ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

О ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕИЗВЕСТНОГО ВХОДА СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. С. Близорукова

Рассматривается задача динамического восстановления неизвестного входного воздействия, действующего на систему нелинейных по фазовым переменным и линейных по управлению обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной статье мы рассмотрим случай отсутствия мгновенных ограничений, т. е. будем считать, что неизвестное возмущение может быть неограниченным, являясь суммируемой с квадратом евклидовой нормы функцией. Принимая во внимание этот факт, мы конструируем устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения данной задачи, основанный на комбинации конструкций теории некорректных задач с известным в позиционных дифференциальных играх методом экстремального сдвига. Алгоритм ориентирован на случай “непрерывного” измерения фазовых состояний системы.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, устойчивое восстановление.

M. S. Blizorukova. On the reconstruction of an unknown input of a system of differential equations.

We study the problem of dynamic reconstruction of an unknown input acting on a system of ordinary differential equations nonlinear in the state variables and linear in the control. We consider the case of the absence of instantaneous constraints; i.e., we assume that the unknown perturbation can be unbounded, being a function summable with the square of the Euclidean norm. Taking this fact into account, we construct an algorithm for solving this problem that is resistant to information interferences and computational errors. The algorithm is based on a combination of constructions from the theory of ill-posed problems with the extremal shift method known in positional differential games. The algorithm is focused on the case of “continuous” measurement of the states of the system.

Keywords: system of differential equations, stable reconstruction.

MSC: 34A55, 49N45

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-59-66

1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot y(t) = f(t, y(t)) + B(t, y(t))u(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$y(0) = y_0.$$

Здесь $0 < \vartheta < +\infty$, $y \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}^r$, $f(t, y)$ и $B(t, y)$ — липшицевые (с константой Липшица L) по совокупности переменных векторная и матричная функции, u — возмущение. Предполагается, что на систему (1.1) действует неизвестное возмущение $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$. Измерения фазовых состояний системы (1.1) осуществляются с ошибкой непрерывно, т. е. в каждый момент $t \in T$ определяется вектор $\xi^h(t) \in \mathbb{R}^N$ со свойством

$$|\xi^h(t) - y(t)|_N \le \nu_h(t), \quad \Bigl(\int_0^{\vartheta} \nu_h^2(t)\,dt\Bigr)^{1/2} \le ch, \tag{1.2}$$

где функция $\xi^h(\cdot)$ является измеримой по Лебегу на T, $c = \text{const} > 0$, $\nu^h(t) \in (0,1)$ — величина ошибки измерения в момент t, число $h \in (0,1)$ характеризует точность измерения, символ $|\cdot|_N$ означает евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^N$. Требуется указать алгоритм приближенного восстановления неизвестного возмущения по результатам неточных измерений $y(t)$.

Сформулированная выше задача является задачей динамического восстановления (реконструкции). Один из подходов к решению задач динамической реконструкции входа для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, был развит в [1–10]. Подход основан на методах теории гарантированного управления [11] и методе сглаживающего функционала [12]. В случае, когда возмущение стеснено мгновенными ограничениями, обсуждаемая задача может быть решена на основе конструкций работ [1; 2; 5; 6]. В данной статье мы рассмотрим случай отсутствия мгновенных ограничений. Вследствие этого будем считать, что неизвестное возмущение может быть неограниченным, являясь функцией суммируемой с квадратом евклидовой нормы. Другие задачи динамического восстановления неограниченных управлений, методы решения которых основаны на соответствующих модификациях метода экстремального сдвига, обсуждались, например, в работах [3; 4; 7; 9; 10]. При этом в работах [3; 4] рассматривался случай измерения “всех” координат. Случай измерения части фазовых координат обсуждался в работах [7; 9; 10]. Следует отметить, что метод, применяемый к решению задачи реконструкции в настоящей работе, отличается от стандартных подходов (см., например, работы [14; 15]).

2. Метод решения задачи

Перейдем к описанию метода решения рассматриваемой задачи. Руководствуясь подходом, развитым в [1–3], заменим задачу динамической реконструкции задачей позиционного управления некоторой динамической системой, являющейся по существу копией исходной системы. В качестве такой вспомогательной системы возьмем систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{w}^h(t) = f(t, \xi^h(t)) + B(t, \xi^h(t))u^h(t), \quad t \in T, \tag{2.1}$$

с начальным состоянием $w^h(0) = \xi^h(0)$. Решение этой системы, как и решение системы (1.1), понимается в смысле Каратеодори. Управляющее воздействие $u^h(\cdot)$ в системе (2.1), определяемое по правилу

$$u^h(t) = U(\xi^h(t), w^h(t)), \quad t \in T, \tag{2.2}$$

будет аппроксимировать неизвестное возмущение $u(\cdot)$.

Следует отметить, что одно и то же решение системы (1.1) может вызываться не единственным возмущением. Пусть $\mathcal{U}(y(\cdot))$ — множество всех возмущений из $L_2(T;\mathbb{R}^r)$, порождающих решение $y(\cdot)$ системы (1.1), т. е.

$$\mathcal{U}(y(\cdot)) = \big\{\tilde{u}(\cdot) \in L_2(T;\mathbb{R}^r) : \dot{y}(t) - f(t, y(t)) = B(t, y(t))\tilde{u}(t) \ \text{ при п.в. } \ t \in T\big\}.$$

Символом $u_*(\cdot)$ обозначим минимальное по $L_2(T;\mathbb{R}^r)$-норме возмущение из $\mathcal{U}(y(\cdot))$, порождающее решение $y(\cdot)$ системы (1.1), т. е.

$$u_*(\cdot) = \arg \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(y(\cdot))} |u(\cdot)|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}.$$

Нетрудно видеть, что такое возмущение существует и единственно. Следуя принятому в теории некорректных задач подходу [12], мы будем восстанавливать $u_*(t)$. В дальнейшем символы $k_1, k_2, \dots, k^{(0)}, k^{(1)}, \dots, c^{(0)}, c^{(1)}, \dots$ будут означать положительные постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде, символ $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве, $|\cdot|$ — модуль числа, $\|\cdot\|$ — евклидову норму матрицы, штрих — транспонирование.

3. Алгоритм решения

Возьмем некоторую функцию $\alpha = \alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$.

Символом $\Xi(y(\cdot), h)$ обозначим совокупность всех измеримых функций $\xi^h(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (1.2). Будем полагать, что

$$\sup\big\{\|B(t,\xi^h(t))\| : \xi^h(\cdot) \in \Xi(y(\cdot),h), t \in T, h \in (0,1)\big\} \le b_* \le +\infty.$$

Очевидно, такое число b_* существует.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0,1)$ и число $\alpha = \alpha(h)$. Управление $u^h(\cdot)$ в системе (2.1) зададим по правилу (2.2), в котором положим

$$U(\xi^h(t), w^h(t)) = -\alpha^{-1} B'(t,\xi^h(t))(w^h(t) - \xi^h(t)). \tag{3.1}$$

На вход системы (2.1) при всех $t \in T$ будем подавать управление $u^h(\cdot)$ вида (2.2), (3.1).

Обозначим

$$\varepsilon(t) = 0.5|w^h(t) - y(t)|_N^2.$$

Лемма 1. *Пусть $u_*(\cdot) \in L_\infty(T;\mathbb{R}^r)$, $\alpha(h) \to 0$, $h\alpha^{-2}(h) \to 0$ при $h \to 0$. Тогда можно указать такое $h_* \in (0,1)$, что при всех $h \in (0,h_*)$ и некоторых положительных числах $c^{(0)}$, $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ (которые можно указать явно) справедливы неравенства*

$$\varepsilon(t) \le c^{(0)}(\alpha(h) + h\alpha^{-1}(h)), \tag{3.2}$$

$$\int_0^\vartheta |u^h(s)|_r^2\,ds \le (1 + c^{(1)}h\alpha^{-2}(h)) \int_0^\vartheta |u_*(s)|_r^2\,ds + c^{(2)}h\alpha^{-2}(h). \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим (см. (2.2), (3.1)), что

$$u^h(t) = \arg\min\big\{2\big(w^h(t) - \xi^h(t), B(t,\xi^h(t))u\big) + \alpha|u|_r^2 : u \in \mathbb{R}^r\big\}. \tag{3.4}$$

Продифференцировав функцию $\varepsilon(t)$, получим

$$2\dot\varepsilon(t) + \alpha\left(|u^h(t)|_r^2 - |u_*(t)|_r^2\right) = I_1 + I_2 + \alpha\left(|u^h(t)|_r^2 - |u_*(t)|_r^3\right), \tag{3.5}$$

где $\alpha = \alpha(h)$,

$$I_1 = 2\big(w^h(t) - y(t), f(t,\xi^h(t)) - f(t,y(t))\big), \quad I_2 = 2\big(w^h(t) - y(t), B(t,\xi^h(t))u^h(t) - B(t,y(t))u_*(t)\big).$$

Из (3.1), (1.2) имеем

$$|u_*(t)|_r \le \alpha^{-1}b_*|w^h(t) - \xi^h(t)|_N \le \alpha^{-1}b_*\nu_h(t) + \alpha^{-1}b_*(2\varepsilon(t))^{1/2}. \tag{3.6}$$

В силу (1.2), (3.6) верны неравенства

$$2\nu_h(t)b_*|u^h(t)|_r \le 2\nu_h(t)b_*\big[b_*\nu_h(t)\alpha^{-1} + b_*\alpha^{-1}(2\varepsilon(t))^{1/2}\big]$$
$$= 2\nu_h^2(t)b_*^2\alpha^{-1} + 2\nu_h(t)b_*^2\alpha^{-1}(2\varepsilon(t))^{1/2}, \tag{3.7}$$

$$\big|\big[B(t,y(t)) - B(t,\xi^h(t))\big]u_*(t)\big|_N \le L\nu_h(t)|u_*(t)|_r. \tag{3.8}$$

Воспользовавшись (3.8), выводим

$$I_1 \le 2(2\varepsilon(t))^{1/2}|f(t,\xi^h(t)) - f(t,y(t))|_N \le 2(2\varepsilon(t))^{1/2}L\nu_h(t), \tag{3.9}$$

$$I_2 \le 2(2\varepsilon(t))^{1/2}\big|B(t,\xi^h(t)) - B(t,y(t))\big|_N|u_*(t)|_r + 2\big(w^h(t) - y(t), B(t,\xi^h(t))(u^h(t) - u_*(t))\big)$$

$$\le 2(2\varepsilon(t))^{1/2}L\nu_h(t)|u_*(t)|_r$$

$$+\,2\nu_h(t)b_*(|u^h(t)|_r+|u_*(t)|_r)+2\big(w^h(t)-\xi^h(t),B(t,\xi^h(t))(u^h(t)-u_*(t))\big). \qquad (3.10)$$

Пусть

$$\gamma(t)=2\varepsilon(t)+\alpha\int\limits_0^t|u^h(s)|_r^2\,ds.$$

Тогда ввиду (3.4), (3.5), (3.7), (3.9), (3.10) справедлива оценка

$$\dot\gamma(t)-\alpha|u_*(t)|_r^2\le 2L\nu_h(t)(2\varepsilon(t))^{1/2}+2b_*\nu_h(t)|u_*(t)|_r$$

$$+\,2b_*^2\nu_h^2(t)\alpha^{-1}+2b_*^2\nu_h(t)\alpha^{-1}(2\varepsilon(t))^{1/2}+2L\nu_h(t)|u_*(t)|_r(2\varepsilon(t))^{1/2}. \qquad (3.11)$$

Воспользовавшись неравенством $2ab\le a^2+b^2$, получаем

$$2\nu_h(t)L(2\varepsilon(t))^{1/2}\le\nu_h(t)L^2+2\nu_h(t)\varepsilon(t),$$

$$2b_*^2\nu_h(t)\alpha^{-1}(2\varepsilon(t))^{1/2}\le 2b_*^4\nu_h(t)\alpha^{-2}+\nu_h(t)\varepsilon(t)\alpha^{-1}(h),$$

$$2\nu_h(t)L|u_*(t)|(2\varepsilon(t))^{1/2}\le\nu_h(t)L^2|u_*(t)|_r^2+2\nu_h(t)\varepsilon(t).$$

Из (3.11), принимая во внимание приведенные выше оценки, выводим

$$\dot\gamma(t)\le(\alpha+\nu_h(t)L^2)|u_*(t)|_r^2+2b_*\nu_h(t)|u_*(t)|_r$$

$$+\,2b_*^4\nu_h^2(t)\alpha^{-2}(h)+\nu_h(t)(4+\alpha^{-1}(h))\varepsilon(t)+\nu_h(t)\big(L^2+2b_*^2\alpha^{-1}(h)\nu_h(t)\big). \qquad (3.12)$$

В силу включения $u_*\in L_\infty(T;\mathbb{R}^r)$ можно указать число $K>0$ такое, что

$$\operatorname{vrai}\sup_{s\in[0,\vartheta]}|u_*(s)|_r\le K. \qquad (3.13)$$

Учитывая это неравенство, а также неравенства $2\varepsilon(t)\le\gamma(t)$, $\nu_h(t)\le 1$ и (3.12), будем иметь

$$\dot\gamma(t)\le\alpha|u_*(t)|_r^2+\big(L^2K+2b_*K+L^2+2\nu_h(t)b_*^2\alpha^{-1}(h)\big)\nu_h(t)$$

$$+\,2b_*^4\nu_h^2(t)\alpha^{-2}(h)+\nu_h(t)(4+\alpha^{-1}(h))\gamma(t)$$

$$\le\alpha|u_*(t)|_r^2+k^{(0)}\big(\alpha^{-1}(h)+\alpha^{-2}(h)\big)\nu_h^2(t)+k^{(1)}\nu_h(t)+\nu_h(t)(4+\alpha^{-1}(h))\gamma(t).$$

Применив неравенство Гронуолла [13, с. 487], получаем

$$\gamma(t)\le\Big[\alpha\int\limits_0^t|u_*(s)|_r^2\,ds+k^{(0)}(\alpha^{-2}(h)+\alpha^{-1}(h))\int\limits_0^t\nu_h^2(t)\,ds+k^{(1)}\int\limits_0^t\nu_h(s)\,ds\Big]$$

$$\times\Big[1+\int\limits_0^t\nu_h(\tau)(4+\alpha^{-1}(h))\Big(\exp\int\limits_\tau^t\nu_h(s)(4+\alpha^{-1}(h))\,ds\Big)\,d\tau\Big]. \qquad (3.14)$$

Далее, в силу (1.2), при $t\in T$

$$\int\limits_0^t\nu_h(s)\,ds\le\vartheta^{1/2}\Big(\int\limits_0^\vartheta\nu_h^2(s)\,ds\Big)^{1/2}\le\vartheta^{1/2}c\,h.$$

Из этого равенства следует, что $\exp\int_\tau^t\nu_h(s)(4+\alpha^{-1}(h))\,ds\le\exp\{(4+\alpha^{-1}(h))\vartheta^{1/2}c\,h\}$. Так как $\alpha(h)\to 0$ и $h\alpha^{-1}(h)\to 0$ при $h\to 0$, то найдется такое число $h_0\in(0,1)$, что при всех $h\in(0,h_0)$ справедливо

$$\exp\{h(4+\alpha^{-1}(h))\vartheta^{1/2}c\}\le 1+k^{(2)}h\alpha^{-1}(h). \qquad (3.15)$$

Таким образом,

$$\int_0^t \nu_h(\tau)(4+\alpha^{-1}(h))\Big[\exp\int_\tau^t \nu_h(s)(4+\alpha^{-1}(h))\,ds\Big]\,d\tau$$

$$\le (1+k^{(2)}h\alpha^{-1}(h))\,(4+\alpha^{-1}(h))\int_0^t \nu_h(\tau)\,d\tau$$

$$\le (4+\alpha^{-1}(h))\vartheta^{1/2}ch(1+k^{(2)}h\alpha^{-1}(h)). \tag{3.16}$$

Из (3.16), (3.15), (3.14) следует

$$\gamma(t) \le \Big[\alpha\int_0^t |u_*(s)|_r^2\,ds + k^{(0)}c^2h^2(\alpha^{-2}(h)+\alpha^{-1}(h)) + k^{(1)}\vartheta^{1/2}c\,h\Big]$$

$$\times\big[1+h(1+k^{(2)}h\alpha^{-1}(h))(4+\alpha^{-1}(h))\vartheta^{1/2}c\big]. \tag{3.17}$$

Ввиду сходимости $h\alpha^{-1}(h)\to 0$ при $h\to 0$ найдется также $h_*\in(0,h_0)$ такое, что при всех $h\in(0,h_*)$ верны неравенства

$$h\alpha^{-1}(h)\le 1,\quad h(1+k^{(2)}h\alpha^{-1}(h))\,(4+\alpha^{-1}(h))\vartheta^{1/2}c\le k^{(4)}h\alpha^{-1}(h). \tag{3.18}$$

Из (3.17), учитывая (3.18), получаем

$$\gamma(t)\le \alpha(1+k^{(4)}h\alpha^{-1}(h))\int_0^t |u_*(s)|_r^2\,ds + k^{(5)}h\alpha^{-1}(h)(1+h\alpha^{-1}(h))$$

$$=\alpha(1+k^{(4)}h\alpha^{-1}(h))\int_0^t |u_*(s)|_r^2\,ds + k^{(6)}h\alpha^{-1}(h). \tag{3.19}$$

Неравенства (3.2), (3.3) следуют из (3.19).

Лемма доказана.

Из приведенной выше леммы стандартным образом (см., например, доказательство [3, теорема 1.2.3]) следует доказательство ниже приведенной теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда* $u^h(\cdot)\to u_*(\cdot)$ *в* $L_2(T;\mathbb{R}^r)$ *при* $h\to 0$.

4. Оценка скорости сходимости алгоритма

Для получения оценки скорости сходимости нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2 [3, с. 29]. *Пусть* $x_1(\cdot)\in L_\infty(T_*;\mathbb{R}^n)$, $y_1(\cdot)\in W(T_*;\mathbb{R}^n)$, $T_*=[a,b]$, $-\infty<a<b<+\infty$,

$$\Big|\int_a^t x_1(\tau)\,d\tau\Big|_n\le\varepsilon,\quad |y_1(t)|_n\le K\quad\forall\, t\in T_*.$$

Тогда при всех $t\in T_*$ *верно неравенство*

$$\Big|\int_a^t (x_1(\tau),y_1(\tau))\,d\tau\Big|\le\varepsilon[K+\mathrm{var}(T_*;y_1(\cdot))].$$

Здесь символ $\mathrm{var}(T_*; y_1(\cdot))$ означает вариацию функции $y_1(\cdot)$ на отрезке T_*, а символ $W(T_*; \mathbb{R}^n)$ — множество функций $y(\cdot) : T_* \to \mathbb{R}^n$ с ограниченной вариацией.

Теорема 2. *Пусть $u_*(\cdot)$ — функция ограниченной вариации, B — не зависящая от t, у (стационарная) матрица, $N \geq r$, $\mathrm{rank}\, B = r$. Пусть также выполнены условия теоремы* 1. *Тогда можно указать константу $c^{(3)} > 0$ такую, что при всех $h \in (0, h_*)$ верно неравенство*

$$\int\limits_0^\vartheta |u^h(\tau) - u_*(\tau)|_r^2 \, d\tau \leq c^{(3)} \rho_0(\alpha, h), \tag{4.1}$$

где $\rho_0(\alpha, h) = \alpha^{1/2} + h^{1/2}\alpha^{-1/2} + h\alpha^{-2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая липшицевость функции f, а также неравенство (1.2), заключаем, что для любых t_1, $t_2 \in T$, $t_1 < t_2$ справедливо неравенство

$$\Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} B(u^h(t) - u_*(t))\, dt \Big|_N = \Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} \big[\dot{w}^h(\tau) - \dot{y}(\tau) - f(\tau, \xi^h(\tau)) + f(\tau, y(\tau))\big]\, d\tau \Big|_N$$

$$\leq |\mu_h(t_2) - \mu_h(t_1)|_N + k_1 \int\limits_{t_1}^{t_2} |\xi^h(\tau) - y(\tau)|_N \, d\tau$$

$$\leq |\mu_h(t_2) - \mu_h(t_1)|_N + L \int\limits_{t_1}^{t_2} \nu_h(\tau)\, d\tau,$$

где $\mu_h(t) = w^h(t) - y(t)$. Заметим, что

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \nu_h(\tau)\, d\tau \leq (t_2 - t_1)^{1/2} \Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} \nu_h^2(\tau)\, d\tau \Big)^{1/2} \leq \vartheta^{1/2} c\, h. \tag{4.2}$$

В силу леммы 1 (см. (3.2)) $|\mu_h(t)|_N = (2\varepsilon(t))^{1/2} \leq k_1(\alpha + h\alpha^{-1})^{1/2}$. Отсюда, учитывая (4.2), выводим

$$\Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} (u^h(t) - u_*(t))\, dt \Big|_r \leq k_2 \Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} B(u^h(t) - u_*(t))\, dt \Big|_N \leq k_3(\alpha^{1/2} + h^{1/2}\alpha^{-1/2} + h). \tag{4.3}$$

Снова воспользовавшись леммой 1 (см. (3.3)), получаем

$$\int\limits_0^\vartheta |u^h(\tau) - u_*(\tau)|_r^2 \, d\tau = \int\limits_0^\vartheta |u^h(\tau)|_r^2 \, d\tau - 2 \int\limits_0^\vartheta \big(u^h(\tau), u_*(\tau)\big)\, d\tau + \int\limits_0^\vartheta |u_*(\tau)|_r^2 \, d\tau$$

$$\leq \big(2 + c^{(1)} h\alpha^{-2}\big) \int\limits_0^\vartheta |u_*(\tau)|_r^2 \, d\tau - 2 \int\limits_0^\vartheta \big(u^h(\tau), u_*(\tau)\big)\, d\tau + c^{(2)} h\alpha^{-2}$$

$$= 2 \int\limits_0^\vartheta \big(u_*(\tau) - u^h(\tau), u_*(\tau)\big)\, d\tau + c^{(1)} h\alpha^{-2} \int\limits_0^\vartheta |u_*(\tau)|_r^2 \, d\tau + c^{(2)} h\alpha^{-2}, \quad t \in T. \tag{4.4}$$

Учитывая лемму 2, а также (4.3) и (3.13), будем иметь

$$\sup_{t\in T}\left|\int\limits_0^t \big(u_*(\tau)-u^h(\tau),u_*(\tau)\big)\,d\tau\right| \le k_4(\alpha^{1/2}+h^{1/2}\alpha^{-1/2}+h). \tag{4.5}$$

Из (4.4), (4.5) следует неравенство (4.1).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что, если $\alpha(h)=c^{(4)}h^{1/4}$, то имеет место неравенство

$$\int\limits_0^\vartheta |u^h(t)-u_*(t)|_r^2\,dt \le c^{(5)}h^{1/4},$$

где положительная постоянная $c^{(5)}$ не зависит от h и α.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 238 с.
2. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
3. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 291 с.
4. **Максимов В.И., Пандолфи Л.** О реконструкции неограниченных управлений в нелинейных динамических системах // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, № 4. С. 385–390.
5. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** Об одном алгоритме динамического восстановления входного воздействия // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 1. С. 88–100.
6. **Близорукова М.С.** О динамической реконструкции входа управляемой системы // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 7. С. 859–864.
7. **Максимов В.И.** Реконструкция входного воздействия динамической системы при измерении части координат фазового вектора // Журн. выч. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 5. С. 752–761.
8. **Maksimov V.I.** The methods of dynamical reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations // J. Inverse and Ill-posed Prob. 2021. Vol. 29, № 1. P. 125–156.
9. **Blizorukova M., Maksimov V.** On one algorithm for reconstruction of a disturbance in a linear system of ordinary differential equations // Archive of Control Sciences. 2020. Vol. 30, no. 4. P. 757–773.
10. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме реконструкции входных воздействий в линейных системах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 5. С. 11–20.
11. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М., Наука, 1974. 456 с.
12. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978. 285 с.
13. **Стюарт Д.Е.** Динамика систем с неравенствами. М.; Ижевск: Ижевский Ин-т компьютерных исследований, 2013. 530 с.
14. **Keller J.Y., Chabir K., Sauter D.** Input reconstruction for networked control systems subject to deception attacks and data losses on control signals // Int. J. Syst. Sci. 2016. Vol. 47, № 4. P. 814–820. doi: 10.1080/00207721.2014.906683 .
15. **Chabir K., Sid M.A., Sauter D.** Fault diagnosis in a networked control system under communication constraints: A quadrotor applications // Int. J. Apll. Math. Comput. Sci. 2014. Vol. 24, № 4. P. 809–820. doi: 10.2478/amcs-2014-0060 .

Поступила 11.03.2021
После доработки 2.04.2021
Принята к публикации 12.04.2021

Близорукова Марина Сергеевна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: msb@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Osipov Y.S., Vasil'ev F.P., Potapov M.M. *Osnovy metoda dinamicheskoi regulyarizatsii* (The basics of the dynamic regularization method). Moscow: MSU Publ., 1999, 238 p. ISBN: 5-211-04085-6.
2. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* Basel: Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 9782881249440.
3. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem* (Dynamic recovery methods of inputs of control systems). Ekaterinburg: UrO RAN, 2011, 291 p. ISBN: 978-5-7691-2219-4.
4. Maksimov V.I., Pandolfi L. The reconstruction of unbounded controls in non-linear dynamical systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 2001, vol. 65, no. 3, pp. 371–376. doi: 10.1016/S0021-8928(01)00042-9.
5. Blizorukova M.S., Maksimov V.I. On an algorithm for dynamic reconstruction of the input. *Diff. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 88–100. doi: 10.1134/S0012266113010096.
6. Blizorukova M.S. On the dynamic reconstruction of the input of a control system. *Diff. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 7, pp. 847–853. doi: 10.1134/S0012266114070015.
7. Maksimov V.I. Input reconstruction in a dynamic system from measurements of a part of phase coordinates. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2019, vol. 59, no. 5, pp. 752–761 (in Russian). doi: 10.1134/S0044466919040124.
8. Maksimov V.I. The methods of dynamical reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations. *J. Inverse and Ill-posed Prob.*, 2021, vol. 29, no. 1, pp. 125–156. doi: 10.1515/jiip-2020-0040.
9. Blizorukova M., Maksimov V. On one algorithm for reconstruction of a disturbance in a linear system of ordinary differential equations. *Archive of Control Sciences*, 2020, vol. 30, no. 4, pp. 757–773. doi: 10.24425/acs.2020.135851.
10. Maksimov V.I. On one algorithm of input action reconstruction for linear systems. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2009, vol. 48, no. 5, pp. 681–690. doi: 10.1134/S1064230709050037.
11. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
12. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Methods for the solution of ill-posed problems). Moscow: Nauka Publ., 1978, 285 p.
13. Stewart D.E. *Dynamics with inequalities.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011, 410 p. ISBN: 978-1-61197-070-8. Translated to Russian under the title *Dinamika sistem s neravenstvami.* Moscow; Izhevsk: Izh. Inst. Komp. Issl., 2013, 530 p.
14. Keller J.Y., Chabir K., Sauter D. Input reconstruction for networked control systems subject to deception attacks and data losses on control signals. *Int. J. Syst. Sci.*, 2016, vol. 47, no. 4, pp. 814–820. doi: 10.1080/00207721.2014.906683.
15. Chabir K., Sid M.A., Sauter D. Fault diagnosis in a networked control system under communication constraints: A quadrotor applications. *Int. J. Apll. Math. Comput. Sci.*, 2014, vol. 24, no. 4, pp. 809–820. doi: 10.2478/amcs-2014-0060.

Received March 11, 2021
Revised April 2, 2021
Accepted April 12, 2021

Marina Sergeevna Blizorukova, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: msb@imm.uran.ru.

Cite this article as: M. S. Blizorukova. On the reconstruction of an unknown input of a system of differential equations, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 59–66.