.** On procedures for constructing solutions in differential games on a finite interval of time // J. Math. Sci. 2006. Vol. 139, no. 5. P. 6954–6975. doi: 10.1007/s10958-006-0400-7.
5. **Bertsekas D.P., Rhodes I.B.** On the minimax reachability of target sets and target tubes // Automatica. 1971. Vol. 7, no. 2. P. 233–247. doi: 10.1016/0005-1098(71)90066-5.
6. **Запх М.А., Пацко В.С.** Стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 193–200.
7. **Botkin N., Martynov K., Turova V., Diepolder J.** Generation of dangerous disturbances for flight systems // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9, no. 3. P. 628–651. doi: 10.1007/s13235-018-0259-5.
8. **Esterhuizen W., Wang Q.** Control design with guaranteed transient performance: An approach with polyhedral target tubes // Automatica. 2020. Vol. 119. Art. no. 109097. doi: 10.1016/j.automatica.2020.109097.
9. **Матвийчук А.Р., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Ушаков В.Н.** Задача о сближении нелинейной управляемой системы на конечном промежутке времени // Прикл. математика и механика. 2017. Т. 81, № 2. С. 165–187.
10. **Черноузько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
11. **Filippova T.F.** Control and estimation for a class of impulsive dynamical systems // Ural Math. J. 2019. Vol. 5, no. 2. P. 21–30. doi: 10.15826/umj.2019.2.003.
12. **Kostousova E.K.** Outer polyhedral estimates for attainability sets of systems with bilinear uncertainty // J. Appl. Math. Mech. 2002. Vol. 66, no. 4. P. 547–558. doi: 10.1016/S0021-8928(02)00073-4.
13. **Kurzanskiy A.A., Varaiya P.** Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances // Automatica. 2011. Vol. 47, no. 7. P. 1414–1426. doi: 10.1016/j.automatica.2011.02.009.
14. **Kostousova E.K.** On target control synthesis under set-membership uncertainties using polyhedral techniques // IFIP Advances in Information and Communication Technology. 2014. Vol. 443. P. 170–180. doi: 10.1007/978-3-662-45504-3_16.

15. **Koustousova E.K.** On polyhedral control synthesis for dynamical discrete-time systems under uncertainties and state constraints // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2018. Vol. 38, no. 12. P. 6149–6162. doi: 10.3934/dcds.2018153.
16. **Martynov K., Botkin N., Turova V., Diepolder J.** Real-time control of aircraft take-off in windshear. Part I: Aircraft model and control schemes // *IEEE Xplore Digital Library*. 2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017), July 3–6, 2017, Valletta, Malta: Proc. P. 277–284. doi: 10.1109/MED.2017.7984131.
17. **Martynov K., Botkin N., Turova V., Diepolder J.** Quick construction of dangerous disturbances in conflict control problems // *Annals of the International Society of Dynamic Games*. 2020. Vol. 17. P. 3–24. doi: 10.1007/978-3-030-56534-3_1.
18. **Koustousova E.K.** On a polyhedral method for solving an evasion problem for linear discrete-time systems // *IEEE Xplore Digital Library*. 2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB), June 3-5, 2020, Moscow, Russia: Proc. 4 p. doi: 10.1109/STAB49150.2020.9140471.
19. **Ланкастер П.** Теория матриц. М.: Наука, 1982. 272 с.
20. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 560 с.

Поступила 23.03.2021

После доработки 18.05.2021

Принята к публикации 24.05.2021

Костоусова Елена Кирилловна

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: kek@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. NY : Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8.
2. Kurzhanski A.B., Vályi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Basel: Birkhäuser, 1997, 321 p. ISBN: 978-0-8176-3699-9.
3. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation*, Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85, Basel: Birkhäuser, 2014, 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
4. Taras'ev A.M., Tokmantsev T.B., Uspenskii A.A., Ushakov V.N. On procedures for constructing solutions in differential games on a finite interval of time. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 139, no. 5, pp. 6954–6975. doi: 10.1007/s10958-006-0400-7.
5. Bertsekas D.P., Rhodes I.B. On the minimax reachability of target sets and target tubes. *Automatica*, 1971, vol. 7, no. 2, pp. 233–247. doi: 10.1016/0005-1098(71)90066-5.
6. Zarkh M.A., Patsko V.S. The second player's strategy in a linear differential game. *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, no. 2, pp. 150–155. doi: 10.1016/0021-8928(87)90056-6.
7. Botkin N., Martynov K., Turova V., Diepolder J. Generation of dangerous disturbances for flight systems. *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, no. 3, pp. 628–651. doi: 10.1007/s13235-018-0259-5.
8. Esterhuizen W., Wang Q. Control design with guaranteed transient performance: An approach with polyhedral target tubes. *Automatica*, 2020, vol. 119, art. no. 109097. doi: 10.1016/j.automatica.2020.109097.
9. Matviychuk A.R., Ukhobotov V.I., Ushakov A.V., Ushakov V.N. The approach problem of a nonlinear controlled system in a finite time interval. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, vol. 81, no. 2, pp. 114–128. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.005.
10. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoidov*. (Estimation of the phase state of dynamical systems. The method of ellipsoids.) Moscow: Nauka Publ., 1988, 319 p. ISBN: 5-02-013899-1.

11. Filippova T.F. Control and estimation for a class of impulsive dynamical systems. *Ural Math. J.*, 2019, vol. 5, no. 2, pp. 21–30. doi: 10.15826/umj.2019.2.003.
12. Kostousova E.K. Outer polyhedral estimates for attainability sets of systems with bilinear uncertainty. *J. Appl. Math. Mech.*, 2002, vol. 66, no. 4, pp. 547–558. doi: 10.1016/S0021-8928(02)00073-4.
13. Kurzhanskiy A.A., Varaiya P. Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances. *Automatica*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1414–1426. doi: 10.1016/j.automatica.2011.02.009.
14. Kostousova E.K. On target control synthesis under set-membership uncertainties using polyhedral techniques. *IFIP Advances in Information and Communication Technology*, 2014, vol. 443, pp. 170–180. doi: 10.1007/978-3-662-45504-3_16.
15. Kostousova E.K. On polyhedral control synthesis for dynamical discrete-time systems under uncertainties and state constraints. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2018, vol. 38, no. 12, pp. 6149–6162. doi: 10.3934/dcds.2018153.
16. Martynov K., Botkin N., Turova V., Diepolder J. Real-time control of aircraft take-off in windshear. Part I: Aircraft model and control schemes. In: *IEEE Xplore Digital Library. 2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017), July 3–6, 2017, Valletta, Malta: Proc.*, pp. 277–284. doi: 10.1109/MED.2017.7984131.
17. Martynov K., Botkin N., Turova V., Diepolder J. Quick construction of dangerous disturbances in conflict control problems. *Annals of the International Society of Dynamic Games*, 2020, vol. 17, pp. 3–24. doi: 10.1007/978-3-030-56534-3_1.
18. Kostousova E.K. On a polyhedral method for solving an evasion problem for linear discrete-time systems. In: *IEEE Xplore Digital Library. 2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB), June 3–5, 2020, Moscow, Russia: Proc.*, 4 p. doi: 10.1109/STAB49150.2020.9140471.
19. Lankaster P. *Theory of matrices*. NY; London: Acad. Press, 1969, 326 p. ISBN: 0124355501. Translated to Russian under the title *Teoriya matrirts*. Moscow: Nauka Publ., 1982, 272 p.
20. Gantmacher F.R. *The Theory of Matrices*. NY: AMS Chelsea Publ., 2000, 660 p. ISBN: 0821813765. Original Russian text published in Gantmakher F.R. *Teoriya matrirts*. Moscow: Fizmatlit Publ., 2010, 560 p.

Received March 23, 2021

Revised May 18, 2021

Accepted May 24, 2021

Elena Kirillovna Kostousova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: kek@imm.uran.ru.

Cite this article as: E. K. Kostousova. On the polyhedral method of control synthesis in the problem of target evasion in discrete-time systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 101–114.