ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С АСИМПТОТИЧЕСКИМ КОНЦЕВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ[1]

С. М. Асеев

При выполнении условий, характеризующих доминирование дисконтирующего множителя, получен полный вариант принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени со специальным асимптотическим концевым ограничением. Задачи такого типа возникают в математической экономике при исследовании моделей роста.

Ключевые слова: оптимальное управление, бесконечный горизонт, принцип максимума Понтрягина, асимптотическое концевое ограничение, модели роста, устойчивое развитие.

S. M. Aseev. Maximum principle for an optimal control problem with an asymptotic endpoint constraint.

Under conditions characterizing the dominance of the discounting factor, a complete version of the Pontryagin maximum principle for an optimal control problem with infinite time horizon and a special asymptotic endpoint constraint is developed. Problems of this type arise in mathematical economics in the studies of growth models.

Keywords: optimal control, infinite horizon, Pontryagin maximum principle, asymptotic endpoint constraint, growth models, sustainable development.

MSC: 49K15, 91B62

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-35-48

Введение

Начиная с работы Ф. Рамсея [25] различные модели экономического роста формулируются, как правило, в виде задач оптимального управления на бесконечном интервале времени (см., например, [1; 12]). В последние годы интерес многих исследователей вызывают вопросы не только оптимизации, но и поддержания темпов роста, а также взаимозависимости экономического роста и состояния окружающей среды. В этой связи рядом ведущих экономистов была предложена концепция *устойчивого развития* (см. [23]). Данная концепция выросла из доклада Римскому клубу “Пределы роста” [22] и вызванных им обсуждений как в научной литературе, так и в средствах массовой информации. Основной темой этих обсуждений является вопрос о неизбежности экологической деградации и социального коллапса в глобальном масштабе как последствий неуправляемого экономического роста.

Оптимальный рост необязательно является устойчивым в экономическом смысле этого термина. В экономической литературе оптимальность роста обычно понимается в смысле максимизации функционала полезности, задаваемого несобственным интегралом на бесконечном интервале времени, в котором интегрант есть дисконтированная функция мгновенного душевого потребления (см. [1; 12]). Устойчивость же роста означает выполнение определенных асимптотических условий, характеризующих душевое потребление и состояние окружающей среды в долгосрочной перспективе (подробнее см. [23; 31]).

Оптимальный экономический рост в экономике, основанной на эксплуатации исчерпаемого ресурса, изучали многие авторы (см., например, работы [4; 13; 17; 27; 28]). В этом случае оптимальный рост, как правило, приводит к асимптотическому исчерпанию используемого ресурса,

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

и поэтому он вряд ли может считаться устойчивым. В ситуации, когда экономика основана на использовании возобновляемого ресурса, вопрос об устойчивости оптимального экономического роста изучался в работах [30; 31] и [6]. В этом случае при определенных условиях оптимальный рост оказывается устойчивым[2].

В настоящей работе изучается задача оптимального управления на бесконечном интервале времени с дополнительным ограничением специального вида на асимптотическое поведение допустимых траекторий. Данное ограничение позволяет объединить концепции оптимального экономического роста и устойчивого развития в рамках одной модели. Для рассматриваемой задачи получены необходимые условия оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Понтрягина. Заметим, что ранее различные варианты принципа максимума для задач с асимптотическими концевыми ограничениями были получены в работах [15; 26; 29], однако в ситуации, когда у оптимальной траектории существует предел на бесконечности. В настоящей работе существование предела у оптимальной траектории не предполагается.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления (P):

$$J(x(\cdot),u(\cdot))=\int\limits_0^\infty e^{-\rho t}g(x(t),u(t))\,dt\to\max\,, \tag{1.1}$$

$$\dot x(t)=f(x(t),u(t)),\quad x(0)=x_0, \tag{1.2}$$

$$u(t)\in U, \tag{1.3}$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{t\ge T}h(x(t))\ge 0. \tag{1.4}$$

Здесь $x(t)=(x^1(t),\dots,x^n(t))\in\mathbb{R}^n$ и $u(t)=(u^1(t),\dots,u^m(t))\in\mathbb{R}^m$ — значения фазового вектора и вектора управления соответственно в момент времени $t\ge 0$; U — непустой выпуклый компакт из $\mathbb{R}^m$; $x_0\in\mathbb{R}^n$ — заданное начальное состояние; $\rho\ge 0$ — параметр дисконтирования. Предполагается, что $x_0\in G$, где G — заданное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Векторная функция $f\colon G\times U\to\mathbb{R}^n$ и скалярные функции $h\colon G\to\mathbb{R}^1$ и $g\colon G\times U\to\mathbb{R}^1$ предполагаются непрерывными вместе с производными $f_x(\cdot,\cdot)$, $h_x(\cdot)$ и $g_x(\cdot,\cdot)$ на множествах своего определения. Кроме того предполагается, что для любого $x\in G$ функция $g(x,\cdot)\colon U\to\mathbb{R}^1$ вогнута.

В качестве *допустимых управлений* в задаче (P) будем рассматривать все измеримые по Лебегу функции $u\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}^m$, удовлетворяющие для любого $t\ge 0$ ограничению (1.3). Для произвольного допустимого управления $u(\cdot)$ соответствующая ему *траектория* $x(\cdot)$ есть локально абсолютно непрерывное (единственное) решение задачи Коши (1.2), определенное в G на некотором конечном или бесконечном интервале $[0,\tau)$, $\tau>0$. Будем считать, что соответствующая любому допустимому управлению $u(\cdot)$ траектория $x(\cdot)$ определена в G на всем интервале $[0,\infty)$, т.е. $\tau=\infty$. Траекторию $x(\cdot)$, соответствующую допустимому управлению $u(\cdot)$, будем называть *допустимой* в задаче (P), если для нее выполняется асимптотическое ограничение (1.4). В этом случае пару $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ будем называть допустимой (в задаче (P)).

Заметим, что ограничение (1.4) составляет основную специфику задачи (P). Выполнение ограничения такого вида является, по-видимому, минимальным необходимым условием устойчивости экономического роста (см. обсуждение этого вопроса в [31, Sect. II]).

В дальнейшем будем считать выполненными следующие условия.

[2]Подробнее см. работу [6], где, в частности, получены необходимые и достаточные условия устойчивости оптимального роста в экономике, основанной на эксплуатации возобновляемого ресурса.

(**A1**) *Правая часть управляемой системы* (1.2) *аффинна по управлению, т.е. функция* $f(\cdot,\cdot)$ *имеет вид*

$$f(x,u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u^i, \quad x \in G, \quad u \in U,$$

где $f_i\colon G \to \mathbb{R}^n$, $i = 0,1,\ldots,m$, *— непрерывно дифференцируемые функции.*

(**A2**) *Существует такая функция* $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}^1$, *что* $\omega(t) \to +0$ *при* $t \to \infty$ *и для любой допустимой пары* $(x(\cdot),u(\cdot))$ *имеем*

$$\left| \int_T^{T'} e^{-\rho t} g(x(t),u(t))\,dt \right| \le \omega(T), \quad 0 \le T \le T'.$$

Из условия (A1), выпуклости и компактности множества U, а также предположения о том, что соответствующая любому допустимому управлению $u(\cdot)$ траектория $x(\cdot)$ определена в G на всем бесконечном интервале времени $[0,\infty)$, вытекает, что для любого $T>0$ множество всех траекторий системы (1.2) является компактом в пространстве $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ (см. [3, лемма 1; 18, теорема 3, § 7]). Нетрудно видеть, что в силу условия (A2) для любой допустимой пары $(x(\cdot),u(\cdot))$ существует конечный предел

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-\rho t} g(x(t),u(t))\,dt.$$

Это обстоятельство дает основание понимать оптимальность допустимой пары $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ в задаче (P) в сильном смысле, т. е. $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ — (сильно) *оптимальная* допустимая пара в (P), если значение функционала $J(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ является максимальным на множестве всех допустимых пар.

Пусть $u(\cdot)$ — допустимое управление, а $x(\cdot)$ — соответствующая ему траектория. Обозначим через $Y_{(x,u)}(\cdot)$ и $Z_{(x,u)}(\cdot)$ — нормированные в нулевой момент времени фундаментальные матричные решения линейных систем

$$\dot{y}(t) = f_x(x(t),u(t))y(t) \quad \text{и} \quad \dot{z}(t) = -\left[f_x(x(t),u(t))\right]^* z(t)$$

соответственно. Так как пара $(x(\cdot),u(\cdot))$ определена на $[0,\infty)$, то функции $Y_{(x,u)}(\cdot)$ и $Z_{(x,u)}(\cdot)$ также определены на всем интервале $[0,\infty)$. Как известно, $\left[Z_{(x,u)}(t)\right]^{-1} \equiv \left[Y_{(x,u)}(t)\right]^*$, $t \ge 0$.

В силу компактности множества всех траекторий системы (1.2) в пространстве $C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $T>0$, существует такая непрерывная функция $M\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$, что для любого допустимого управления $u(\cdot)$ и соответствующей ему траектории $x(\cdot)$ выполняется условие

$$\left\| Y_{(x,u)}(t) \right\| \le M(t), \quad t \ge 0. \tag{1.5}$$

Положим (см. определение функции $\omega(\cdot)$ в (A2))

$$m(t) = \min{}_{s\ge 0\colon |s-t|\le 1} \frac{1}{1+M(s)}, \quad \mu(t) = \frac{\omega(t)}{m(t)}, \quad t \ge 0. \tag{1.6}$$

Следующее условие характеризует доминирование дисконтирующего множителя в (P).

(**A3**) *Выполняются следующие условия*:

(i) *Справедливо равенство*

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t) = 0. \tag{1.7}$$

(ii) *Существуют такая функция* $\nu\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^1$, $\nu(t) \to +0$ *при* $t \to \infty$, *что для любой допустимой пары* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *справедлива оценка*

$$\left\| \int\limits_T^{T'} e^{-\rho s} \left[Z_{(x,u)}(s)\right]^{-1} g_x(x(s), u(s))\, ds \right\| \le \nu(T), \quad 0 \le T \le T'. \tag{1.8}$$

Нетрудно видеть, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ из оценки (1.8) вытекает существование конечного предела

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_t^T e^{-\rho s} \left[Z_{(x,u)}(s)\right]^{-1} g_x(x(s), u(s))\, ds, \quad t \ge 0.$$

Подробнее условие (A3) обсуждается ниже в разд. 3.

Будем считать, что ограничение (1.4) регулярно в смысле выполнения следующего условия.

(**A4**) *Существуют такие постоянные* $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$ *и* $\gamma_1 > 0$, *что для любого* $x \in G$, *удовлетворяющего неравенству* $|h(x)| \le \varepsilon_0$, *имеем*

$$\gamma_0 \le \|h_x(x)\| \le \gamma_1.$$

Наконец, будем предполагать, что выполняется следующее условие, характеризующее асимптотическую управляемость системы (1.2) относительно ограничения (1.4).

(**A5**) *Существует такая постоянная* $\varepsilon_1 > 0$, *что если для соответствующей допустимому управлению* $u(\cdot)$ *траектории* $x(\cdot)$ *в момент времени* $\tau \ge 0$ *выполняется неравенство* $h(x(\tau)) \ge -\varepsilon_1$, *то, переопределив в случае необходимости управление* $u(\cdot)$ *на интервале* $[\tau, \infty)$, *всегда можно считать, что пара* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *является допустимой в задаче* (P).

2. Основной результат

Для получения необходимых условий оптимальности для задачи (P) будем использовать метод конечно-временных аппроксимаций (см. [3; 5]). При этом (если не оговорено противное) будем предполагать выполненными условия (A1)–(A5).

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — заданная оптимальная допустимая пара в задаче (P). Выберем такие последовательность непрерывно дифференцируемых векторных функций

$$\{z_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}, \quad z_k\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^m,$$

и последовательность положительных чисел $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$, что

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|z_k(t)\| \le \max{}_{u\in U}\|u\| + 1, \tag{2.1}$$

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-(\rho+1)t} \|z_k(t) - u_*(t)\|^2\, dt \le \frac{1}{2^k}, \tag{2.2}$$

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|\dot{z}_k(t)\| \le \sigma_k < \infty, \tag{2.3}$$

$$\sigma_k \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Легко видеть, что такие последовательности $\{z_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ всегда существуют.

Выберем такую возрастающую последовательность $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, $T_1 > 1$, что

$$\lim_{k\to\infty} T_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} h(x_*(T_k)) = \limsup_{t\to\infty} h(x_*(t))$$

и, кроме того, для любого $k = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$\max_{t\colon |t-T_k|\le 1}\mu(t) \le \frac{1}{2^k(1+\sigma_k)}, \quad h(x_*(T_k)) \ge -\frac{1}{k}. \tag{2.4}$$

Здесь функция $\mu(\cdot)$ определена вторым равенством в (1.6). В силу условия (i) в (A3) и выполнения ограничения (1.4) для траектории $x_*(\cdot)$ такая последовательность $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует.

Для $k = 1, 2, \ldots$ положим $m_k = m(T_k)$ (см. первое равенство в (1.6)) и определим задачу (P_k) со свободным временем T окончания процесса управления следующим образом:

$$J_k(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T e^{-\rho t}\Big[g(x(t), u(t)) - \frac{e^{-t}m_k}{1+\sigma_k}\|u(t) - z_k(t)\|^2\Big]\,dt$$

$$- \|x(T) - x_*(T_k)\|^2 - (T - T_k)^2 \to \max\,, \tag{2.5}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{2.6}$$

$$u(t) \in U, \tag{2.7}$$

$$h(x(T)) \ge -\frac{1}{k}, \quad |T - T_k| \le 1. \tag{2.8}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $x_0 \in G$, векторная функция $f(\cdot,\cdot)$, скалярная функция $g(\cdot,\cdot)$, параметр дисконтирования ρ, множества U и G те же самые, что и в исходной задаче (P). Как обычно, в качестве допустимых управлений в задаче (P_k) рассматриваются все измеримые векторные функции $u\colon [0, T] \to U$, определенные на различных интервалах времени $[0, T]$, $T > 0$, $|T - T_k| \le 1$. Траектория $x(\cdot)$ управляемой системы (2.6) допустима, если для допустимого управления $u(\cdot)$ она является абсолютно непрерывным решением задачи Коши (2.6) в G на соответствующем интервале $[0, T]$ и выполняются ограничения (2.8). Так определенную последовательность $\{(P_k)\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть последовательностью *аппроксимирующих задач*, соответствующих оптимальной в задаче (P) паре $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$. Очевидно, что пара $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, рассматриваемая на интервале $[0, T_k]$, является допустимой в задаче (P_k) для любого $k = 1, 2, \ldots$.

Из второго условия в (2.8) следует, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ в задаче (P_k) время T окончания процесса управления ограничено. Следовательно, в силу теоремы Филиппова (см. [16, Ch. 9]) для любого $k = 1, 2, \ldots$ в (P_k) существует оптимальная допустимая пара $(x_k(\cdot), u_k(\cdot))$, определенная на соответствующем интервале $[0, \widetilde{T}_k]$, $\widetilde{T}_k > 0$, $|\widetilde{T}_k - T_k| \le 1$. В силу (A5) и первого условия в (2.8) можно считать, что эта пара $(x_k(\cdot), u_k(\cdot))$ продолжена с интервала времени $[0, \widetilde{T}_k]$ на весь интервал $[0, \infty)$ допустимым для задачи (P) образом.

Доказательство следующего вспомогательного результата аналогично доказательству леммы 7.1 из [5, §7] (см. также доказательство леммы 2 в [3]).

Лемма 1. *Пусть для задачи* (P) *выполняются условия* (A1)–(A3), (A5), $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — *заданная оптимальная допустимая пара в задаче* (P) *и* $\{(P_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — *соответствующая паре* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *последовательность аппроксимирующих задач* (*см.* (2.5)–(2.8)). *Наконец, пусть* $(x_k(\cdot), u_k(\cdot))$ — *оптимальная пара в задаче* (P_k), *а* $\widetilde{T}_k$ — *соответствующее оптимальное время,* $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда для любого* $T > 0$ *при всех достаточно больших номерах* k *выполняются неравенства*

$$\int_0^T \|u_k(t) - u_*(t)\|^2\,dt \le \frac{1 + 3e^{(\rho+1)T}}{2^{k-1}}, \tag{2.9}$$

$$\big\|x(\widetilde{T}_k) - x_*(T_k)\big\|^2 \le \frac{3m_k}{2^k(1+\sigma_k)}, \quad \big(\widetilde{T}_k - T_k\big)^2 \le \frac{3m_k}{2^k(1+\sigma_k)}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Поскольку пара $(x_k(\cdot),u_k(\cdot))$ оптимальна в задаче (P_k), $k=1,2,\dots$, а пара $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ допустима в этой задаче, то

$$\int\limits_0^{\widetilde{T}_k} e^{-\rho t}\Big[g(x_k(t),u_k(t)) - \frac{e^{-t}m_k}{1+\sigma_k}\|u_k(t)-z_k(t)\|^2\Big]dt - \big\|x_k(\widetilde{T}_k)-x_*(T_k)\big\|^2 - \big(\widetilde{T}_k-T_k\big)^2$$

$$\ge \int\limits_0^{T_k} e^{-\rho t}\Big[g(x_*(t),u_*(t)) - \frac{e^{-t}m_k}{1+\sigma_k}\|u_*(t)-z_k(t)\|^2\Big]dt.$$

Следовательно,

$$\frac{m_k}{1+\sigma_k}\int\limits_0^{\widetilde{T}_k} e^{-(\rho+1)t}\|u_k(t)-z_k(t)\|^2\,dt + \big\|x_k(\widetilde{T}_k)-x_*(T_k)\big\|^2 + \big(\widetilde{T}_k-T_k\big)^2$$

$$\le \int\limits_0^{\widetilde{T}_k} e^{-\rho t}g(x_k(t),u_k(t))\,dt - \int\limits_0^{T_k} e^{-\rho t}g(x_*(t),u_*(t))\,dt + \frac{m_k}{1+\sigma_k}\int\limits_0^{T_k} e^{-(\rho+1)t}\|u_*(t)-z_k(t)\|^2\,dt.$$

Поскольку пара $(x_k(\cdot),u_k(\cdot))$ допустима в задаче $(\widetilde{P}_k)$, то в силу (A2), условия (2.2), первого неравенства в (2.4), оптимальности пары $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ в (P) и допустимости пары $(x_k(\cdot),u_k(\cdot))$ в этой задаче для произвольного $T>0$ и любого достаточно большого k получаем

$$\frac{e^{-(\rho+1)T}m_k}{1+\sigma_k}\int\limits_0^{T}\|u_k(t)-z_k(t)\|^2\,dt + \big\|x_k(\widetilde{T}_k)-x_*(T_k)\big\|^2 + \big(\widetilde{T}_k-T_k\big)^2$$

$$\le \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}g(x_k(t),u_k(t))\,dt - \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}g(x_*(t),u_*(t))\,dt$$

$$+\frac{2m_k}{2^k(1+\sigma_k)} + \frac{m_k}{2^k(1+\sigma_k)} \le \frac{3m_k}{2^k(1+\sigma_k)}.$$

Значит, для всех достаточно больших номеров k имеем

$$\big\|x_k(\widetilde{T}_k)-x_*(T_k)\big\|^2 \le \frac{3m_k}{2^k(1+\sigma_k)}, \quad \big(\widetilde{T}_k-T_k\big)^2 \le \frac{3m_k}{2^k(1+\sigma_k)}$$

и

$$\int\limits_0^{T}\|u_k(t)-u_*(t)\|^2\,dt \le 2\int\limits_0^{T}\big(\|u_k(t)-z_k(t)\|^2 + \|u_*(t)-z_k(t)\|^2\big)\,dt \le \frac{1+3e^{(\rho+1)T}}{2^{k-1}}.$$

Лемма доказана.

Поскольку в силу (2.9) для любого $T>0$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T \|u_k(t)-u_*(t)\|^2\,dt$$

сходится, как геометрическая прогрессия, то в силу теоремы Леви (см. [20, гл. V, § 5]) имеем

$$\|u_k(t)-u_*(t)\|^2 \to 0 \quad \text{при п.в.} \quad t\in[0,T].$$

Откуда для соответствующей последовательности $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ получаем

$$\|x_k(\cdot) - x_*(\cdot)\|_{C([0,T],\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Определим функцию Гамильтона—Понтрягина $\mathcal{H}\colon [0,\infty) \times G \times U \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ и гамильтониан $H\colon [0,\infty) \times G \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ задачи (P) стандартным образом:

$$\mathcal{H}(t,x,u,\psi^0,\psi) = \langle \psi, f(x,u)\rangle + \psi^0 e^{-\rho t} g(x,u),$$

$$H(t,x,\psi^0,\psi) = \sup_{u\in U} \mathcal{H}(t,x,u,\psi^0,\psi).$$

Следующий результат дает необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для задачи (P).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (A1)–(A5) *и* $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ — *оптимальная допустимая пара в задаче* (P). *Тогда существуют такие не обращающиеся одновременно в нуль число* $\psi^0 \geq 0$ *и вектор* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *что выполняются следующие условия*:

(i) *Функция* $\psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, *определенная равенством*

$$\psi(t) = Z_*(t)\xi + \psi^0 Z_*(t) \int_t^{\infty} e^{-\rho t}[Z_*(s)]^{-1} g_x(x_*(s),u_*(s))\,ds, \quad t \geq 0, \tag{2.11}$$

локально абсолютно непрерывна и удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума, т.е. $\psi(\cdot)$ *является решением сопряженной системы*

$$\dot\psi(t) = -\mathcal{H}_x(t,x_*(t),u_*(t),\psi^0,\psi(t)), \tag{2.12}$$

и выполняется условие максимума

$$\mathcal{H}(t,x_*(t),u_*(t),\psi^0,\psi(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} H(t,x_*(t),\psi^0,\psi(t)). \tag{2.13}$$

(ii) *Выполняется условие стационарности гамильтониана*

$$H(t,x_*(t),\psi^0,\psi(t)) = \psi^0 \rho \int_t^{\infty} e^{-\rho s} g(x_*(s),u_*(s))\,ds, \quad t \geq 0. \tag{2.14}$$

(iii) *Выполняется включение*

$$\xi \in \operatorname{Ls}_{t\to\infty} \Big\{ [Z_*(t)]^{-1} N_*(t) \Big\}.$$

Здесь $Z_*(\cdot)$ — *нормированное в нулевой момент времени фундаментальное матричное решение системы*

$$\dot z(t) = -f_x^*(t,x_*(t),u_*(t))z(t),$$

многозначное отображение $N(\cdot)$ *определяется равенством*

$$N_*(t) = \bigcup_{\lambda\geq 0} \{\lambda h_x(x_*(t))\}, \quad t \geq 0,$$

а множество

$$\operatorname{Ls}_{t\to\infty}\big\{ [Z_*(t)]^{-1} N_*(t)\big\} = \Big\{ \zeta \in \mathbb{R}^n\colon \exists \{t_k\}_{k=1}^{\infty},\ \lim_{k\to\infty} t_k = \infty,$$
$$\exists\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty},\ \lambda_k \geq 0,\ \zeta = \lim_{k\to\infty} \lambda_k [Z_*(t_k)]^{-1} h_x(x_*(t_k)) \Big\}$$

— *верхний топологический предел многозначного отображения* $t \mapsto [Z_*(t)]^{-1} N_*(t)$ *при* $t \to \infty$ (*см.* [21, § 29]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x_k(\cdot), u_k(\cdot))$ — оптимальная допустимая пара и $\widetilde{T}_k$ — соответствующее оптимальное время в задаче (P_k), $k = 1, 2, \ldots$. В силу второго неравенства в (2.10) леммы 1 можно считать, что для всех номеров k имеем $|\widetilde{T}_k - T_k| < 1$, т.е. второе неравенство в (2.8) выполняется как строгое. Тогда существует такая тройка $(\psi_k^0, \psi_k(\cdot), \lambda_k)$ сопряженных переменных, соответствующих $(x_k(\cdot), u_k(\cdot))$, что для всех достаточно больших k пара $(x_k(\cdot), u_k(\cdot))$ удовлетворяет соотношениям принципа максимума Понтрягина для задачи (P_k) вместе с $(\psi_k^0, \psi_k(\cdot), \lambda_k)$. Это означает (см. [2, § 4.2]), что $\psi_k^0 \geq 0$, $\psi_k(\cdot) \in AC([0, \widetilde{T}_k], \mathbb{R}^n)$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^1$, $\lambda_k \geq 0$ и $\lambda_k = 0$, если $h(x_k(\widetilde{T}_k)) > -1/k$, пара (ψ_k^0, λ_k) ненулевая и на интервале времени $[0, \widetilde{T}_k]$ выполняются условия

$$\dot{\psi}_k(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -\left[f_x(x_k(t), u_k(t))\right]^* \psi_k(t) - \psi_k^0 e^{-\rho t} g_x(x_k(t), u_k(t)), \tag{2.15}$$

$$\mathcal{H}_k(t, x_k(t), u_k(t), \psi_k^0, \psi_k(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} H_k(t, x_k(t), \psi_k^0, \psi_k(t)), \tag{2.16}$$

$$\psi_k(\widetilde{T}_k) = 2\psi_k^0\big(x_k(\widetilde{T}_k) - x_*(T_k)\big) + \lambda_k h_x(x_k(\widetilde{T}_k)), \tag{2.17}$$

$$H(\widetilde{T}_k, x_k(\widetilde{T}_k), \psi_k^0, \psi_k(\widetilde{T}_k)) = 2\psi_k^0\big(\widetilde{T}_k - T_k\big). \tag{2.18}$$

Будем считать, что для каждого k функция $\psi_k(\cdot)$ продолжена на весь интервал $[0, \infty)$ постоянной по непрерывности, т.е. $\psi_k(t) \equiv \psi_k(\widetilde{T}_k)$, $t \geq \widetilde{T}_k$.

Отметим, что сопряженная система (2.15) и условие максимума (2.16) влекут абсолютную непрерывность функции $t \mapsto H_k\left(t, x_k(t), \psi_k^0, \psi_k(t)\right)$ на интервале $[0, \widetilde{T}_k]$ и выполнение следующего условия стационарности гамильтониана для задачи (P_k) (см. [24]):

$$\frac{d}{dt} H_k\left(t, x_k(t), \psi_k^0, \psi_k(t)\right) \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_k\left(t, x_k(t), u_k(t), \psi_k^0, \psi_k(t)\right). \tag{2.19}$$

В силу условий (2.15), (2.17) и формулы Коши для линейных систем (см. [19, Ch. 4]) для произвольного $t \geq 0$ и любого $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\begin{aligned}\psi_k(t) = Z_k(t)\big[Z_k(\widetilde{T}_k)\big]^{-1}\big\{2\psi_k^0\big(x_k(\widetilde{T}_k) - x_*(T_k)\big) + \lambda_k h_x(x_k(\widetilde{T}_k))\big\} \\ + \psi_k^0 Z_k(t) \int\limits_t^{\widetilde{T}_k} e^{-\rho s} \left[Z_k(s)\right]^{-1} g_x(x_k(s), u_k(s))\, ds.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Здесь $Z_k(\cdot)$ — матричное решение линейной системы

$$\dot{z}(t) = -\left[f_x(x_k(t), u_k(t))\right]^* z(t)$$

с начальным условием $Z_k(0) = I$, где I — единичная диагональная $n \times n$ матрица. Как и пара $(x_k(\cdot), u_k(\cdot))$, матричная функция $Z_k(\cdot)$ определена на всем интервале $[0, \infty)$.

Для любого $k = 1, 2, \ldots$ пара (ψ_k^0, λ_k) — ненулевая, что в силу условия (2.20) эквивалентно неравенству $\psi_k^0 + \|\psi_k(0)\| > 0$. Поэтому, домножая тройку $(\psi_k^0, \psi_k(\cdot), \lambda_k)$ на положительный множитель, без ограничения общности можно считать, что для всех k выполняется равенство

$$\psi_k^0 + \|\psi_k(0)\| = 1. \tag{2.21}$$

Откуда, переходя, если требуется, к подпоследовательности, получаем $\psi_k^0 \to \psi^0$, $\psi_k(0) \to \psi_0$ при $k \to \infty$, где $0 \leq \psi^0 \leq 1$, $\psi_0 \in \mathbb{R}^n$, и

$$\psi^0 + \|\psi_0\| = 1. \tag{2.22}$$

Рассмотрим последовательность локально абсолютно непрерывных функций $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ на $[0, \infty)$. Поскольку для любого $T > 0$ множество всех траекторий системы (1.2) — компакт в пространстве $C([0,T],\mathbb{R}^n)$, то последовательность $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ решений сопряженной системы (2.15) с удовлетворяющими (2.21) начальными состояниями $\psi_k(0)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на любом конечном интервале $[0,T]$, $T>0$. Поэтому в силу теоремы Арцела—Асколи, переходя, если требуется, к подпоследовательности, без ограничения общности можно считать, что существует такая локально абсолютно непрерывная функция $\psi:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$, что для произвольного $T>0$ последовательность $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $\psi(\cdot)$ в пространстве $C([0,T],\mathbb{R}^n)$, в частности, $\psi(0)=\psi_0=\lim_{k\to\infty}\psi_k(0)$. Таким образом, так определенная пара $(\psi^0,\psi(\cdot))$ ненулевая, а в силу леммы 1 она удовлетворяют на $[0,\infty)$ сопряженной системе (2.12) и условию максимума (2.13).

Возможны два случая:

1) существует такая последовательность номеров $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $\lambda_{k_i}=0$;

2) для всех достаточно больших номеров k имеем $\lambda_k>0$ и $h(x(T_k))=-1/k$.

Рассмотрим случай 1). Тогда, переходя, если требуется, к подпоследовательности, можно считать, что для всех $k=1,2,\dots$ имеем $\lambda_k=0$, а условие (2.20) принимает вид

$$\psi_k(t)=2\psi_k^0 Z_k(t)\big[Z_k(\widetilde{T}_k)\big]^{-1}(x_k(\widetilde{T}_k))-x_*(T_k))$$
$$+\,\psi_k^0 Z_k(t)\int\limits_t^{\widetilde{T}_k} e^{-\rho s}\big[Z_k(s)\big]^{-1}g_x(x_k(s),u_k(s))\,ds. \tag{2.23}$$

Так как $\big[Z_k(\widetilde{T}_k)\big]^{-1}=\big[Y_k(\widetilde{T}_k)\big]^*$ и $\big\|Y_k(\widetilde{T}_k)\big\|m_k\le 1$ (см. (1.5) и (1.6)), то из леммы 1 и условия (1.8), переходя в (2.23) к пределу при $k\to\infty$, получаем

$$\psi(t)=\psi^0 Z_*(t)\int\limits_t^{\infty} e^{-\rho s}\big[Z_*(s)\big]^{-1}g_x(x_*(s),u_*(s))\,ds,\quad t\ge 0.$$

Поскольку пара $(\psi(\cdot),\psi^0)$ ненулевая и удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума, то всегда можно считать, что $\psi^0=1$. Отсюда, условие (2.11) выполняется с $\psi^0=1$ и $\xi=0$. Данное условие совпадает с поточечным описанием сопряженной переменной, полученным ранее в работах [3; 5; 7–9] для задач на бесконечном интервале времени без асимптотических концевых ограничений на допустимые траектории при выполнении различных условий типа доминирования дисконтирующего множителя. Таким образом, в первом случае оба условия (i) и (iii) выполняются с ненулевой парой (ψ^0,ξ), где $\psi^0=1$ и $\xi=0$.

Рассмотрим случай 2). Тогда в силу (A4) без ограничения общности можно считать, что для всех $k=1,2,\dots$ имеем $\lambda_k>0$ и $0<\gamma_0\le\|h_x(x_k(\widetilde{T}_k))\|\le\gamma_1$. Определим вектор $\xi_k\in\mathbb{R}^n$ равенством

$$\xi_k=\lambda_k h_x(x_k(\widetilde{T}_k)).$$

В силу условия (2.20) имеем

$$\psi_k(0)=2\psi_k^0\big[Z_k(\widetilde{T}_k)\big]^{-1}\big(x_k(\widetilde{T}_k)-x_*(T_k)\big)+\big[Z_k(\widetilde{T}_k)\big]^{-1}\xi_k$$
$$+\,\psi_k^0\int\limits_0^{\widetilde{T}_k} e^{-\rho s}\big[Z_k(s)\big]^{-1}g_x(x_k(s),u_k(s))\,ds,\quad k=1,2,\dots,$$

или, что эквивалентно,

$$\big[Z_k(\widetilde{T}_k)\big]^{-1}\xi_k=\psi_k(0)-2\psi_k^0\big[Z_k(\widetilde{T}_k)\big]^{-1}\big(x_k(\widetilde{T}_k)-x_*(T_k)\big)$$
$$-\,\psi_k^0\int\limits_0^{\widetilde{T}_k} e^{-\rho s}\big[Z_k(s)\big]^{-1}g_x(x_k(s),u_k(s))\,ds,\quad k=1,2,\dots. \tag{2.24}$$

В силу леммы 1 и первого равенства в (1.6) предел правой части (2.24) при $k \to \infty$ существует. Поэтому существует предел левой части $\xi = \lim_{k\to\infty} \left[Z_k(\widetilde{T}_k)\right]^{-1}\xi_k \in \operatorname{Ls}_{t\to\infty}\left\{\left[Z_*(t)\right]^{-1}N_*(t)\right\}$. Таким образом, для вектора ξ выполняется условие (iii).

Из леммы 1 и условия (1.8) для произвольного $t \geq 0$, переходя к пределу в равенстве (2.20) при $k \to \infty$, выводим

$$\psi(t) = Z_*(t)\xi + \psi^0 Z_*(t) \int_t^\infty e^{-\rho t}[Z_*(s)]^{-1} g_x(x_*(s), u_*(s))\, ds\,.$$

При этом из равенства (2.22) вытекает, что число ψ^0 и вектор ξ не могут обращаться в нуль одновременно. Таким образом, и во втором случае условия (i) и (iii) выполняются с ненулевой парой (ψ^0, ξ), $\psi^0 \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

В обоих случаях 1) и 2) выполнение условия (ii) вытекает из условия (2.19) и равенства (2.18). Действительно, в силу (2.18), (2.19) и абсолютной непрерывности гамильтониана $H_k\left(\cdot, x_k(\cdot), \psi_k^0, \psi_k(\cdot)\right)$ на интервале $[0, \widetilde{T}_k]$ для $k = 1, 2, \ldots$ получаем

$$\begin{aligned} H_k\left(t, x_k(t), \psi_k^0, \psi_k(t)\right) &= 2\psi_k^0\left(\widetilde{T}_k - T_k\right) + \psi_k^0 \rho \int_t^{\widetilde{T}_k} e^{-\rho s} g(x_k(s), u_k(s))\, ds \\ &- \frac{(\rho+1)m_k}{1+\sigma_k} \int_t^{\widetilde{T}_k} e^{-(\rho+1)s}\|u_k(s) - z_k(s)\|^2\, ds \\ &+ \frac{2m_k}{1+\sigma_k} \int_t^{\widetilde{T}_k} e^{-(\rho+1)s}\langle u_k(s) - z_k(s), \dot{z}_k(s)\rangle\, ds. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Переходя в (2.25) к пределу при $k \to \infty$, с учетом леммы (1) и условий (2.1)–(2.3) имеем равенство (2.14).

Теорема доказана.

3. Об условии доминирования дисконтирующего множителя

Условие доминирования дисконтирующего множителя (A3) играет центральную роль в доказательстве теоремы 1. Суть этого условия состоит в том, что убывание множителя $e^{-\rho t}$, $t \geq 0$, в интегральном функционале (1.1) идет достаточно быстро, для того чтобы подавить эффект возможного роста фундаментальной матрицы $Y_{(x,u)}(\cdot)$ и градиента $g_x(x(\cdot), u(\cdot))$ функции мгновенной полезности вдоль любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$. Впервые условие такого вида было введено в работе [11] в связи с доказательством варианта принципа максимума Понтрягина для задачи на бесконечном интервале времени для линейной управляемой системы (1.2) без каких-либо асимптотических ограничений. В дальнейшем результат, полученный в [11], обобщался и усиливался (также для задач без асимптотических ограничений) в серии работ [3; 5; 7–9; 14]. Как правило, выполнение условий типа доминирования дисконтирующего множителя приводит к явному описанию сопряженной переменной $\psi(\cdot)$ посредством аналога формулы Коши (подробнее см. [10, § 5]). Заметим, что используемое здесь условие доминирования дисконтирующего множителя (A3) сильнее аналогичного условия из [3, § 4].

В заключение аналогично [5, § 12] приведем сформулированные в терминах параметра дисконтирования ρ и показателей роста матрицы $Y_{(x,u)}(\cdot)$ и градиента $g_x(\cdot,\cdot)$ условия, гарантирующие выполнение обоих условий (A2) и (A3).

Теорема 2. *Пусть $\rho > 0$, множество G выпукло, существуют такие постоянные $\kappa \geq 0$, $r \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$, и $C_3 \geq 0$, что выполняются следующие условия*:

(i) *Для любых $x \in G$ и $u \in U$ имеем*

$$\|g_x(x,u)\| \leq \kappa(1 + \|x\|^r). \tag{3.1}$$

(ii) *Для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ имеем*

$$\|x(t)\| \leq C_1 + C_2 e^{\lambda t}, \quad \left\|Y_{(x,u)}(t)\right\| \leq C_3 e^{\lambda t}, \quad t \geq 0. \tag{3.2}$$

(iii) *Выполняется неравенство*

$$\rho > (r+2)\lambda. \tag{3.3}$$

Тогда справедливы оба условия (A2) *и* (A3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x(\cdot), u(\cdot))$ — произвольная допустимая пара. В силу выпуклости множества G для любого $t \geq 0$ получаем

$$g(x(t), u(t)) - g(x_0, u(t)) = \int\limits_0^1 \left\langle g_x\big(x_0 + s(x(t) - x_0), u(t)\big),\, x(t) - x_0 \right\rangle ds. \tag{3.4}$$

В силу компактности множества U, неравенства (3.1) и первого неравенства в (3.2) с некоторыми не зависящими от пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ постоянными $C_4 \geq 0$ и $C_5 \geq 0$ из равенства (3.4) выводим оценку

$$e^{-\rho t}\,|g(x(t), u(t))| \leq C_4 e^{-\rho t} + C_5 e^{-(\rho - (r+1)\lambda)t}, \quad t \geq 0. \tag{3.5}$$

С учетом (3.3) имеем $\rho - (r+1)\lambda > 0$. Отсюда вытекает выполнение (A2).

Далее, из условий (3.1) и (3.2) получаем, что существуют такие постоянные $C_6 \geq 0$ и $C_7 \geq 0$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ для любого $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$e^{-\rho t}\left\| \left[Z_{(x,u)}(t)\right]^{-1} g_x(x(t), u(t))\right\| \leq C_6 e^{-(\rho-\lambda)t} + C_7 e^{-(\rho-(r+1)\lambda)t}.$$

В силу (3.3) имеем $\rho - \lambda > 0$ и $\rho - (r+1)\lambda > 0$. Значит, выполняется (1.8). Справедливость условия (1.7) вытекает из (3.3), второго неравенства в (3.2) и оценки (3.5). Следовательно, выполняется условие (A3).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Acemoglu D.** Introduction to modern economic growth. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008. 1008 p.
2. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. Москва: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1979. 430 с.
3. **Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжимский А.В.** Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, № 2. С. 3–64. doi: 10.4213/rm9467 .
4. **Асеев С.М, Бесов К.О., Каниовский С.Ю.** Оптимизация экономического роста в модели Дасгупты — Хила — Солоу — Стиглица при непостоянной отдаче от расширения масштабов производства // Тр. МИАН. 2019. Т. 304. С. 83–122. doi: 10.4213/tm3985 .
5. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 3–271
6. **Aseev S., Manzoor T.** Optimal exploitation of renewable resources: lessons in sustainability from an optimal growth model of natural resource consumption // Control Systems and Mathematical Methods in Economics / eds. G. Feichtinger, R. Kovacevic, G. Tragler. Cham: Springer, 2018. P. 221–245. (Lect. Notes Econ. Math. Syst.; vol. 687). doi: 10.1007/978-3-319-75169-6_11 .
7. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. B: Applications & Algorithms. 2012. Vol. 19, no. 1-2. P. 43–63.

8. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Needle variations in infinite-horizon optimal control // Variational and Optimal Control Problems on Unbounded Domains. Contemporary Mathematics / eds. G. Wolansky, A.J. Zaslavski. Providence: Amer. Math. Soc., 2014. Vol. 619. P. 1–17. doi: 10.1090/conm/619/12381 .
9. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 41–57.
10. **Асеев С.М., Вельов В.М.** Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 6. С. 3–54. doi: 10.4213/rm9915 .
11. **Aubin J.-P., Clarke F.H.** Shadow prices and duality for a class of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. 1979. Vol. 17. P. 567–586. doi: 10.1137/0317040 .
12. **Barro R.J., Sala-i-Martin X.** Economic growth. N Y: McGraw Hill, 1995. 539 p.
13. **Benchekroun H., Withhagen C.** The optimal depletion of exhaustible resources: A complete characterization // Resource and Energy Economics. 2011. Vol. 33, no. 3. P. 612–636. doi: 10.1016/j.reseneeco.2011.01.005 .
14. **Бесов К.О.** О необходимых условиях оптимальности для задач экономического роста с бесконечным горизонтом и локально неограниченной функцией мгновенной полезности // Тр. МИАН. 2014. Т. 284. С. 56–88. doi: 10.1134/S037196851401004X .
15. **Бродский Ю.И.** Необходимые условия слабого экстремума для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени // Мат. сб. 1978. Т. 105 (147), № 3. С. 371–388.
16. **Cesari L.** Optimization — Theory and applications. Problems with ordinary differential equations. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1983. 542 p.
17. **Dasgupta P., Heal G.M.** The optimal depletion of exhaustible resources // The Review of Economic Studies (Symposium on the Economics of Exhaustible Resources). 1974. Vol. 41, no. 5. P. 3–28.
18. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985. 224 с.
19. **Hartman P.** Ordinary differential equations. N Y; London; Sydney: J. Wiley & Sons, 1964. 612 p.
20. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа, Москва: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1976. 543 с.
21. **Куратовский К.** Топология. Т. 1. Москва: Мир, 1966. 606 с.
22. **Meadows D.H., Meadows D.L., Randers J., and Behrens III W.W.** The limits to growth: A report for the Club of Rome's project on the predicament of mankind. N Y: Universe Books, 1972. 205 p.
23. **Pezzey J.** Sustainable development concepts: an economic analysis. World Bank environment paper, no. 2. Washington: The World Bank, 1992. doi: 10.1596/0-8213-2278-8 .
24. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Физматгиз, 1961. 400 с.
25. **Ramsey F.P.** A mathematical theory of saving // Econ. J. 1928. Vol. 38. P. 543–559.
26. **Seierstad A.** A maximum principle for smooth infinite horizon optimal control problems with state constraints and with terminal constraints at infinity // Open J. Optim. 2015. Vol. 4. P. 100–130. doi: 10.4236/ojop.2015.43012 .
27. **Solow R.M.** Intergenerational equity and exhaustible resources // The Review of Economic Studies (Symposium on the Economics of Exhaustible Resources). 1974. Vol. 41. P. 29–45. doi: 10.2307/2296370 .
28. **Stiglitz J.** Growth with exhaustible natural resources: Efficient and optimal growth paths // The Review of Economic Studies (Symposium on the Economics of Exhaustible Resources). 1974. Vol. 41. P. 123–137. doi: 10.2307/2296377 .
29. **Tauchnitz N.** Pontryagin's maximum principle for infinite horizon optimal control problems with bounded processes and with state constraints. *arXiv*:2007.09692 . 2020. 27 p.
30. **Valente S.** Sustainable development, renewable resources and technological progress // Environmental and Resource Economics. 2005. Vol. 30, no. 1. P. 115–125. doi: 10.1007/s10640-004-2377-3 .
31. **Valente S.** Optimal growth, genuine savings and long-run dynamics // Scottish Journal of Political Economy. 2008. Vol. 55, no. 2. P. 210–226. doi: 10.1111/j.1467-9485.2008.00451.x .

Поступила 1.02.2021
После доработки 15.02.2021
Принята к публикации 22.02.2021

Асеев Сергей Миронович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва;
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;
International Institute for Applied Systems Analysis, A-2361 Laxenburg, Austria
e-mail: aseev@mi-ras.ru

REFERENCES

1. Acemoglu D. *Introduction to modern economic growth.* Princeton: Princeton Univ. Press, 2008, 1008 p. ISBN: 9781400835775 .
2. Alexeev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal control.* N Y: Plenum, 1987, 309 p. ISBN: 0306109964 . Original Russian text published in Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie.* Moscow: Nauka Publ., 1979, 430 p.
3. Aseev S.M., Besov K.O., and Kryazhimskii A.V. Infinite-horizon optimal control problems in economics. *Russ. Math. Surv.*, 2012, vol. 67, no. 2, pp. 195–253. doi: 10.1070/RM2012v067n02ABEH004785 .
4. Aseev S.M., Besov K.O., Kaniovski S.Yu. Optimal policies in the Dasgupta–Heal–Solow–Stiglitz model under nonconstant returns to scale. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2019, vol. 304, pp. 74–109. doi: 10.1134/S0081543819010061 .
5. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2007, vol. 257, pp. 1–255. doi: 10.1134/S0081543807020010 .
6. Aseev S., Manzoor T. Optimal exploitation of renewable resources: lessons in sustainability from an optimal growth model of natural resource consumption. In: *Control systems and mathematical methods in economics*, G. Feichtinger, R. Kovacevic, G. Tragler (eds), Lect. Notes Econ. Math. Syst., vol. 687, Cham: Springer, 2018, pp. 221–245. doi: 10.1007/978-3-319-75169-6_11 .
7. Aseev S.M., Veliov V.M. Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. B: Applications & Algorithms*, 2012, vol. 19, no. 1-2, pp. 43–63.
8. Aseev S.M., Veliov V.M. Needle variations in infinite-horizon optimal control. *Variational and Optimal Control Problems on Unbounded Domains*, G. Wolansky, A.J. Zaslavski (eds), Contemporary Mathematics, vol. 619, Providence: Amer. Math. Soc., 2014, pp. 1–17. doi: 10.1090/conm/619/12381 .
9. Aseev S.M., Veliov V.M. Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. S22–S39. doi: 10.1134/S0081543815090023 .
10. Aseev S.M., Veliov V.M. Another view of the maximum principle for infinite-horizon optimal control problems in economics. *Russian Math. Surveys*, 2019, vol. 74, no. 6, pp. 963–1011. doi: 10.1070/RM9915 .
11. Aubin J.-P., Clarke F.H. Shadow prices and duality for a class of optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 1979, vol. 17, pp. 567–586. doi: 10.1137/0317040 .
12. Barro R.J., Sala-i-Martin X. *Economic growth.* N Y: McGraw Hill, 1995, 539 p. ISBN: 0070036977 .
13. Benchekroun H., Withhagen C. The optimal depletion of exhaustible resources: A complete characterization. *Resource and Energy Economics*, 2011, vol. 33, no. 3, pp. 612–636. doi: 10.1016/j.reseneeco.2011.01.005 .
14. Besov K.O. On necessary optimality conditions for infinite-horizon economic growth problems with locally unbounded instantaneous utility function. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, pp. 50–80. doi: 10.1134/S0081543814010040 .
15. Brodskii Yu.I. Necessary conditions for a weak extremum in optimal control problems on an infinite time interval. *Math. USSR-Sb.*, 1978, vol. 34, no. 3, pp. 327–343. doi: 10.1070/SM1978v034n03ABEH001208 .
16. Cesari L. *Optimization — theory and applications. Problems with ordinary differential equations.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1983, 542 p. doi: 10.1007/978-1-4613-8165-5 .
17. Dasgupta P., Heal G.M. The optimal depletion of exhaustible resources. *The Review of Economic Studies* (*Symposium on the Economics of Exhaustible Resources*), 1974, vol. 41, no. 5, pp. 3–28. doi: 10.2307/2296369 .
18. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous right-hand sides.* Dordrecht: Kluwer, 1988, 304 p. doi: 10.1007/978-94-015-7793-9 . Original Russian text published in Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu.* Moscow: Nauka Publ., 1985, 224 p.

19. Hartman P. *Ordinary differential equations.* N Y; London; Sydney: J. Wiley & Sons, 1964, 612 p.
20. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis.* Mineola; N Y: Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830. Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza.* Moscow: Nauka Publ., 1976, 543 p.
21. Kuratowski K. *Topology. Vol. I.* N Y; London: Acad. Press, 1966, 560 p. ISBN: 978-0-12-429201-7. Translated to Russian under the title *Topologiya. T. 1.* Moscow: Mir Publ., 1966, 594 p.
22. Meadows D.H., Meadows D.L., Randers J., and Behrens III W.W. *The limits to growth: A report for the Club of Rome's project on the predicament of mankind.* N Y: Universe Books, 1972, 205 p.
23. Pezzey J. *Sustainable development concepts: an economic analysis.* World Bank Environment Paper, no. 2, Washington: The World Bank, 1992. doi: 10.1596/0-8213-2278-8.
24. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishechenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes.* New York; London: John Wiley & Sons, 1962, 515 p. doi: 10.1002/zamm.19630431023. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov.* Moscow: Nauka Publ., 1961, 400 p.
25. Ramsey F.P. A mathematical theory of saving. *Economic J.*, 1928, vol. 38, no. 152, pp. 543–559. doi: 10.2307/2224098.
26. Seierstad A. A maximum principle for smooth infinite horizon optimal control problems with state constraints and with terminal constraints at infinity. *Open J. Optim.*, 2015, vol. 4, pp. 100–130. doi: 10.4236/ojop.2015.43012.
27. Solow R.M. Intergenerational equity and exhaustible resources. *The Review of Economic Studies* (*Symposium on the Economics of Exhaustible Resources*), 1974, vol. 41, pp. 29–45. doi: 10.2307/2296370.
28. Stiglitz J. Growth with exhaustible natural resources: Efficient and optimal growth paths. *The Review of Economic Studies* (*Symposium on the Economics of Exhaustible Resources*), 1974, vol. 41, pp. 123–137. doi: 10.2307/2296377.
29. Tauchnitz N. Pontryagin's maximum principle for infinite horizon optimal control problems with bounded processes and with state constraints. *arXiv*:2007.09692. 2020. 27 p.
30. Valente S. Sustainable development, renewable resources and technological progress. *Environmental and Resource Economics*, 2005, vol. 30, no. 1, pp. 115–125. doi: 10.1007/s10640-004-2377-3.
31. Valente S. Optimal growth, genuine savings and long-run dynamics. *Scottish Journal of Political Economy*, 2008, vol. 55, no. 2, pp. 210–226. doi: 10.1111/j.1467-9485.2008.00451.x.

Received February 1, 2021
Revised February 15, 2021
Accepted February 22, 2021

Funding Agency: This work was supported by Russian Scientific Foundation, project 19-11-00223.

Sergey Mironovich Aseev, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding member of RAS, Principal research scholar, Steklov Mathematical Institute of RAS, Gubkina 8, Moscow, 119991 Russia; Lomonosov Moscow State University, Leninskiye Gory 1, Moscow, 119991 Russia; International Institute for Applied Systems Analysis, A-2361 Laxenburg, Austria, e-mail: aseev@mi-ras.ru.

Cite this article as: S. M. Aseev. Maximum principle for an optimal control problem with an asymptotic endpoint constraint, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 35–48.