ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

О РЕЛАКСАЦИИ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ С ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИОРИТЕТНОСТИ

А. Г. Ченцов

Рассматриваются вопросы, связанные с релаксацией игровой задачи сближения на конечном промежутке времени. В исходной задаче предполагаются заданными замкнутое в пространстве позиций целевое множество и множество, определяющее фазовые ограничения и имеющее замкнутые в фазовом пространстве сечения, отвечающие фиксации моментов времени. Условия окончания игры сближения ослабляются посредством замены упомянутых множеств окрестностями, определяемыми в различных топологиях пространства позиций и имеющих "размеры", связанные коэффициентом пропорциональности в виде параметра приоритетности. Для каждого значения данного параметра и фиксированной позиции определяется значение релаксированной задачи, совпадающее с минимаксом в классе квазистратегий для специального функционала качества. Установлено, что получающаяся при этом функция позиции зависит от параметра непрерывно как отображение положительной полуоси в тихоновскую степень вещественной прямой с использованием пространства позиций в качестве индексного множества. Для соответствующих функций вычисления (при фиксации позиции) указаны области равномерной непрерывности.

Ключевые слова: дифференциальная игра, квазистратегия, метод программных итераций.

A. G. Chentsov. On the relaxation of a game problem of approach with priority elements.

The issues related to the relaxation of a game problem of approach on a finite time interval are considered. In the original problem, it is assumed that the following sets are given: a target set closed in the position space and a set that determines state constraints and whose sections corresponding to fixed times are closed in the state space. The game termination conditions are relaxed by replacing these sets with their neighborhoods defined in different topologies of the position space; the "sizes" of the neighborhoods are related by a proportionality coefficient in the form of a priority parameter. For each value of this parameter and a fixed position, we find the value of the relaxed problem, which coincides with the minimax in the class of quasi-strategies for a special quality functional. It is established that the resulting position function depends on the parameter continuously as a mapping of the positive semiaxis to the Tikhonov power of the real line with the position space as the index set. Regions of uniform continuity are specified for the corresponding calculation functions (for a fixed position).

Keywords: differential game, quasi-strategy, program iteration method.

MSC:49J15, 49K15, 93C15, 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-281-297

Введение

Ключевым фактом в теории дифференциальных игр (ДИ) является теорема об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см. [1;2]). На ее основе было установлено (см. [2]) существование седловой точки для типичных функционалов качества. Развитие теории ДИ было связано прежде всего с исследованиями Л. С. Понтрягина, Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, Ю. С. Осипова, Б. Н. Пшеничного и А. И. Субботина (см. [3–14]). Принципиальный результат, связанный с распространением теоремы об альтернативе на случай ДИ, в которой правая часть управляемого дифференциального уравнения не удовлетворяет условию Липшица по фазовой переменной, был получен А. В. Кряжимским (см. [15]). В числе ранних исследований по теории ДИ отметим монографию [16], в которой было указано большое число прикладных задач, приводящих к постановкам теории ДИ, и указаны некоторые методы их решения. Ограничиваясь сейчас упомянутым кругом вопросов, связанных с альтернативой Красовского — Субботина, заметим, что для решения ДИ традиционно использовались конструкции программного управления (см. [2; 5; 6; 14; 17] и др.). В частности, был построен метод программных итераций (МПИ) (см. [18–22] и др.).

Важно отметить, что МПИ, применяемый в общем случае ДИ, позволил установить некоторые свойства множеств позиционного поглощения (МПП) (см. [23] и др.). Это направление развивается и в настоящей работе, продолжающей [23;24]. В частности, исследуется связь МПП в ДИ сближения-уклонения с заданными множествами-параметрами и в аналогичной ДИ, где данные множества заменены окрестностями. При фиксации позиции, не принадлежащей МПП в невозмущенной игре, представляет интерес поиск наименьших размеров окрестностей множеств-параметров, для которых уже данная позиция принадлежит соответствующему МПП; при ослаблении условий окончания игры сближения допускаются различные степени приоритетности в вопросах, связанных с наведением на ЦМ и соблюдением ФО. Это достигается введением специального параметра приоритетности в виде коэффициента, обеспечивающего согласование размеров окрестностей ЦМ и множества, задающего ФО. В этих условиях удается скаляризовать проблему вышеупомянутого ослабления условий окончания игры сближения и ввести аналог наименьшего размера окрестностей, при котором еще игрок I гарантирует успешное решение получающейся задачи сближения для соответствующей начальной позиции. В целом получается неотрицательная функция позиции, зависящая от параметра приоритетности. В статье исследуется упомянутая зависимость и устанавливается ее непрерывность по упомянутому параметру. При этом используется, установленное в [24], представление значений упомянутой функции в терминах минимакса специального функционала качества в классе квазистратегий игрока I.

1. Общие сведения и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. *Семейством* называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Двум объектам x и y сопоставляется их неупорядоченная пара $\{x;y\}$ (см. [25, с. 60]). Тогда каждому объекту z соответствует синглетон $\{z\} \triangleq \{z;z\}$, содержащий z. Следуя [25, с. 67], объектам α и β сопоставляем упорядоченную пару (УП) $(\alpha,\beta) \triangleq \{\{\alpha\};\{\alpha;\beta\}\}$ с первым элементом α и вторым элементом β. Для каждой УП h через $pr_1(h)$ и $pr_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы h соответственно. Если x, y и z — объекты, то $(x,y,z) \triangleq ((x,y),z)$ (см. [26, с. 17]). Если H — множество, то $\mathcal{P}(H)$ есть семейство всех подмножеств (п/м) H, а $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$. Множеству $\mathbb{M}$ и непустому семейству $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ сопоставляется двойственное семейство $\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M \colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$. Если $\mathcal{A}$ — семейство и B — множество, то $\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B \colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$ есть *след* $\mathcal{A}$ на множество B. Для произвольных множеств S и Λ через Λ^S обозначаем (см. [25, с. 77]) множество всех отображений из S в Λ (выражения $g \in \Lambda^S$ и $g \colon S \to \Lambda$ отождествимы); если $h \in \Lambda^S$ и $C \in \mathcal{P}(S)$, то $h^1(C) \triangleq \{h(x) \colon x \in C\} \in \mathcal{P}(\Lambda)$ — образ C при действии h, и $(h \mid C) \in S^C$ есть сужение h на C: $(h \mid C)(y) \triangleq h(y)\ \forall y \in C$. Стандартным образом определяем (см. [25; 26]) операцию декартова произведения; заметим, что для трех множеств A, B и C, как обычно (см. [26, с. 17]), $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$, что согласуется с определением триплета объектов.

Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\} = [0,\infty[$ (промежутки в $\mathbb{R}$ всех типов обозначаем только квадратными скобками, как в [27, с. 35, 36]), $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$, $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$; $\overline{1,m} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant m\}$ при $m \in \mathbb{N}$. Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами; с учетом этого для всяких множества H и числа $k \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,k}}$ используем более традиционное H^k для обозначения множества всех отображений из $\overline{1,k}$ в H; данные отображения — кортежи в H "длины" k. Для каждого семейства $\mathcal{H}$, последовательности $(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ и множества $\mathbb{H}$ имеем

$$((H_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbb{H}) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big(\Big(\mathbb{H} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} H_i\Big) \,\&\, (H_{k+1} \subset H_k \ \ \forall k \in \mathbb{N})\Big).$$

Если S — множество, то $\mathcal{R}_+[S] \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{R}_+)^S$ есть множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на S.

Каждому множеству E сопоставляем семейство $(\sigma - \mathrm{alg})[E]$ всех σ-алгебр (см. [28; 29]) п/м E; при $\mathcal{E} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$ в виде $(E, \mathcal{E})$ имеем измеримое пространство (ИП). При $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ через $\sigma^0_E(\mathcal{G})$ обозначаем σ-алгебру п/м E, порожденную семейством $\mathcal{G}$; $\sigma^0_E(\mathcal{G}) \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$. Если $\mathcal{G}$ — топология на E, то множества из $\sigma^0_E(\mathcal{G})$ называются *борелевскими*. Если X — множество, $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ и $Y \in \mathcal{P}(X)$, то $\sigma^0_Y(\mathcal{X}|_Y) = \sigma^0_X(\mathcal{X})|_Y$;

$$(Y \in \sigma^0_X(\mathcal{X})) \Leftrightarrow (\sigma^0_Y(\mathcal{X}|_Y) = \{\Sigma \in \sigma^0_X(\mathcal{X}) \mid \Sigma \subset Y\}). \tag{1.1}$$

Если $(E, \mathcal{E})$ есть ИП, то через $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех в/з неотрицательных счетно-аддитивных мер на $\mathcal{E}$; $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}] \subset \mathcal{R}_+[\mathcal{E}]$. Если τ — топология на E, а $\mathcal{E} = \sigma^0_E(\tau)$, то меры из $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}] = (\sigma - \mathrm{add})_+[\sigma^0_E(\tau)]$ называются *борелевскими*; если (E, τ) — метризуемое топологическое пространство (ТП), то все меры из $(\sigma - \mathrm{add})_+[\sigma^0_E(\tau)]$ регулярны (см. [30, гл. 1]).

2. Обобщенные программные управления и квазистратегии

В статье рассматривается случай конфликтно-управляемой системы, удовлетворяющей условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности программных движений, подобным используемым А. В. Кряжимским в [15]. Действие обычных управляющих функций рассматривается как частный случай действия обобщенных управлений (ОУ), определяемых в виде борелевских мер на конечномерных компактах. В этой связи мы сразу введем в рассмотрение конструкции ИП, на которых будут определены упомянутые управления-меры.

Фиксируем $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ со свойством $t_0 < \vartheta_0$. Пусть $T \stackrel{\triangle}{=} [t_0, \vartheta_0]$, P и Q — непустые компакты в конечномерных арифметических пространствах. Если $t \in T$, то рассматриваем компакты $[t, \vartheta_0]$, $Z_t \stackrel{\triangle}{=} [t, \vartheta_0] \times Q$ и $\Omega_t \stackrel{\triangle}{=} [t, \vartheta_0] \times P \times Q$, оснащаемые σ-алгебрами борелевских множеств $\mathcal{T}_t \in (\sigma - \mathrm{alg})[[t, \vartheta_0]]$, $\mathcal{D}_t \in (\sigma - \mathrm{alg})[Z_t]$ и $\mathcal{C}_t \in (\sigma - \mathrm{alg})[\Omega_t]$ соответственно. Итак, $([t, \vartheta_0], \mathcal{T}_t)$, $(Z_t, \mathcal{D}_t)$ и $(\Omega_t, \mathcal{C}_t)$ суть ИП. Среди всевозможных борелевских множеств выделяем цилиндры. Так, при $I \in \mathcal{T}_t$ имеем $I \times Q \in \mathcal{D}_t$ и $I \times P \times Q \in \mathcal{C}_t$. Кроме того, при $D \in \mathcal{D}_t$ реализуется $D \underline{\times} P \stackrel{\triangle}{=} \{(\xi, u, v) \in \Omega_t \mid (\xi, v) \in D\} \in \mathcal{C}_t$. Если $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_0]$, то (см. (1.1))

$$\begin{gathered} \mathcal{C}^\theta_t \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{C}_t|_{[t,\theta[\times P\times Q} = \{C \in \mathcal{C}_t \mid C \subset [t, \theta[\times P \times Q\} \in (\sigma - \mathrm{alg})[[t, \theta[\times P \times Q], \\ \mathcal{D}^\theta_t \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{D}_t|_{[t,\theta\,[\,\times Q} = \{D \in \mathcal{D}_t \mid D \subset [t, \theta\,[\,\times Q\} \in (\sigma - \mathrm{alg})[[t, \theta\,[\,\times Q]; \end{gathered} \tag{2.1}$$

$([t, \theta\,[\,\times P \times Q, \mathcal{C}^\theta_t)$ — подпространство ИП $(\Omega_t, \mathcal{C}_t)$; $([t, \theta\,[\,\times Q, \mathcal{D}^\theta_t)$ — подпространство ИП $(Z_t, \mathcal{D}_t)$). Если $t \in T$, то $\lambda_t \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{T}_t]$ есть след меры Лебега на $\mathcal{T}_t$,

$$\mathcal{H}_t \stackrel{\triangle}{=} \{\eta \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t] \mid \eta(I \times P \times Q) = \lambda_t(I) \ \ \forall I \in \mathcal{T}_t\},$$

$$\mathcal{E}_t \stackrel{\triangle}{=} \{\nu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{D}_t] \mid \nu(I \times Q) = \lambda_t(I) \ \ \forall I \in \mathcal{T}_t\}.$$

Элементы $\mathcal{H}_t$ — "совокупные" ОУ на $[t, \vartheta_0]$, а элементы $\mathcal{E}_t$ суть ОУ игрока II на том же промежутке. Полагаем, что $\mathcal{U}_t$ и $\mathcal{V}_t$ суть множества всех кусочно-постоянных, непрерывных справа и непрерывных слева в точке ϑ_0 отображений из $P^{[t,\vartheta_0]}$ и $Q^{[t,\vartheta_0]}$ соответственно (введены простейшие релейные программные управления игроков I и II). Тогда $\mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_t$ допускает погружение в $\mathcal{H}_t$, а $\mathcal{V}_t$ допускает аналогичное погружение в $\mathcal{E}_t$ (см. [14, гл. IV, §2]). Пусть

$$\Pi_t(\nu) \overset{\triangle}{=} \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(D \underline{\times} P) = \nu(D) \ \forall D \in \mathcal{D}_t\} \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_t. \tag{2.2}$$

С учетом (2.1) введем в рассмотрение квазистратегии игрока I, следуя [23, разд. 10] и фиксируя $t \in T$ до тех пор, пока не будет оговорено противное. Тогда (см. (2.1), (2.2))

$$\tilde{A}_t \overset{\triangle}{=} \Big\{ \alpha \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_t} \mathcal{P}'(\Pi_t(\nu)) \;\Big|\; \forall \nu_1 \in \mathcal{E}_t \ \forall \nu_2 \in \mathcal{E}_t \ \forall \theta \in [t, \vartheta_0]$$

$$((\nu_1 \mid \mathcal{D}_t^\theta) = (\nu_2 \mid \mathcal{D}_t^\theta)) \Rightarrow \big(\{(\eta \mid \mathcal{C}_t^\theta) \colon \eta \in \alpha(\nu_1)\} = \{(\eta \mid \mathcal{C}_t^\theta) \colon \eta \in \alpha(\nu_2)\}\big) \Big\}$$

есть множество всех квазистратегий игрока I на промежутке $[t, \vartheta_0]$. В [23, разд. 10] используются также более совершенные варианты квазистратегий — квазипрограммы, но в настоящей работе мы не будем их применять. Отметим также, что в [23, разд. 4] и в [31] приведено топологическое оснащение множеств $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{E}_t$ (имеются в виду относительные $*$-слабые топологии, обеспечивающие компактность; множества (2.2) также обладают $*$-слабой компактностью), которое здесь не обсуждается. Отметим, что $\Pi_t(\cdot) \overset{\triangle}{=} (\Pi_t(\nu))_{\nu \in \mathcal{E}_t} \in \tilde{A}_t$; итак, $\tilde{A}_t \neq \varnothing$.

3. Обобщенные траектории и пучки движений. Метод итераций

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ в качестве размерности фазового пространства системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q; \tag{3.1}$$

в (3.1) P и Q — непустые компакты в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно ($p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$); полагаем, что $f \colon T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$ есть непрерывная (по совокупности переменных) функция. Если $t \in T$, то через $C_n([t, \vartheta_0])$ обозначаем множество всех непрерывных функций из $[t, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$. При $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_t$ имеем обобщенную интегральную воронку системы:

$$\Phi(t, x, \eta) \overset{\triangle}{=} \Big\{ x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0]) \;\Big|\; x(\tau) = x + \int\limits_{[t,\tau[\times P \times Q} f(\xi, x(\xi), u, v)\, \eta(d(\xi, u, v)) \ \ \forall \tau \in [t, \vartheta_0] \Big\}.$$

Как и в [15], полагаем, что при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_t$ множество $\Phi(t, x, \eta)$ одноэлементно: $\Phi(t, x, \eta) = \{\varphi(\cdot, t, x, \eta)\}$, где $\varphi(\cdot, t, x, \eta) = (\varphi(\tau, t, x, \eta))_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \in C_n([t, \vartheta_0])$ есть (обобщенная) траектория системы (3.1), соответствующая начальной позиции (t, x) и (совокупному) ОУ η. Через $\|\cdot\|$ обозначаем евклидову норму в $\mathbb{R}^n$; при $c \in \mathbb{R}_+$ в виде $\mathbf{B}_n(c) \overset{\triangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant c\}$ имеем замкнутый евклидов шар радиуса c. Полагаем в дальнейшем, что $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \ \exists b \in \mathbb{R}_+$ такое, что

$$\varphi(\tau, t, x, \eta) \in \mathbf{B}_n(b) \quad \forall t \in T \quad \forall x \in \mathbf{B}_n(a) \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_t \quad \forall \tau \in [t, \vartheta_0] \tag{3.2}$$

(условие равномерной ограниченности). Напомним, что (см. [23, разд. 4]) при $t \in T$ отображение $(x, \eta) \mapsto \varphi(\cdot, t, x, \eta) \colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_t \to C_n([t, \vartheta_0])$ непрерывно ($\mathcal{H}_t$ оснащается относительной $*$-слабой топологией, $\mathbb{R}^n$ — топологией покоординатной сходимости, а $C_n([t, \vartheta_0])$ — топологией равномерной сходимости). Если $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_t$, то определен пучок

$$\mathbb{X}[t; x; \alpha] \overset{\triangle}{=} \Big\{ \varphi(\cdot, t, x, \eta) \colon \eta \in \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \Big\} \in \mathcal{P}'(C_n([t, \vartheta_0]))$$

обобщенных траекторий, порожденных квазистратегией α из позиции (t, x).

Отметим процедуру МПИ из [31; 32]. Для этого сначала напомним один вариант ОУ, полагая, что $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра борелевских п/м Q и при $t \in T$ $\mathcal{K}_t$ есть σ-алгебра борелевских п/м компакта $Y_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P$, причем $I \times P \in \mathcal{K}_t$ при $I \in \mathcal{T}_t$; учитываем, что $\Omega_t = Y_t \times Q$ (см. [26, с. 17]) и $K \times B \in \mathcal{C}_t$ при $K \in \mathcal{K}_t$ и $B \in \mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{R}_t \triangleq \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}_t] \mid \mu(I \times P) = \lambda_t(I)\ \forall I \in \mathcal{T}_t\}$ (см. [31; 32]). Полагаем, что $\delta_v \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{B}]$ при $v \in Q$ есть след меры Дирака, сосредоточенной в точке v, на σ-алгебру $\mathcal{B}$, и при $\mu \in \mathcal{R}_t$ определяем $\mu \otimes v \in \mathcal{H}_t$ как единственную с.-а. меру на $\mathcal{C}_t$ со свойством $(\mu \otimes v)(K \times B) = \mu(K)\delta_v(B)\ \forall K \in \mathcal{K}_t\ \forall B \in \mathcal{B}$ (см. более подробно в [31; 32]). Отметим, что при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$

$$\mathcal{X}_\pi(t, x, v) \triangleq \{\varphi(\cdot, t, x, \mu \otimes v) \colon \mu \in \mathcal{R}_t\} \tag{3.3}$$

есть непустой компакт в $C_n([t, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости. В терминах (3.3) определяем нужный вариант МПИ (итерации стабильности). Итак, при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ полагаем, что оператор $\mathbb{A}[M]$, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, определяется условием

$$\mathbb{A}[M](H) = \big\{(t, x) \in H \mid \forall v \in Q\ \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\pi(t, x, v)\ \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] \colon$$
$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \,\&\, ((\tau, x(\tau)) \in H\ \forall \tau \in [t, \vartheta\,[\,)\big\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n).$$

Если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то определена (см. [32, (5.2)]) последовательность $(\mathcal{W}_k(M, N))_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}_0}$, для которой

$$(\mathcal{W}_0(M, N) \triangleq N) \,\&\, \big(\mathcal{W}_{k+1}(M, N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}_k(M, N))\ \forall k \in \mathbb{N}_0\big), \tag{3.4}$$

а также предельное множество (см. [32, (5.3)])

$$\mathcal{W}(M, N) \triangleq \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(M, N) \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \tag{3.5}$$

В типичных для задач теории ДИ случаях процедура (3.4), (3.5) обладает целым рядом важных свойств, для рассмотрения которых введем сейчас нужные топологии на $T \times \mathbb{R}^n$ (пространство позиций). Через $\mathbf{t}$ обозначим обычную топологию покоординатной сходимости в $T \times \mathbb{R}^n$, порождаемую, в частности, метрикой $\rho \in \mathcal{R}_+[(T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n)]$ вида $((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \mapsto \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\}) \colon (T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$. Множества из $\mathcal{F} \triangleq \mathbf{C}_{T \times \mathbb{R}^n}[\mathbf{t}]$ замкнуты в традиционном смысле. Пусть $\mathcal{F}' \triangleq \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$. Другое оснащение (см. [23, разд. 5]) $T \times \mathbb{R}^n$ связываем со стандартным произведением $\tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ дискретной топологии $\tau_\partial \triangleq \mathcal{P}(T)$ на T и $\|\cdot\|$-топологии $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ на $\mathbb{R}^n$ (получающаяся при этом топология метризуема). Для множеств из $\mathfrak{F} \triangleq \mathbf{C}_{T \times \mathbb{R}^n}[\tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}]$ имеем представление в терминах сечений (см. [32, разд. 4]). Итак, при $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $t \in T$ полагаем, что $H\langle t \rangle \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in H\}$, получая t-сечение H. При $\mathbf{F} \triangleq \mathbf{C}_{\mathbb{R}^n}[\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}]$ получаем (см. [32, разд. 4]) $\mathfrak{F} = \{F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \mid F\langle t \rangle \in \mathbf{F}\ \forall t \in T\}$. Ясно, что $\mathbf{t} \subset \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ и $\mathcal{F} \subset \mathfrak{F}$; полагаем $\mathfrak{F}' \triangleq \mathfrak{F} \setminus \{\varnothing\}$. Напомним, что (см. [32, разд. 5]) при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$

$$(\mathcal{W}_s(M, N) \in \mathfrak{F}\ \forall s \in \mathbb{N}_0) \,\&\, \big(\mathcal{W}(M, N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}(M, N)) \in \mathfrak{F}\big). \tag{3.6}$$

Еще одно важное свойство: если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и при этом $((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \,\&\, ((N_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow N)$, то $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathfrak{F}$ и, самое главное,

$$((\mathcal{W}_s(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}_s(M, N)\ \forall s \in \mathbb{N}_0) \,\&\, ((\mathcal{W}(M_i, N_i))_{i \in N} \downarrow \mathcal{W}(M, N)). \tag{3.7}$$

Свойства (3.6), (3.7) являются базовыми. В связи с (3.7) полезно отметить важные следствия (см. [23, разд. 9; 33, разд. 6]), касающиеся своеобразной “непрерывности сверху” множеств (3.5) при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$. Заметим, что при $M \in \mathcal{F}'$ и $N \in \mathfrak{F}'$ множества $\mathcal{W}(M,N)$ и $N \setminus \mathcal{W}(M,N)$ определяют (см. [24]) альтернативное разбиение множества N: при $(t,x) \in \mathcal{W}(M,N)$ и только в этом случае игрок I гарантирует успешное решение задачи (M,N)-сближения в классе квазистратегий, а при $(t,x) \in N \setminus \mathcal{W}(M,N)$ (и только тогда) игрок II гарантирует успешное решение задачи (M,N)-уклонения в классе стратегий-троек (см. [31;32]). Поэтому построение и изучение множеств (3.5) являются важной задачей.

Пример. Пусть $T = [0,1]$, $n = p = q = 1$, $P = [-1,1]$, $Q = [-2,2]$ и $f(t,x,u,v) = u + v$ при $t \in T$, $x \in \mathbb{R}$, $u \in P$ и $v \in Q$ (скалярное простое движение). Полагаем, что при $c \in \mathbb{R}_+$ $M_c \triangleq M_c^{(1)} \cup M_c^{(2)}$, где $M_c^{(1)} \triangleq \{1\} \times]-\infty, -c]$ и $M_c^{(2)} \triangleq \{1\} \times [c, \infty[$ (игра с фиксированным временем окончания). Пусть $N \triangleq T \times \mathbb{R}^n$ (случай, когда ФО отсутствуют). Тогда, как легко видеть, $\mathcal{W}(M_c, N) = \{(t,x) \in T \times \mathbb{R} \mid c + (1-t) \leqslant |x|\}$ при $c > 0$ и $\mathcal{W}(M_c, N)|_{c=0} = T \times \mathbb{R}$. Какой-либо аналог “непрерывности снизу” в точке $c = 0$ у зависимости

$$c \mapsto \mathcal{W}(M_c, N) \colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{P}(T \times \mathbb{R})$$

отсутствует. Множество $\{(t,x) \in T \times \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 1 - t\}$ образует нарост сужения этой зависимости на $]0, \infty[$. Отметим, что пример такого типа рассматривался в [23, замечание 8.1].

4. Релаксация игровой задачи сближения

В дальнейшем фиксируем $\mathbf{M} \in \mathcal{F}'$ и $\mathbf{N} \in \mathfrak{F}'$. Будем предполагать, что

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ \colon \mathbf{B}_n(c) \cap \mathbf{N}\langle t \rangle \neq \varnothing \quad \forall t \in T. \tag{4.1}$$

При $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$ полагаем, что $\rho((t,x);\mathbf{M}) \triangleq \inf(\{\rho((t,x),(\tau,y)) \colon (\tau,y) \in \mathbf{M}\})$; при этом $\rho((t,x);\mathbf{M}) \in \mathbb{R}_+$. Тогда при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \triangleq \{z \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho(z;\mathbf{M}) \leqslant \varepsilon\} \in \mathcal{F}'. \tag{4.2}$$

При $\varepsilon > 0$ (4.2) есть замкнутая окрестность $\mathbf{M}$; $S_0(\mathbf{M}, 0) = \mathbf{M}$. Далее, при $S \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ вводим $(\|\cdot\| - \inf)[x;S] \triangleq \inf(\{\|x-y\| \colon y \in S\}) \in \mathbb{R}_+$. Если $H \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, то $B_n^0(H,\varepsilon) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\|\cdot\| - \inf)[x;H] \leqslant \varepsilon\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$. В силу (4.1) $\mathbf{N}\langle t \rangle \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ при $t \in T$; поэтому при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ определено $\mathbf{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \triangleq \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid x \in B_n^0(\mathbf{N}\langle t \rangle, \varepsilon)\} \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$. Ясно, что $\mathbf{S}(\mathbf{N}, 0) = \mathbf{N}$; при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и $t \in T$ имеем $\mathbf{S}(\mathbf{N},\varepsilon)\langle t \rangle = B_n^0(\mathbf{N}\langle t \rangle, \varepsilon)$. Как следствие, получаем, что $\mathbf{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \in \mathfrak{F}'$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Имеем $\mathbb{R}_+^{<} \triangleq \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} =]0, \infty[$. Отметим весьма очевидное предложение.

Предложение 1. *Если $\kappa \in \mathbb{R}_+^{<}$, то $T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} (S_0(\mathbf{M},\varepsilon) \cap \mathbf{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon))$.*

Из предложения 1 легко следует, что

$$T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), \mathbf{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)) \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<}. \tag{4.3}$$

В свою очередь, с учетом (3.5) и (4.3) имеем, что

$$T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M},\varepsilon), \mathbf{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)) \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{4.4}$$

Легко видеть, что при $\kappa_1 \in \mathbb{R}_+^<$, $\kappa_2 \in [\,\kappa_1, \infty\,[$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^<$ непременно $\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa_1\varepsilon)) \subset \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa_2\varepsilon))$ и $\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa_1\varepsilon)) \subset \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa_2\varepsilon))$ при $k \in \mathbb{N}_0$. С учетом (4.3), (4.4) полагаем при $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$ и $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\big(\Sigma_0(t, x \mid \kappa) \stackrel{\triangle}{=} \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t, x) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)\big) \;\&$$

$$\big(\Sigma_0^{(k)}(t, x \mid \kappa) \stackrel{\triangle}{=} \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t, x) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big). \tag{4.5}$$

Далее, следуя построениям [24], полагаем при $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$ и $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, что

$$\big(\varepsilon_0(t, x \mid \kappa) \stackrel{\triangle}{=} \inf(\Sigma_0(t, x \mid \kappa)) \in \mathbb{R}_+\big) \;\&\; \big(\varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa) \stackrel{\triangle}{=} \inf(\Sigma_0^{(k)}(t, x \mid \kappa)) \in \mathbb{R}_+\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big). \tag{4.6}$$

Тем самым при $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$ определены функции $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \stackrel{\triangle}{=} (\varepsilon_0(t, x \mid \kappa))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ и $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \stackrel{\triangle}{=} (\varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, $k \in \mathbb{N}_0$, свойства которых детально исследовались в [24] (см. также идейно подобные построения в [34]). Сейчас напомним кратко лишь некоторые положения [24], полагая, что $\leqq$ есть поточечная упорядоченность на $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Так, $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \leqq \varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot \mid \kappa)\ \ \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^<\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0$. Кроме того, имеем, что, как легко видеть, $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \leqq \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ при $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$ и $k \in \mathbb{N}_0$. Напомним, что (см. [24]) при $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\big(\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big) \;\&\; \big(\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)\big).$$

Если $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$, то $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ есть точная верхняя грань множества $\{\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \colon k \in \mathbb{N}_0\}$ в частично упорядоченном множестве (ЧУМ) $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leqq)$. Множества (4.5) являются лучами в $\mathbb{R}_+$: при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$ имеем, что

$$\big(\Sigma_0^{(k)}(t, x \mid \kappa) = [\,\varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa), \infty\,[\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big) \;\&\; \big(\Sigma_0(t, x \mid \kappa) = [\,\varepsilon_0(t, x \mid \kappa), \infty\,[\,\big).$$

Отметим, наконец, полезные представления множеств Лебега: если $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$ и $b \in \mathbb{R}_+$, то

$$\begin{aligned}\big(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]) = \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa b))\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\big) \;\& \\ \big(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]) = \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa b))\big).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Предложение 2. *Если $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$, то*

$$\mathcal{W}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}(\{0\}) = \{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid \varepsilon_0(t, x \mid \kappa) = 0\}. \tag{4.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω последнее множество в (4.8) (прообраз синглетона $\{0\}$). Тогда в силу (4.7) имеем $\mathcal{W}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, 0), \mathbf{S}(\mathbf{N}, 0)) = \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, 0]) = \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}(\{0\}) = \Omega$. $\square$

Итак, множество, определяющее альтернативное разбиение в основной $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$-задаче, совпадает с множеством нулей функции $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ при $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$. Аналогично проверяется следующее предложение.

Предложение 3. *Если $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$ и $k \in \mathbb{N}_0$, то $\mathcal{W}_k(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)^{-1}(\{0\}) = \{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid \varepsilon_0^{(k)}(t, x) = 0\}$.*

Напомним важное для дальнейшего свойство (см. [24, разд. 12]), связанное с представлением значений функции $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ в виде минимакса в классе квазистратегий. Для этого потребуются некоторые новые понятия (см. [24]). Так, при $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$ введем функцию $\zeta_\kappa \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ посредством правила: если $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\zeta_\kappa(t, x) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{\kappa}(\|\cdot\| - \inf)[x; \mathbf{N}\langle t\rangle].$$

Далее, полагаем, что $\rho(\cdot;\mathbf{M}) \triangleq (\rho(z;\mathbf{M}))_{z\in T\times\mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]$ и определяем $\psi_\kappa \in \mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]$ по правилу: если $(t,x) \in T\times\mathbb{R}^n$, то $\psi_\kappa(t,x) \triangleq \sup(\{\rho((t,x);\mathbf{M});\zeta_\kappa(t,x)\})$; ψ_κ есть точная верхняя грань в ЧУМ $(\mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n],\leqq)$ неупорядоченной пары $\{\rho(\cdot;\mathbf{M});\zeta_\kappa\}$. Легко видеть, что при $\kappa\in\mathbb{R}_+^{<}$ имеют место свойства $(\zeta_\kappa \leqq \varepsilon_0(\cdot\mid\kappa))\,\&\,(\varepsilon_0(\cdot\mid\kappa)\leqq\psi_\kappa)$. Итак, ζ_κ и ψ_κ определяют порядковый интервал, содержащий функцию $\varepsilon_0(\cdot\mid\kappa)$. С учетом (4.1) имеем, в частности, что для некоторого $\mathbf{c}\in\mathbb{R}_+^{<}$ имеет место $\mathbf{B}_n(\mathbf{c})\cap\mathbf{N}\langle t\rangle\neq\varnothing$ $\forall t\in T$. Выберем и зафиксируем число $\mathbf{c}\in\mathbb{R}_+^{<}$ с упомянутым свойством; при $\kappa\in\mathbb{R}_+^{<}$, $t_*\in T$, $x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])$ и $\tau\in[t_*,\vartheta_0]$

$$\zeta_\kappa(\tau,x(\tau)) \leqslant \frac{1}{\kappa}\Big[\max_{t\in[t_*,\vartheta_0]}\|x(t)\|+\mathbf{c}\Big]. \tag{4.9}$$

При $t\in T$ определяем мультифункцию $\mathbb{I}_t\in\mathcal{P}'([t,\vartheta_0])^{[t,\vartheta_0]}$ посредством правила

$$\big(\mathbb{I}_t(t)\triangleq\{t\}\big)\,\&\,\big(\mathbb{I}_t(\vartheta)\triangleq[t,\vartheta\,[\ \ \forall\vartheta\in]\,t,\vartheta_0]\big). \tag{4.10}$$

С учетом (4.9) и (4.10) получаем при $\kappa\in\mathbb{R}_+^{<}$, $t_*\in T$, $x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])$ и $\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$, что

$$\omega_\kappa(t_*,x(\cdot),\vartheta)\triangleq\sup\big(\{\sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)}\zeta_\kappa(t,x(t));\rho((\vartheta,x(\vartheta));\mathbf{M})\}\big)\in\mathbb{R}_+. \tag{4.11}$$

Ясно, что $\omega_\kappa(t_*,x(\cdot),t_*)=\psi_\kappa(t_*,x(t_*))$. Полагаем, наконец, при $\kappa\in\mathbb{R}_+^{<}$ и $t_*\in T$, что функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}\in\mathcal{R}_+[C_n([t_*,\vartheta_0])]$ определяется условиями

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot))\triangleq\inf_{\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]}\omega_\kappa(t_*,x(\cdot),\vartheta)\quad\forall x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0]). \tag{4.12}$$

Из (4.11) и (4.12) легко следует, что функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ непрерывен в топологии равномерной сходимости на $C_n([t_*,\vartheta_0])$. Рассмотрим задачу на минимакс этого функционала в классе квазистратегий, фиксируя до конца раздела позицию $(t_*,x_*)\in T\times\mathbb{R}^n$. При $\kappa\in\mathbb{R}_+^{<}$ в виде

$$\eta\mapsto\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot,t_*,x_*,\eta))\colon\mathcal{H}_{t_*}\to\mathbb{R}_+$$

имеем непрерывный (см. разд. 3) функционал на компакте; поэтому (см. (3.1)) при $\alpha\in\tilde{A}_{t_*}$ определено конечное значение

$$\sup_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\alpha]}\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot))\in\mathbb{R}_+.$$

При этом (см. [24]) имеем равенство

$$\varepsilon_0(t_*,x_*\mid\kappa)=\min_{\alpha\in\tilde{A}_{t_*}}\ \sup_{x(\cdot)\in\mathbb{X}[t_*;x_*;\alpha]}\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)), \tag{4.13}$$

где $\kappa\in\mathbb{R}_+^{<}$. Поскольку позиция (t_*,x_*) выбиралась произвольно, (4.13) определяет минимаксное представление для $\varepsilon_0(\cdot\mid\kappa)$ при $\kappa\in\mathbb{R}_+^{<}$.

5. Зависимость значения релаксированной задачи сближения от коэффициента приоритетности

В настоящем разделе исследуется вопрос, связанный со свойствами зависимости

$$\kappa\mapsto\varepsilon_0(\cdot\mid\kappa)\colon\mathbb{R}_+^{<}\to\mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]. \tag{5.1}$$

Покажем, что (5.1) обладает свойством непрерывности, которое весьма полезно в вопросах выбора конкретного значения $\kappa\in\mathbb{R}_+^{<}$ при наличии малых погрешностей. Сначала установим утверждение.

Предложение 4. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то функция*

$$\kappa \mapsto \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \colon \mathbb{R}_+^< \to \mathbb{R}_+ \tag{5.2}$$

непрерывна на $\mathbb{R}_+^<$ *с обычной* $|\cdot|$*-топологией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и обозначим через $\tilde{\varphi}$ функционал (5.2); итак, $\tilde{\varphi} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{R}_+^<]$ и

$$\tilde{\varphi}(\kappa) \overset{\triangle}{=} \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^<.$$

Фиксируем, кроме того, $\chi \in \mathbb{R}_+^<$, получая $\chi \in \mathbb{R}_+$ со свойством $\chi \neq 0$.

Пусть (см. (3.2)) $\mathbf{b}_* \in \mathbb{R}_+$ таково, что

$$\varphi(\tau, t_*, x_*, \eta) \in \mathbb{B}_n(\mathbf{b}_*) \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{5.3}$$

Тогда согласно (4.9) и (5.3) при $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$ и $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$

$$\zeta_\kappa(\tau, \varphi(\tau, t_*, x_*, \eta)) \leqslant \frac{1}{\kappa}[\mathbf{b}_* + \mathbf{c}]. \tag{5.4}$$

В частности, из (3.1) и (5.4) получаем, что

$$0 \leqslant \zeta_\kappa(\tau, x(\tau)) \leqslant \frac{\mathbf{b}_* + \mathbf{c}}{\kappa} \quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0] \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^<.$$

Нам, однако, нужны несколько иные оценки. А именно: при $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$ и $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$

$$|\zeta_\kappa(\tau, \varphi(\tau, t_*, x_*, \eta)) - \zeta_\chi(\tau, \varphi(\tau, t_*, x_*, \eta))| = \left|\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\chi}\right| \cdot (\|\cdot\| - \inf)[\varphi(\tau, t_*, x_*, \eta); \mathbf{N}\langle\tau\rangle]. \tag{5.5}$$

При этом $(\|\cdot\| - \inf)[\varphi(\tau, t_*, x_*, \eta); \mathbf{N}\langle\tau\rangle] \leqslant \mathbf{b}_* + \mathbf{c}$ $\forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ $\forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]$ (учтено второе положение в (4.1) и конкретный выбор $\mathbf{c}$). Получили, что (см. (5.5))

$$\begin{gathered} |\zeta_\kappa(\tau, \varphi(\tau, t_*, x_*, \eta)) - \zeta_\chi(\tau, \varphi(\tau, t_*, x_*, \eta))| \\ \leqslant \left|\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\chi}\right|(\mathbf{b}_* + \mathbf{c}) \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0] \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^<. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Поэтому (см. (3.1), (5.6)) при $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$, $x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]$, $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$ и $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$

$$|\zeta_\kappa(\tau, x(\tau)) - \zeta_\chi(\tau, x(\tau))| \leqslant \left|\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\chi}\right|(\mathbf{b}_* + \mathbf{c}). \tag{5.7}$$

Используя (5.7), получаем, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists \delta \in]0, \infty[\ \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^< \cap]\ \chi - \delta, \chi + \delta[$

$$|\zeta_\kappa(\tau, x(\tau)) - \zeta_\chi(\tau, x(\tau))| < \varepsilon \quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0] \tag{5.8}$$

(учитываем непрерывность гиперболы на $\mathbb{R}_+^<$). Сравним $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \chi)$ и $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)$ при $\kappa \in \mathbb{R}_+^<$, близком к χ. Пусть $\varepsilon^* \in]0, \infty[$. С учетом (5.8) подберем $\delta^* \in]0, \infty[$ такое, что $\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^< \cap]\ \chi - \delta^*, \chi + \delta^*[$ имеем

$$|\zeta_\kappa(\tau, x(\tau)) - \zeta_\chi(\tau, x(\tau))| < \frac{\varepsilon^*}{2} \quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{5.9}$$

Тогда, в частности, имеем при $\kappa \in \mathbb{R}_+^< \cap]\chi - \delta^*, \chi + \delta^*[$, $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$, $x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]$, $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ и $\tilde{t} \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)$

$$\zeta_\kappa(\tilde{t}, x(\tilde{t})) < \sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\chi(t, x(t)) + \frac{\varepsilon^*}{2} \tag{5.10}$$

(здесь учитываются (4.10) и (5.9)). Из (5.10) вытекает, что при

$$\kappa \in \mathbb{R}_+^{\leq} \cap]\,\chi - \delta^*, \chi + \delta^*\,[, \quad \alpha \in \tilde{A}_{t_*}, \quad x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha], \quad \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$$

$$\sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\kappa(t, x(t)) \leqslant \sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\chi(t, x(t)) + \frac{\varepsilon^*}{2}. \tag{5.11}$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{\leq} \cap]\,\chi - \delta^*, \chi + \delta^*\,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$$

$$\sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\chi(t, x(t)) \leqslant \sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\kappa(t, x(t)) + \frac{\varepsilon^*}{2}. \tag{5.12}$$

Из (5.11) и (5.12) получаем, что

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{\leq} \cap]\,\chi - \delta^*, \chi + \delta^*\,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$$

$$\Big| \sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\kappa(t, x(t)) - \sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\chi(t, x(t)) \Big| \leqslant \frac{\varepsilon^*}{2}. \tag{5.13}$$

С учетом (4.11) и (5.13) имеем свойство

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{\leq} \cap]\,\chi - \delta^*, \chi + \delta^*\,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$$

$$\sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\kappa(t, x(t)) \leqslant \omega_\chi(t_*, x(\cdot), \vartheta) + \frac{\varepsilon^*}{2}. \tag{5.14}$$

С другой стороны, в силу (4.11) имеем

$$\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}) \leqslant \omega_\chi(t_*, x(\cdot), \vartheta) \quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{5.15}$$

Из (4.11), (5.14) и (5.15) вытекает, что

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{\leq} \cap]\,\chi - \delta^*, \chi + \delta^*\,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$$

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \leqslant \omega_\chi(t_*, x(\cdot), \vartheta) + \frac{\varepsilon^*}{2}. \tag{5.16}$$

Аналогичным образом получаем свойство (см. (4.11))

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{\leq} \cap]\,\chi - \delta^*, \chi + \delta^*\,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$$

$$\omega_\chi(t_*, x(\cdot), \vartheta) \leqslant \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) + \frac{\varepsilon^*}{2}. \tag{5.17}$$

Из (5.16), (5.17) имеем, что

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{\leq} \cap]\,\chi - \delta^*, \chi + \delta^*\,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$$

$$\big| \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) - \omega_\chi(t_*, x(\cdot), \vartheta) \big| \leqslant \frac{\varepsilon^*}{2}. \tag{5.18}$$

Из (4.12) и (5.18) следует, в свою очередь, что

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{\leq} \cap]\,\chi - \delta^*, \chi + \delta^*\,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$$

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leqslant \omega_\chi(t_*, x(\cdot), \vartheta) + \frac{\varepsilon^*}{2}. \tag{5.19}$$

Как следствие, из (4.12) и (5.19) получаем очевидное свойство

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) - \frac{\varepsilon^*}{2} \leqslant \gamma_{t_*}^{(\chi)}(x(\cdot)) \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\, \chi - \delta^*, \chi + \delta^* \,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]. \quad (5.20)$$

Совершенно аналогично устанавливается, что

$$\gamma_{t_*}^{(\chi)}(x(\cdot)) - \frac{\varepsilon^*}{2} \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\, \chi - \delta^*, \chi + \delta^* \,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]. \quad (5.21)$$

Из (5.20), (5.21) очевидным образом вытекает, что

$$\left|\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) - \gamma_{t_*}^{(\chi)}(x(\cdot))\right| \leqslant \frac{\varepsilon^*}{2} \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\, \chi - \delta^*, \chi + \delta^* \,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]. \quad (5.22)$$

Из (5.22) имеем, в частности, следующее положение:

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\, \chi - \delta^*, \chi + \delta^* \,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall \bar{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]$$

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\bar{x}(\cdot)) \leqslant \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\chi)}(x(\cdot)) + \frac{\varepsilon^*}{2}. \quad (5.23)$$

В свою очередь, из (5.23) вытекает свойство: $\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\, \chi - \delta^*, \chi + \delta^* \,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*}$

$$\sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leqslant \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\chi)}(x(\cdot)) + \frac{\varepsilon^*}{2}. \quad (5.24)$$

С другой стороны, подобными рассуждениями устанавливается, что
$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\, \chi - \delta^*, \chi + \delta^* \,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*}$

$$\sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\chi)}(x(\cdot)) \leqslant \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) + \frac{\varepsilon^*}{2}. \quad (5.25)$$

Из (5.24) и (5.25) получаем систему оценок: $\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\, \chi - \delta^*, \chi + \delta^* \,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*}$

$$\Big| \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) - \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\chi)}(x(\cdot)) \Big| \leqslant \frac{\varepsilon^*}{2}. \quad (5.26)$$

Тогда в силу (5.26) имеем очевидное свойство: $\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\, \chi - \delta^*, \chi + \delta^* \,[\quad \forall \bar{\alpha} \in \tilde{A}_{t_*}$

$$\min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leqslant \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \bar{\alpha}]} \gamma_{t_*}^{(\chi)}(x(\cdot)) + \frac{\varepsilon^*}{2}. \quad (5.27)$$

Из (5.27) получаем, как следствие, что $\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\, \chi - \delta^*, \chi + \delta^* \,[$

$$\min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) - \frac{\varepsilon^*}{2} \leqslant \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\chi)}(x(\cdot)). \quad (5.28)$$

Из (4.13) и (5.28) вытекает положение

$$\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) - \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \chi) \leqslant \frac{\varepsilon^*}{2} \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\, \chi - \delta^*, \chi + \delta^* \,[. \quad (5.29)$$

Аналогичными рассуждениями устанавливается, что

$$\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \chi) - \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \leqslant \frac{\varepsilon^*}{2} \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\, \chi - \delta^*, \chi + \delta^* \,[. \quad (5.30)$$

Теперь в силу (5.29) и (5.30) имеем, что справедливо свойство

$$\left|\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) - \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \chi)\right| \leqslant \frac{\varepsilon^*}{2} \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\,\chi - \delta^*, \chi + \delta^*\,[.$$

Поскольку выбор ε^* был произвольным, получено, что $\forall \varepsilon \in]\,0, \infty\,[\quad \exists \delta \in]\,0, \infty\,[$:

$$\left|\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) - \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \chi)\right| < \varepsilon \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\,\chi - \delta, \chi + \delta\,[. \tag{5.31}$$

При этом и выбор χ был произвольным. Поэтому (см. (5.31)) $\forall s \in \mathbb{R}_+^{<} \quad \forall \varepsilon \in]\,0, \infty\,[\ \exists \delta \in]\,0, \infty\,[$:

$$\left|\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) - \varepsilon_0(t_*, x_* \mid s)\right| < \varepsilon \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\,s - \delta, s + \delta\,[.$$

Непрерывность функции $\tilde{\varphi}$ установлена. □

Введем $|\cdot|$-топологию $\tau_{\mathbb{R}}^+$ на $\mathbb{R}_+$ (если $\tau_{\mathbb{R}}$ — обычная $|\cdot|$-топология на $\mathbb{R}$, то $\tau_{\mathbb{R}}^+ = \tau_{\mathbb{R}}|_{\mathbb{R}_+}$); $(\mathbb{R}_+, \tau_{\mathbb{R}}^+)$ есть метризуемое ТП; метрика, порождающая $\tau_{\mathbb{R}}^+$, есть $(\xi_1, \xi_2) \mapsto |\xi_1 - \xi_2|\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Рассмотрим топологию $\otimes^{T \times \mathbb{R}^n}(\tau_{\mathbb{R}}^+)$ тихоновской степени ТП $(\mathbb{R}_+, \tau_{\mathbb{R}}^+)$ с индексным множеством $T \times \mathbb{R}^n$. Введем семейство $\mathrm{Fin}(T \times \mathbb{R}^n)$ всех непустых конечных п/м $T \times \mathbb{R}^n$. Если $g \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, $K \in \mathrm{Fin}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in]\,0, \infty\,[$, то полагаем, что

$$N(g, K, \varepsilon) \overset{\triangle}{=} \{h \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \mid |g(t,x) - h(t,x)| < \varepsilon \ \forall (t,x) \in K\}. \tag{5.32}$$

Тогда, как легко проверить,

$$\otimes^{T \times \mathbb{R}^n}(\tau_{\mathbb{R}}^+) = \bigl\{G \in \mathcal{P}(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]) \mid \forall g \in G \ \exists K \in \mathrm{Fin}(T \times \mathbb{R}^n) \ \exists \varepsilon \in]\,0, \infty\,[\colon N(g, K, \varepsilon) \subset G\bigr\}.$$

Если $g \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, то семейство $\mathfrak{N}[g] \overset{\triangle}{=} \{N(g, K, \varepsilon)\colon (K, \varepsilon) \in \mathrm{Fin}(T \times \mathbb{R}^n) \times]\,0, \infty\,[\}$ образует локальную базу (фундаментальную систему окрестностей) g в ТП

$$(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \otimes^{T \times \mathbb{R}^n}(\tau_{\mathbb{R}}^+)). \tag{5.33}$$

В частности, $\mathfrak{N}[g]$ содержится в семействе всех окрестностей g в ТП (5.33), и каждая такая окрестность содержит множество из $\mathfrak{N}[g]$.

Теорема. *Отображение*

$$\kappa \mapsto \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)\colon \mathbb{R}_+^{<} \to \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \tag{5.34}$$

непрерывно в смысле $\mathbb{R}_+^{<}$ *с обычной* $|\cdot|$*-топологией и* ТП (5.33).

Доказательство. Для доказательства требуемой непрерывности отображения (5.34) необходима и достаточна его непрерывность в каждой точке из $\mathbb{R}_+^{<}$. Пусть $\chi \in \mathbb{R}_+^{<}$. Рассмотрим $\varepsilon_0(\cdot \mid \chi) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Выберем произвольную открытую окрестность $\mathbb{G}$ функции $\varepsilon_0(\cdot \mid \chi)$: $\mathbb{G} \in \otimes^{T \times \mathbb{R}^n}(\tau_{\mathbb{R}}^+)$ и $\varepsilon_0(\cdot \mid \chi) \in \mathbb{G}$. Используя свойства $\mathfrak{N}[\varepsilon_0(\cdot \mid \chi)]$, подберем $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\mathbf{a} \in]\,0, \infty\,[$ так, что

$$N(\varepsilon_0(\cdot \mid \chi), \mathbb{K}, \mathbf{a}) \subset \mathbb{G}. \tag{5.35}$$

При этом согласно (5.32)

$$N(\varepsilon_0(\cdot \mid \chi), \mathbb{K}, \mathbf{a}) = \{h \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \mid |\varepsilon_0(t, x \mid \chi) - h(t,x)| < \mathbf{a} \ \forall (t,x) \in \mathbb{K}\}. \tag{5.36}$$

Подберем $m \in \mathbb{N}$ и кортеж $((t_i, x_i))_{i \in \overline{1,m}}\colon \overline{1,m} \to T \times \mathbb{R}^n$, для которого выполнено равенство

$$\mathbb{K} = \{(t_i, x_i)\colon i \in \overline{1,m}\}. \tag{5.37}$$

Из (5.36), (5.37) следует, что

$$N(\varepsilon_0(\cdot \mid \chi), \mathbb{K}, \mathbf{a}) = \{h \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \mid |\varepsilon_0(t_i, x_i \mid \chi) - h(t_i, x_i)| < \mathbf{a} \ \forall i \in \overline{1, m}\}. \tag{5.38}$$

Вместе с тем согласно предложению 4 $\forall j \in \overline{1, m}$ $\exists \delta \in]\,0, \infty\,[$:

$$|\varepsilon_0(t_j, x_j \mid \chi) - \varepsilon_0(t_j, x_j \mid \kappa)| < \mathbf{a} \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\,\chi - \delta, \chi + \delta\,[. \tag{5.39}$$

Тогда (см. (5.39)) для некоторого картежа $(\delta_i)_{i \in \overline{1,m}} \colon \overline{1, m} \to]\,0, \infty\,[$ имеем следующее свойство:

$$|\varepsilon_0(t_j, x_j \mid \chi) - \varepsilon_0(t_j, x_j \mid \kappa)| < \mathbf{a} \quad \forall j \in \overline{1, m} \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\,\chi - \delta_j, \chi + \delta_j\,[.$$

Поэтому $\bar{\delta} \overset{\triangle}{=} \inf(\{\delta_i \colon i \in \overline{1, m}\}) \in]\,0, \infty\,[$, и при этом

$$|\varepsilon_0(t_j, x_j \mid \chi) - \varepsilon_0(t_j, x_j \mid \kappa)| < \mathbf{a} \quad \forall j \in \overline{1, m} \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\,\chi - \bar{\delta}, \chi + \bar{\delta}\,[. \tag{5.40}$$

Пусть $\bar{\kappa} \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\,\chi - \bar{\delta}, \chi + \bar{\delta}\,[$. Тогда $\varepsilon_0(\cdot \mid \bar{\kappa}) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, и согласно (5.40)

$$|\varepsilon_0(t_j, x_j \mid \chi) - \varepsilon_0(t_j, x_j \mid \bar{\kappa})| < \mathbf{a} \quad \forall j \in \overline{1, m}. \tag{5.41}$$

Как следствие, из (5.38) и (5.41) получаем, что $\varepsilon_0(\cdot \mid \bar{\kappa}) \in N(\varepsilon_0(\cdot \mid \chi), \mathbb{K}, \mathbf{a})$ и, в частности (см. (5.35)), $\varepsilon_0(\cdot \mid \bar{\kappa}) \in \mathbb{G}$. Поскольку выбор $\bar{\kappa}$ был произвольным, установлено, что

$$\{\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \colon \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\,\chi - \bar{\delta}, \chi + \bar{\delta}\,[\} \subset \mathbb{G}.$$

Итак, $\exists \delta \in]\,0, \infty\,[$:

$$\{\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \colon \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\,\chi - \delta, \chi + \delta\,[\} \subset \mathbb{G}.$$

Поскольку выбор $\mathbb{G}$ был произвольным, установлено, что для всякой окрестности G функции $\varepsilon_0(\cdot \mid \chi)$ непременно $\exists \delta \in]\,0, \infty\,[$: $\{\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \colon \kappa \in \mathbb{R}_+^{<} \cap]\,\chi - \delta, \chi + \delta\,[\} \subset G$. Это означает, что отображение (5.34) непрерывно в точке χ. Поскольку χ выбиралось произвольно, получаем, что (5.34) непрерывно в каждой точке своей области определения, т. е. непрерывно глобально как отображение из $\mathbb{R}_+^{<}$ (с $|\cdot|$-топологией) в ТП (5.33). $\square$

Предложение 5. *Если $\kappa_1 \in \mathbb{R}_+^{<}$ и $\kappa_2 \in [\,\kappa_1, \infty\,[$, то $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa_2) \leqq \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa_1)$.*

Доказательство. Фиксируем $\kappa_1 \in \mathbb{R}_+^{<}$ и $\kappa_2 \in [\,\kappa_1, \infty\,[$. Тогда $\kappa_2 \in \mathbb{R}_+^{<}$, и при этом $\kappa_1 \leqslant \kappa_2$. Фиксируем позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. При $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ имеем $\kappa_1 \varepsilon \leqslant \kappa_2 \varepsilon$ и, как следствие, $\mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa_1 \varepsilon) \subset \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa_2 \varepsilon)$, а потому $\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa_1 \varepsilon)) \subset \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa_2 \varepsilon))$. В частности, при $\varepsilon_* \overset{\triangle}{=} \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa_1) \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa_1 \varepsilon_*)) \subset \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa_2 \varepsilon_*)), \tag{5.42}$$

где $\varepsilon_* \in \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa_1)$. Поэтому $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa_1 \varepsilon_*))$ согласно (4.5). С учетом (5.42) имеем, что $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa_2 \varepsilon_*))$, и согласно (4.5) $\varepsilon_* \in \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa_2)$. Следовательно (см.(4.6)), $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa_2) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa_1)$. Поскольку (t_*, x_*) выбиралось произвольно, установлено, что $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa_2) \leqq \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa_1)$. $\square$

Предложение 6. *Если $\kappa_1 \in \mathbb{R}_+^{<}$ и $\kappa_2 \in [\,\kappa_1, \infty\,[$, то $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa_2) \leqq \varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa_1)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 5.

Предложение 7. *При $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}_+^{<}$ функция $\kappa \mapsto \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \colon [b, \infty\,[\to \mathbb{R}_+$ равномерно непрерывна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}_+^{<}$. Подберем число $b_* \in \mathbb{R}_+^{<}$, для которого (см. (3.2))

$$\varphi(\tau, t_*, x_*, \eta) \in \mathbb{B}_n(b_*) \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{5.43}$$

Напомним, что $\mathbf{c} > 0$. Тогда, как легко проверить (см. (5.43)), при $\kappa_1 \in [\,b, \infty\,[$, $\kappa_2 \in [\,b, \infty\,[$, $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ и $t \in [t_*, \vartheta_0]$

$$|\zeta_{\kappa_1}(t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) - \zeta_{\kappa_2}(t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta))| \leqslant \frac{|\kappa_1 - \kappa_2|(b_* + \mathbf{c})}{b^2}. \tag{5.44}$$

Тогда, в частности (см. (3.1), (5.44)), получаем, что

$$\forall \kappa_1 \in [\,b, \infty\,[\quad \forall \kappa_2 \in [\,b, \infty\,[\quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \forall t \in [t_*, \vartheta_0]$$

$$|\zeta_{\kappa_1}(t, x(t)) - \zeta_{\kappa_2}(t, x(t))| \leqslant \frac{|\kappa_1 - \kappa_2|(b_* + \mathbf{c})}{b^2}.$$

Дальнейшее рассуждение подобно обоснованию предложения 4. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
2. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Понтрягин Л. С.** О линейных дифференциальных играх, 1, 2 / Л.С. Понтрягин // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1280; Т. 175, № 4. С. 764–766.
4. **Понтрягин Л. С.** Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальных игр // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 119–157.
5. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 p.
6. **Красовский Н. Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Физматлит, 1970. 420 p.
7. **Красовский Н. Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 516 с.
8. **Куржанский А. Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
9. **Осипов Ю. С.** Альтернатива в дифференциально-разностной игре // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 5. С. 1022–1025.
10. **Осипов Ю. С.** К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 6. С. 1314–1317.
11. **Пшеничный Б. Н.** Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184, № 2. С. 285–287.
12. **Субботин А. И.** Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, №2. С. 293–297.
13. **Субботин А. И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных иследований, 2003. 336 с.
14. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
15. **Кряжимский А. В.** К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
16. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
17. **Красовский Н. Н.** Дифференциальная игра сближения-уклонения. I, II // Изв. АН СССР. Сер. техническая кибернетика. 1973. № 2. С. 3–18; 1973. № 3. С. 22–42.
18. **Ченцов А. Г.** О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 6. С. 1272–1275.
19. **Ченцов А. Г.** К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 1. С. 73–76.
20. **Ухоботов В. И.** Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 358–364.

21. **Чистяков С. В.** К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 825–832.
22. **Ченцов А. Г.** Об игровой задаче сближения к заданному моменту времени. Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1978. Т. 42, № 2. С. 455–467.
23. **Ченцов А. Г.** Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 304–321.
24. **Ченцов А. Г.** Некоторые вопросы теории дифференциальных игр с фазовыми ограничениями // Изв. ИМИ УдГУ. 2020. Т. 56. С. 138–184.
25. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
26. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
27. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры. I. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2008. 388 с.
28. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
29. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы: Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.
30. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 352 с.
31. **Ченцов А. Г.** Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений формируемого управления // Изв. ИМИ УдГУ. 2017. Т. 49. С. 17–54.
32. **Ченцов А. Г.** Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 285–302.
33. **Ченцов А. Г.** Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Вест. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, № 2. С. 271–282.
34. **Ченцов А. Г.** Релаксации игровой задачи сближения, связанные с альтернативой в дифференциальной игре сближения-уклонения // Вест. российских университетов. Математика. 2020. Т. 25, № 130. С. 196–244.

Поступила 18.01.2021
После доработки 29.01.2021
Принята к публикации 1.02.2021

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук
чл.-корр. РАН, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965. doi: 10.1016/0021-8928(70)90158-9 .
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Pontryagin L.S. Linear differential games. I, II. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1967, vol. 174, no. 6, pp. 1278–1280; vol. 175, no. 4, pp. 764–766 (in Russian).
4. Pontryagin L.S. The mathematical theory of optimal processes and differential games. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 1985, vol. 169, pp. 119–158 (in Russian).
5. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
6. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow: Nauka Publ., 1970, 420 p.
7. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.

8. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
9. Osipov Yu.S. An alternative in a differential-difference game. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1971, vol. 197, no. 5, pp. 1022–1025 (in Russian).
10. Osipov Yu.S. On the theory of differential games in distributed parameter systems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 223, no. 6, pp. 1314–1317 (in Russian).
11. Pshenichnyi B.N. The structure of differential games. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, vol. 184, no. 2, pp. 285–287 (in Russian).
12. Subbotin A.I. A generalization of the basic equation of the theory of differential games. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1980, vol. 254, no. 2, pp. 293–297 (in Russian).
13. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective.* Basel: Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 . Translated to Russian under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka: Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii.* Moscow; Izhevsk: Inst. Komp'yuter. Issled. Publ., 2003, 336 p.
14. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 288 p.
15. Kryazhimskii A.V. On the theory of positional differential games of approach-evasion. *Soviet Math. Dokl.*, 1978, vol. 19, no. 2, pp. 408–412.
16. Isaacs R. *Differential games.* N Y: John Wiley and Sons, 1965, 384 p. ISBN: 0471428604 . Translated to Russian under the title *Differentsial'nye igry.* Moscow: Mir Publ., 1967, 480 p.
17. Krasovskii N.N. A differential game of approach and evasion. I. *Engineering Cybernetics*, 1973, vol. 11, no. 2, pp. 189–203; 1973, vol. 11, no. 3, pp. 376–394.
18. Chentsov A.G. The structure of a certain game-theoretic approach problem. *Soviet Math. Dokl.*, 1975, vol. 16, no. 5, pp. 1404–1408.
19. Chentsov A. On a game problem of guidance. *Soviet. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
20. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 350–354. doi: 10.1016/0021-8928(77)90021-1 .
21. Chistyakov S.V. On solutions for game problems of pursuit. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 825–832 (in Russian).
22. Chentsov A.G. On the game problem of convergence at a given moment of time. *Math. USSR-Izv.*, 1978, vol. 12, no. 2, pp. 426–437. doi: 10.1070/IM1978v012n02ABEH001985 .
23. Chentsov A.G. The program iteration method in a game problem of guidance. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 297, no. 1, pp. 43–61. doi: 10.1134/S0081543817050066 .
24. Chentsov A.G. Some questions of differential game theory with phase constraints. *Izv. IMI UdGU*, 2020, vol. 56, pp. 138–184 (in Russian). doi: 10.35634/2226-3594-2020-56-10 .
25. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory.* Warszawa: PWN - Polish Scientific Publishers, 1968, 417 p. ISBN: 9780444534170 . Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv.* Moscow: Mir Publ., 1970, 416 p.
26. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis.* N Y: Acad. Press, 1960, 361 p. Translated to Russian under the title *Osnovy sovremennogo analiza.* Moscow: Mir Publ., 1964, 430 p.
27. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* [Elements of finitely additive measure theory, I]. Ekaterinburg: USTU-UPI Publ., 2008, 388 p.
28. Neveu J. *Mathematical foundations of the calculus of probability.* San Francisco: Holden-Day, 1965, 223 p. Translated to Russian under the title *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei.* Moscow: Mir Publ., 1969, 309 p.
29. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear Operators. I. General Theory.* New York: Interscience Publishers, 1958, 858 p. ISBN: 0470226056 . Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.* Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962, 896 p.
30. Billingsley P. *Convergence of probability measures.* N Y: Wiley, 1968, 253 p. ISBN: 0471072427. Translated to Russian under the title *Skhodimost' veroyatnostnykh mer.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 352 p.
31. Chentsov A.G. Iterations of stability and the evasion problem with a constraint on the number of switchings of the formed control. *Izv. IMI UdGU*, 2017, vol. 49, pp. 17–54 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2017-49-02 .
32. Chentsov A.G. Stability iterations and an evasion problem with a constraint on the number of switchings. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 285–302 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302 .

33. Chentsov A.G. The programmed iterations method in a game problem of guidance. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 2, pp. 271–282 (in Russian). doi: 10.20537/vm160213 .
34. Chentsov A.G. Relaxation of the game problem of guidance connected with alternative in guidance-evasion differential game. *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 196–244 (in Russian). doi: 10.20310/2686-9667-2020-25-130-196-244 .

Received January 18, 2021
Revised January 29, 2021
Accepted February 1, 2021

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. G. Chentsov. On the relaxation of a game problem of approach with priority elements, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 281–297 .