ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.95

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

В. Е. Федоров, Н. В. Филин

Исследуется однозначная разрешимость линейных уравнений в банаховых пространствах с дискретно распределенной дробной производной Герасимова — Капуто в терминах аналитических разрешающих семейств операторов. Получены условия в терминах резольвенты замкнутого оператора из правой части уравнения, необходимые и достаточные для существования такого семейства операторов, а также изучены его свойства. Эти результаты использованы для доказательства существования единственного решения задачи Коши для линейного уравнения соответствующего класса с неоднородностью, непрерывной в норме графика оператора из правой части уравнения либо гельдеровой. На основе полученных абстрактных результатов исследована однозначная разрешимость начально-краевых задач для одного класса уравнений с дискретно распределенной дробной производной по времени и с многочленами от эллиптического самосопряженного дифференциального по пространственным переменным оператора.

Ключевые слова: дробная производная Герасимова — Капуто, дискретно распределенная дробная производная, задача Коши, разрешающее семейство операторов, начально-краевая задача.

V. E. Fedorov, N. V. Filin. Linear equations with discretely distributed fractional derivative in Banach spaces.

We study the unique solvability of linear equations in Banach spaces with discretely distributed Gerasimov–Caputo fractional derivative in terms of analytic resolving families of operators. Necessary and sufficient conditions for the existence of such a family of operators are obtained in terms of the resolvent of a closed operator from the right-hand side of the equation, and the properties of this family are studied. These results are used to prove the existence of a unique solution to the Cauchy problem for a linear equation of the corresponding class with inhomogeneity which is either continuous in the norm of the graph of the operator from the right-hand side of the equation or Hölderian. Based on the abstract results obtained, we investigate the unique solvability of initial–boundary value problems for a class of equations with discretely distributed fractional time derivative and with polynomials in an elliptic self-adjoint differential operator with respect to spatial variables.

Keywords: Gerasimov–Caputo fractional derivative, discretely distributed fractional derivative, Cauchy problem, resolving family of operators, initial–boundary value problem.

MSC: 35R11, 34G10, 34A08

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-264-280

Введение

Дифференциальные уравнения с распределенными (в другой терминологии континуальными, средними) производными, под которыми понимаются интегралы от дробных производных по порядку дифференцирования, стали возникать при математическом моделировании различных процессов в конце прошлого века (см. [1–3]). Следом появились работы, посвященные численным методам решения начально-краевых задач для таких уравнений (см. [4]). С начала XXI века теория уравнений распределенного порядка уже стала полноправным разделом теории дифференциальных уравнений, благодаря многочисленным математическим исследованиям соответствующих задач (см., например, монографию [5], работы [6; 7]).

Однозначная разрешимость начальных задач для линейных уравнений в банаховых пространствах с распределенной дробной производной Римана — Лиувилля исследована в [8],

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 21-51-54003) и в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

для линейных и полулинейных уравнений с распределенной производной Герасимова — Капуто с ограниченным оператором или с относительно ограниченной парой операторов в случае уравнений, не разрешимых относительно распределенной производной, — в работах [9; 10]. Абстрактные результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для уравнений в частных производных распределенного порядка по времени.

В работах [11; 12] получены необходимые и достаточные условия существования аналитических в секторе разрешающих семейств операторов для линейных уравнений, разрешенных относительно распределенной дробной производной Герасимова — Капуто. Соответствующие результаты, распространяющие теорию аналитических полугрупп на случай уравнений распределенного порядка, использованы при исследовании однозначной разрешимости линейных неоднородных уравнений.

Интерес представляют уравнения не только с непрерывно распределенной дробной производной, но и с дискретно распределенной производной. Отметим в этом смысле работу А. В. Псху (см. [13]), посвященную уравнению диффузии с дискретно распределенной дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна, а также работы М. Костича и других авторов, в которых рассматриваются линейные уравнения с несколькими дробными производными (см., например, статью [14] и библиографию к ней).

Настоящая работа представляет собой продолжение работ [11; 12] и посвящена исследованию разрешимости линейных уравнений в банаховых пространствах с дискретно распределенной дробной производной Герасимова — Капуто в терминах аналитических разрешающих семейств операторов. В первом разделе получены условия в терминах резольвенты замкнутого оператора из правой части уравнения, необходимые и достаточные для существования такого семейства операторов, а также изучены его свойства. Во втором разделе эти результаты использованы для доказательства существования единственного решения задачи Коши для линейного уравнения соответствующего класса с неоднородностью, непрерывной в норме графика оператора из правой части уравнения либо гельдеровой. Третий раздел содержит приложение полученных абстрактных результатов к исследованию однозначной разрешимости начально-краевых задач для одного класса уравнений с дискретно распределенной производной по времени и с многочленами от эллиптического самосопряженного дифференциального по пространственным переменным оператора.

1. Разрешающие семейства операторов

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $h\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{Z}$. Определим интеграл Римана — Лиувилля

$$J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} h(s)\, ds, \quad \beta > 0, \quad t > 0,$$

а при $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ определим производную Герасимова — Капуто (обсуждение терминологии см. в [15])

$$D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha}\Big(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(0)\, \frac{t^k}{k!}\Big),$$

где D^m — оператор обычного дифференцирования порядка $m \in \mathbb{N}$.

Преобразование Лапласа функции $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ обозначим через $\widehat{h}$ или $\mathrm{Lap}[h]$. Линейное пространство таких функций, для которых определено преобразование Лапласа, обозначим через $\widehat{\mathcal{Z}}$. Нетрудно показать (см., например, [16]), что преобразование Лапласа производной Герасимова — Капуто порядка $\alpha > 0$ определяется равенством

$$\widehat{D^\alpha h}(\lambda) = \lambda^\alpha \widehat{h}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(0)\, \lambda^{\alpha-1-k}. \tag{1.1}$$

Под дробной степенью здесь и далее будем понимать значение главной ветви степенной функции.

Введем обозначения $S_{\theta,a} := \{\mu \in \mathbb{C}\colon |\arg(\mu - a)| < \theta,\, \mu \neq a\}$ при $\theta \in (\pi/2, \pi]$, $a \in \mathbb{R}$, $\Sigma_\psi := \{t \in \mathbb{C}\colon |\arg t| < \psi,\ t \neq 0\}$ при $\psi \in (0, \pi/2]$.

Теорема 1 [17, теорема 0.1, с. 5; 18, теорема 2.6.1, с. 84]. *Пусть $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a \in \mathbb{R}$, задано отображение $H\colon (a, \infty) \to \mathcal{Z}$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны.*

(i) *Существует аналитическое отображение $F\colon \Sigma_{\theta_0 - \pi/2} \to \mathcal{Z}$; при любом $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ найдется такое $C(\theta) > 0$, что для всех $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$ справедливо неравенство $\|F(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C(\theta)\, e^{a\Re t}$, при этом $\widehat{F}\,(\lambda) = H\,(\lambda)$ для всех $\lambda > a$.*

(ii) *Отображение H аналитически продолжимо в сектор $S_{\theta_0,a}$; при любом $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такое $K\,(\theta) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$ $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{Z}} \leq \dfrac{K(\theta)}{|\lambda - a|}$.*

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из пространства $\mathcal{Z}$ в $\mathcal{Z}$, через $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в $\mathcal{Z}$, действующих в пространство $\mathcal{Z}$. Снабдим область определения D_A оператора $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ его нормой графика, получив таким образом банахово пространство.

Рассмотрим задачу Коши

$$z(0) = z_0, \quad z^{(l)}(0) = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{1.2}$$

для дифференциального уравнения с дискретно распределенной дробной производной

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k D^{\alpha_k} z(t) = Az(t), \quad t > 0, \tag{1.3}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, $m - 1 < \alpha_n \leq m \in \mathbb{N}$, $\omega_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$. Решением задачи (1.2), (1.3) будем называть такую функцию $z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z}) \cap C(\mathbb{R}_+; D_A)$, что $D^{\alpha_k} z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и выполняются равенства (1.2) и (1.3).

Пусть $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим

$$W(\lambda) := \sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k},\ W_l(\lambda) := \sum_{k=k_l}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k},\ k_l = \min\{k \in \{1, 2, \ldots, n\}\colon \alpha_k > l\},\ l = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Эти функции аналитичны на разрезанной комплексной плоскости $\mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \Re\lambda \leq 0, \Im\lambda = 0\}$. Понятно, что $|W(\lambda) - W_l(\lambda)| \leq C|\lambda|^l$. Иногда для удобства будем использовать обозначение $W_0(\lambda) := W(\lambda)$.

Лемма 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, $m - 1 < \alpha_n \leq m \in \mathbb{N}$, $\omega_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, что*

$$\exists c > 0 \ \ \exists \varrho > 0 \ \ \forall\, \lambda \in S_{\theta_0,a_0} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| < \varrho\} \ \ \forall l \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \ \ |W_l(\lambda)| \geq c|\lambda|^{\alpha_n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, при достаточно больших $|\lambda|$

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k}\Big| \geq |\omega_n|\, |\lambda|^{\alpha_n} - \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k|\, |\lambda|^{\alpha_k} \geq c|\lambda|^{\alpha_n}.$$

$\square$

О п р е д е л е н и е 1. Семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t \geq 0\}$ называется *разрешающим* для уравнения (1.3), если выполняются следующие условия:

(i) $S(t)$ сильно непрерывно при $t \geq 0$, $S(0) = I$;

(ii) $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Ax = AS(t)x$ для всех $x \in D_A$, $t \geq 0$;

(iii) $S(t)z_0$ — решение задачи Коши (1.2), (1.3) при любом $z_0 \in D_A$.

Разрешающее семейство имеет тип a_0 при некотором $a_0 \in \mathbb{R}$, если для всех $a > a_0$ существует такое $C(a)$, что для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C(a)e^{at}$.

О п р е д е л е н и е 2. Разрешающее семейство операторов называется *аналитическим*, если оно аналитически продолжимо в сектор Σ_{ψ_0} при некотором $\psi_0 \in (0, \pi/2]$. Аналитическое разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t \geq 0\}$ имеет тип (ψ_0, a_0) при некоторых $\psi_0 \in (0, \pi/2]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, если для всех $\psi \in (0, \psi_0)$, $a > a_0$ существует такое $C(\psi, a)$, что для всех $t \in \Sigma_\psi$ выполняется неравенство $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C(\psi, a)e^{a\Re t}$.

З а м е ч а н и е 1. Аналогичные понятия семейства разрешающих операторов, аналитического семейства разрешающих операторов используются при изучении интегральных эволюционных уравнений (см. [17]), дробных дифференциальных уравнений с производной Герасимова — Капуто (см. [19]). В случае производной первого порядка аналитическое семейство представляет собой аналитическую разрешающую полугруппу уравнения $D^1 z(t) = Az(t)$ (см. [20]), которая обладает дополнительным — полугрупповым — свойством.

Обозначим через $\rho(A)$ резольвентное множество оператора A. Пусть оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ удовлетворяет следующим условиям:

1) существует такое $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k} \in \rho(A)$ для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$;

2) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k - 1} \Big(\sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \Big)^{-1} \Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a|}.$$

В таком случае будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$.

При $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ операторы

$$Z_0(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k - 1} \Big(\sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \Big)^{-1} d\lambda \tag{1.4}$$

определены при $t > 0$. Здесь $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda = a + re^{\pm i\theta},\ r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda = a + \delta e^{i\varphi},\ \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ при некоторых $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$.

Теорема 2. *Аналитическое разрешающее семейство операторов типа* $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$ *при некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$ *для уравнения* (1.3) *существует тогда и только тогда, когда* $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$. *При этом разрешающее семейство единственно, имеет вид* (1.4), *и при любом* $z_0 \in D_A$ *функция* $z(t) = Z_0(t)z_0$ *является единственным решением задачи* (1.2), (1.3) *в* $\widehat{\mathcal{Z}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, $R > \delta$,

$$\Gamma_R = \bigcup_{k=1}^{4} \Gamma_{k,R}, \quad \Gamma_{1,R} = \Gamma_0, \quad \Gamma_{2,R} = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda = a + Re^{i\varphi},\ \varphi \in (-\theta, \theta)\},$$

$$\Gamma_{3,R} = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda = a + re^{i\theta},\ r \in [\delta, R]\}, \quad \Gamma_{4,R} = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda = a + re^{-i\theta},\ r \in [\delta, R]\},$$

Γ_R — положительно ориентированный замкнутый контур. Введем в рассмотрение также контуры $\Gamma_{5,R} = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda = a + re^{i\theta},\ r \in [R, \infty)\}$, $\Gamma_{6,R} = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda = a + re^{-i\theta},\ r \in [R, \infty)\}$, тогда $\Gamma = \Gamma_{5,R} \cup \Gamma_{6,R} \cup \Gamma_R \setminus \Gamma_{2,R}$.

При $t > 0$, $z_0 \in D_A$ имеем

$$Z_0(t)z_0 = z_0 + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \Big(\sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \Big)^{-1} A z_0 \, d\lambda$$

в силу интегральной формулы Коши.

При $t\in[0,1]$, $\lambda\in\Gamma\setminus\{\lambda\in\mathbb{C}\colon|\lambda|<\varrho\}$ в силу леммы 1

$$\Big\|\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}Az_0\Big\|_{\mathcal{Z}}\le\frac{e^{a+\delta}\,K(\theta,a)\|Az_0\|_{\mathcal{Z}}}{|W(\lambda)|\,|\lambda-a|}\le\frac{C_1}{|\lambda|^{1+\alpha_n}}.$$

Здесь и далее C_i — некоторые положительные константы.

Следовательно, интеграл $Z_0(t)$ сходится равномерно по $t\in[0,1]$, и, устремив $t\to 0+$, получим

$$Z_0(0)z_0=z_0+\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{\Gamma_R}-\int\limits_{\Gamma_{2,R}}+\int\limits_{\Gamma_{5,R}}+\int\limits_{\Gamma_{6,R}}\Big)\frac{1}{\lambda}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}Az_0\,d\lambda=z_0,$$

так как по теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma_R}\frac{1}{\lambda}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}Az_0\,d\lambda=0,$$

при этом

$$\Big\|\int\limits_{\Gamma_{s,R}}\frac{1}{\lambda}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}Az_0\,d\lambda\Big\|_{\mathcal{Z}}\le\frac{C_2}{R^{\alpha_n}},\quad s=2,5,6.$$

Аналогично доказывается, что при $t>0$, $z_0\in D_A$, $l\in\{1,2,\dots,m-1\}$

$$Z_0^{(l)}(0)z_0=0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{l-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}Az_0\,d\lambda=0.$$

Поэтому $Z_0(\cdot)z_0\in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{Z})$б и функция $z(t):=Z_0(t)z_0$ удовлетворяет условиям Коши (1.2). Так как оператор A замкнут и коммутирует с операторами $(W(\lambda)I-A)^{-1}$ на D_A, при $z_0\in D_A$ выполняется также включение $AZ_0(\cdot)z_0\in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, т. е. $Z_0(\cdot)z_0\in C(\mathbb{R}_+;D_A)$.

При $\Re\mu>a$ имеем

$$\widehat{Z_0}(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{\mu-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}d\lambda.$$

Так как $A\in\mathcal{A}_W(\theta_0,a_0)$, то при $\lambda\in S_{\theta,a}$

$$\Big\|\frac{1}{\mu-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le\frac{K(\theta,a)}{|\lambda-a|\,|\lambda-\mu|}.$$

Следовательно,

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{s,R}}\frac{1}{\mu-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}d\lambda=0,\quad s=2,5,6,$$

и по интегральной формуле Коши

$$\widehat{Z_0}(\mu)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k\lambda^{\alpha_k-1}}{\mu-\lambda}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}d\lambda=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu^{\alpha_k-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}.$$

Возьмем в теореме 1

$$H(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1},\quad F=Z_0;$$

тогда в силу этой теоремы отображение $Z_0\colon\Sigma_{\theta_0-\pi/2}\to\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ аналитично, и при любых $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$, $a>a_0$ найдется такое $C(\theta,a)>0$, что для всех $t\in\Sigma_{\theta-\pi/2}$ $\|Z_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le C(\theta,a)\,e^{a\Re t}$. Таким образом, $Z_0(\cdot)z_0\in\widehat{\mathcal{Z}}$.

Для $z(t):=Z_0(t)z_0$ при $z_0\in D_A$

$$\widehat{Az}(\mu)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu^{\alpha_k-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}Az_0.$$

Поэтому $\widehat{z}(\mu)\in D_A$, $A\widehat{z}(\mu)=\widehat{Az}(\mu)$, $\widehat{z}(\mu)$ и $\widehat{Az}(\mu)$ имеют аналитическое продолжение на S_{θ_0,a_0}, так как $A\in\mathcal{A}_W(\theta_0,a_0)$.

С помощью формулы (1.1) преобразования Лапласа получим

$$\mathrm{Lap}\Big[\sum_{k=1}^{n}\omega_kD^{\alpha_k}z\Big](\mu)=\frac{1}{\mu}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu^{\alpha_k}\Big)^2\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}z_0-\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu^{\alpha_k}z_0$$

$$=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu^{\alpha_k}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}Az_0=\widehat{Az}(\mu).$$

Подействуем обратным преобразованием Лапласа на обе части этого равенства и получим равенство (1.3) во всех точках непрерывности функции Az, т. е. при всех $t>0$. Следовательно, z — решение задачи (1.2), (1.3), и $\{Z_0(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t\ge 0\}$ — аналитическое разрешающее семейство операторов типа $(\theta_0-\pi/2,a_0)$ для уравнения (1.3).

Пусть существует некоторое аналитическое разрешающее семейство операторов $\{S(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t\ge 0\}$ типа $(\theta_0-\pi/2,a_0)$ для уравнения (1.3). Обозначим $\widehat{S}(\lambda):=H(\lambda)$, $\lambda>a_0$. Из уравнения (1.3) в силу п. (ii) определения 1 семейства разрешающих операторов получим при $z_0\in D_A$ равенства

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_kD^{\alpha_k}S(t)z_0=AS(t)z_0=S(t)Az_0,$$

поэтому в силу замкнутости оператора A при $\lambda>a_0$ $H(\lambda)[D_A]\subset D_A$,

$$\mathrm{Lap}\Big[\sum_{k=1}^{n}\omega_kD^{\alpha_k}S(t)z_0\Big](\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}H(\lambda)z_0-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}z_0=H(\lambda)Az_0=AH(\lambda)z_0.$$

Следовательно, оператор $W(\lambda)I-A\colon D_A\to\mathcal{Z}$ биективен и

$$H(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1},\quad \lambda>a_0.$$

По теореме 1 получаем, что $A\in\mathcal{A}_W(\theta_0,a_0)$, $S(t)\equiv Z_0(t)$ в силу единственности обратного преобразования Лапласа.

Если существуют два решения z_1, z_2 задачи (1.2), (1.3) из класса $\widehat{\mathcal{Z}}$, то их разность $y=z_1-z_2\in\widehat{\mathcal{Z}}$ является решением уравнения (1.3) и удовлетворяет однородным начальным условиям $y^{(k)}(0)=0$, $k=0,1,\dots,m-1$. Действуя преобразованием Лапласа на обе части уравнения (1.3) и учитывая начальные условия, получим равенство $W(\lambda)\widehat{y}(\lambda)=A\widehat{y}(\lambda)$. Поскольку $A\in\mathcal{A}_W(\theta_0,a_0)$, при $\lambda\in S_{\theta_0,a_0}$ получим $\widehat{y}(\lambda)\equiv 0$. Следовательно, $y\equiv 0$ и $z(t)=Z_0(t)z_0$ — единственное решение задачи (1.2), (1.3) при заданном $z_0\in D_A$ в пространстве $\widehat{\mathcal{Z}}$. $\square$

З а м е ч а н и е 2. Для задачи (1.2), (1.3) на отрезке $[0,T]$ продолжим функцию y на $[T,\infty)$ непрерывным ограниченным образом и, рассуждая аналогично, получим единственность решения на отрезке.

З а м е ч а н и е 3. В условиях теоремы 2 нетрудно показать, что при $z_0 \in D_{A^2}$ выполняется включение $Z_0(\cdot)z_0 \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D_A)$, т. е. функция $Z_0(\cdot)z_0$ непрерывна в норме D_A в нуле и удовлетворяет уравнению (1.3) в этой точке.

Перейдем к рассмотрению полной задачи Коши для уравнения (1.3).

О п р е д е л е н и е 3. Семейство операторов $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t \geq 0\}$, $l \in \{1,2,\dots,m-1\}$, называется l-*разрешающим* для уравнения (1.3), если выполняются следующие условия:

(i) $S_l(t)$ сильно непрерывно при $t \geq 0$;

(ii) $S_l(t)[D_A] \subset D_A$, $S_l(t)Az = AS_l(t)z$ для всех $z \in D_A$, $t \geq 0$;

(iii) $S_l(t)z_l$ является решением задачи

$$z^{(k)}(0) = 0, \quad k \in \{0,1,\dots,m-1\} \setminus \{l\}, \quad z^{(l)}(0) = z_l \tag{1.5}$$

для уравнения (1.3) при любом $z_l \in D_A$.

Рассуждая как при доказательстве единственности разрешающего семейства в теореме 2, получим, вообще говоря, что

$$\widehat{S_l}(\lambda) = \frac{W_l(\lambda)}{\lambda^l}\,(W(\lambda)I - A)^{-1} \neq \frac{W_{l-1}(\lambda)}{\lambda^l}\,(W(\lambda)I - A)^{-1} = \frac{\widehat{S_{l-1}}(\lambda)}{\lambda}.$$

Поэтому l-разрешающие семейства не могут быть получены из разрешающего семейства $\{S(t)\colon t \geq 0\}$ уравнения (1.3) последовательным действием оператора J^1, как для уравнения с одной производной (см., например, [19]).

Теорема 3. *Пусть* $m-1 < \alpha_n \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_n > 1$, *существует разрешающее семейство операторов* $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t \geq 0\}$ *типа* $a_0 \geq 0$ *для уравнения* (1.3). *Тогда существуют* l-*разрешающие семейства* $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t \geq 0\}$ *типа* $a_0 \geq 0$, $l = 1,2,\dots,m-1$, *уравнения* (1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим при $l = 1,2,\dots,m-1$ функции

$$\frac{W_l(\lambda)}{\lambda^l W(\lambda)} = \frac{1}{\lambda^l} - \frac{W(\lambda) - W_l(\lambda)}{\lambda^l W(\lambda)}.$$

В силу леммы 1

$$\Big|\frac{W(\lambda) - W_l(\lambda)}{\lambda^l W(\lambda)}\Big| \leq \frac{C_1}{|\lambda|^{\alpha_n}}.$$

Так как $\alpha_n > 1$, существует обратное преобразование Лапласа

$$w_l(t) := \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda t}\frac{W_l(\lambda)}{\lambda^l W(\lambda)}\,d\lambda, \quad c > 0, \quad l = 1,2,\dots,m-1.$$

При $l = 1$ здесь принимаем во внимание, что $\lambda^{-1} = \widehat{1}$. Скалярные функции w_l по построению имеют тип 0 и непрерывны при $t \geq 0$, так как интегралы сходятся равномерно по t на любом отрезке $[0,T]$. Поэтому оператор-функции

$$S_l(t) = \int\limits_0^t w_l(t-s)S(s)\,ds, \quad l = 1,2,\dots,m-1, \tag{1.6}$$

по построению имеют тип a_0 и непрерывны при $t \geq 0$, при этом п. (ii) определения 3 l-разрешающего семейства операторов также выполняется.

Производные

$$w_l^{(k)}(t) := \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda t} \frac{W_l(\lambda)}{\lambda^{l-k}W(\lambda)}\, d\lambda, \quad c > 0, \quad k = 1, 2, \dots, l-1, \quad l = 1, 2, \dots, m-1,$$

также непрерывны при $t \geq 0$, поскольку

$$\frac{W_l(\lambda)}{\lambda^{l-k}W(\lambda)} = \frac{1}{\lambda^{l-k}} - \frac{W(\lambda) - W_l(\lambda)}{\lambda^{l-k}W(\lambda)}, \quad \left| \frac{W(\lambda) - W_l(\lambda)}{\lambda^{l-k}W(\lambda)} \right| \leq \frac{C_1}{|\lambda|^{\alpha_n - k}}, \tag{1.7}$$

при этом $\alpha_n - k \geq \alpha_n - (m-2) > 1$.

Из соотношений (1.7) также следует, что $w_l^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, l-2$, $w_l^{(l-1)}(0) = 1$. Поэтому при $l = 1, 2, \dots, m-1$, $z \in D_A$

$$S_l^{(k)}(t)z = \int\limits_0^t w_l^{(k)}(t-s)S(s)z\, ds, \quad k = 1, 2, \dots, l-1,$$

$$S_l^{(k)}(t)z = S^{(k-l)}(t)z + \int\limits_0^t w_l^{(l-1)}(s)S^{(k-l+1)}(t-s)z\, ds, \quad k = l, l+1, \dots, m-1,$$

и функция $S_l(t)z_l$ удовлетворяет начальным условиям (1.5).

При $\Re\lambda > a_0$

$$\widehat{S}_l(\lambda) = \widehat{w}_l(\lambda)\widehat{S}(\lambda) = \frac{W_l(\lambda)}{\lambda^l W(\lambda)} \frac{W(\lambda)}{\lambda}(W(\lambda)I - A)^{-1} = \frac{W_l(\lambda)}{\lambda^{l+1}}(W(\lambda)I - A)^{-1}.$$

Поэтому при $z_l \in D_A$

$$\mathrm{Lap}\Big[\sum_{k=1}^n \omega_k D^{\alpha_k} S_l(t)z_l\Big](\lambda) = \frac{W(\lambda)W_l(\lambda)}{\lambda^{l+1}}(W(\lambda)I - A)^{-1}z_l - \frac{W_l(\lambda)}{\lambda^{l+1}}z_l$$

$$= A\frac{W_l(\lambda)}{\lambda^{l+1}}(W(\lambda)I - A)^{-1}z_l = A\widehat{S}_l(\lambda)z_l = \widehat{S}_l(\lambda)Az_l.$$

Действуя обратным преобразованием Лапласа, получаем, что $S_l(t)z_l$ — решение уравнения (1.3). □

Если разрешающее семейство операторов уравнения аналитическое, то l-разрешающие семейства операторов можно задать в явном виде.

Теорема 4. *Пусть $m - 1 < \alpha_n \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$. Тогда при каждом $l \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ l-разрешающее семейство операторов уравнения* (1.3) *имеет вид*

$$Z_l(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}\frac{W_l(\lambda)}{\lambda^{l+1}}\big(W(\lambda)I - A\big)^{-1} d\lambda, \quad t > 0,$$

и является аналитическим семейством типа $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$.

Доказательство. Заметим, что при определении операторов $Z_l(t)$ используется тот же контур Γ, что и при определении операторов $Z_0(t)$. Имеем при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\Big\| \frac{W_l(\lambda)}{\lambda^{l+1}} \, (W(\lambda)I - A)^{-1} \Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{C}{|\lambda|^l} \Big\| \frac{W(\lambda)}{\lambda} \, (W(\lambda)I - A)^{-1} \Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{Ca^l \sin^l \theta \, K(\theta, a)}{|\lambda - a|}.$$

Поэтому по теореме 1 семейство $\{Z_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\colon t \ge 0\}$ — аналитическое и имеет тип $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$. При $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ $\widehat{Z}_l(\lambda) = \dfrac{W_l(\lambda)}{\lambda^{l+1}} \, (W(\lambda)I - A)^{-1} = \widehat{S}_l\,(\lambda)$, где операторы $S_l(t)$ заданы равенствами (1.6). В силу единственности преобразования Лапласа $Z_l(t) \equiv S_l(t)$, отсюда следует требуемое. $\square$

Теорема 5. *Пусть $m - 1 < \alpha_n \le m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \ge 0$, $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in D_A$. Тогда существует единственное в $\widehat{\mathcal{Z}}$ решение задачи*

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad l = 0, 1, \dots, m - 1, \tag{1.8}$$

для уравнения (1.3). *При этом решение аналитично в секторе $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$ и имеет вид*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l.$$

Доказательство следует из предыдущей теоремы, заметим лишь, что единственность решения задачи Коши доказывается так же, как при доказательстве теоремы 2. $\square$

Замечание 4. Для задачи (1.3), (1.8) на отрезке $[0, T]$ единственность решения можно показать без дополнительного условия о пространстве $\widehat{\mathcal{Z}}$ (см. замечание 2).

Теорема 6. *Пусть существует разрешающее семейство операторов типа $a_0 \ge 0$ для уравнения* (1.3). *Это семейство непрерывно в точке $t = 0$ в операторной норме $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.*

Доказательство. При $\Re\lambda > a$ получим с использованием определения 1 разрешающего семейства операторов $S(t)$, как это сделано при доказательстве теоремы 2,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}(S(t) - I)\, dt = \sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k - 1} \Big(\sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \Big)^{-1} - \frac{I}{\lambda}.$$

Пусть функция $\eta(t) := \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и $\eta(0) = 0$. При $\varepsilon > 0$ возьмем такое $\delta > 0$, что $\eta(t) \le \varepsilon$ при всех $t \in [0, \delta]$. Тогда

$$\Big\| \sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k - 1} \Big(\sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \Big)^{-1} - \frac{I}{\lambda} \Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \int_0^\delta e^{-\lambda t} \eta(t)\, dt + \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} \eta(t)\, dt \le \frac{\varepsilon}{\lambda} + o\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)$$

при $\Re\lambda \to +\infty$, так как $\eta(t) \le Ke^{at} + 1$ для $t \ge 0$. Поэтому при достаточно больших $\Re\lambda$

$$\Big\| \sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k} \Big(\sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \Big)^{-1} - I \Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} < 1.$$

Следовательно, оператор $W(\lambda)(W(\lambda)I - A)^{-1}$ непрерывно обратим, $[W(\lambda)(W(\lambda)I - A)^{-1}]^{-1} = W(\lambda)^{-1}(W(\lambda)I - A) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Таким образом, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $R > \max\{\varrho, (c^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})^{1/\alpha_n}\}$, где $\varrho > 0$ взято из формулировки леммы 1. Возьмем контур $\Gamma_R = \Gamma_{1,R} \cup \Gamma_{2,R} \cup \Gamma_{3,R}$, где $\Gamma_{1,R} = \{Re^{i\varphi}\colon \varphi \in (-\pi, \pi)\}$, $\Gamma_{2,R} = \{re^{i\pi}\colon r \in$

$[R,\infty)\}$, $\Gamma_{3,R} = \{re^{-i\pi} \colon r \in [R,\infty)\}$. Разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) \colon t \geq 0\}$ зададим как обратное преобразование от $\dfrac{W(\lambda)}{\lambda}(W(\lambda)I - A)^{-1}$, т. е. при $t \geq 0$

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} e^{\lambda t}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k - 1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I - A\Big)^{-1}d\lambda = I + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{A^l e^{\lambda t}}{\lambda W(\lambda)^l}d\lambda.$$

Ряд сходится, так как при $\lambda \in \Gamma_R$ по выбору R $|W(\lambda)|^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} < 1$ в силу леммы 1, при этом

$$\Big\|\frac{A^l}{\lambda W(\lambda)^l}\Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{\|A\|^l_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}}{c|\lambda|^{l\alpha_n+1}}.$$

Для малых $t > 0$ возьмем $R = 1/t$ и получим

$$\|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{e}{2\pi c}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{\infty}\int\limits_{\Gamma_{k,R}}\frac{\|A\|^l_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}}{|\lambda|^{l\alpha_n+1}}ds \leq C_1\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\|A\|^l_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}}{R^{l\alpha_n}}$$

$$= C_1\sum_{l=1}^{\infty}t^{l\alpha_n}\|A\|^l_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = \frac{C_1 t^{\alpha_n}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}}{1 - t^{\alpha_n}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0+.$$

□

Теорема 7. *Пусть* $\omega_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n > 2$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ *при некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$. *Тогда* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Доказательство. Поскольку

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\omega_k\lambda^{\alpha_k - \alpha_n} = 0,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $|\lambda| > \delta$

$$\alpha_n \arg\lambda - \varepsilon \leq \arg\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}\Big) = \arg\lambda^{\alpha_n} + \arg\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\omega_k\lambda^{\alpha_k-\alpha_n} + \omega_n\Big) \leq \alpha_n\arg\lambda + \varepsilon. \tag{1.9}$$

Так как $\theta_0 > \pi/2$, $\alpha_n > 2$, то существуют $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$, для которых $|\arg W(\lambda)| > \pi$. При этом

$$c|\lambda|^{\alpha_n} \leq \Big|\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}\Big| \leq C\,|\lambda|^{\alpha_n}. \tag{1.10}$$

Левое неравенство доказано в лемме 1, правое очевидно. Далее без ограничения общности можно считать, что $C \geq 1$, $\delta > (C/2)^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n - 1}}$.

Для произвольного $\mu_0 \in \mathbb{C}$, такого, что $|\mu_0| > (C\delta)^{\alpha_n} + 1$, возьмем $\lambda_0 = \mu_0^{1/\alpha_n}$, тогда $|\lambda_0| > \delta$, $\arg\lambda_0 = \arg\mu_0/\alpha_n \in (-\pi/2, \pi/2) \subset S_{\theta_0,a_0}$. Граница области

$$\Omega_{\lambda_0} := \Big\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \Big(\frac{|\mu_0| - 1}{C}\Big)^{1/\alpha_n} < |\lambda| < \Big(\frac{|\mu_0| + 1}{c}\Big)^{1/\alpha_n},\ \frac{\arg\mu_0 - 2\varepsilon}{\alpha_n} < \arg\lambda < \frac{\arg\mu_0 + 2\varepsilon}{\alpha_n}\Big\},$$

целиком лежащей в S_{θ_0,a_0}, функцией $\mu = W(\lambda)$ переводится в контур, для точек которого в силу неравенств (1.9), (1.10) $|\arg\mu - \arg\mu_0| \geq \varepsilon$, $|\,|\mu| - |\mu_0|\,| \geq 1$. Поэтому μ_0 лежит внутри этого контура и является образом некоторой точки из Ω_{λ_0}. Значит,

$$\{\mu \in \mathbb{C}\colon |\mu| > (C\delta)^{\alpha_n} + 1\} \subset W[S_{\theta_0,a_0}] \subset \rho(A).$$

Так как $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, для достаточно больших по модулю $\mu = W(\lambda)$

$$\|\mu R_\mu(A)\| \leq \frac{K(\theta,a)|\lambda|}{|\lambda - a|} \leq C_1,$$

поэтому из [21, лемма 5.2] следует ограниченность оператора A. □

2. Неоднородное уравнение

Решением задачи Коши (1.8) для неоднородного уравнения

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k D^{\alpha_k}z(t) = Az(t)+g(t), \quad t\in(0,T), \tag{2.1}$$

где $n\in\mathbb{N}$, $0\le\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n$, $m-1<\alpha_n\le m\in\mathbb{N}$, $\omega_k\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $k=1,2,\dots,n$, $T>0$, $g\in C([0,T];\mathcal{Z})$, назовем такую функцию $z\in C^{m-1}([0,T);\mathcal{Z})\cap C((0,T);D_A)$, что $D^{\alpha_k}z\in C((0,T);\mathcal{Z})$, $k=1,2,\dots,n$, и выполняются равенства (1.8), (2.1).

Обозначим при $t>0$

$$Z(t):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}e^{\lambda t}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}d\lambda.$$

Рассмотрим сначала случай повышенной гладкости функции g по пространственным переменным $g\in C([0,T];D_A)$.

Лемма 2. *Пусть $m-1<\alpha_n\le m\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{A}_W(\theta_0,a_0)$ при некоторых $\theta_0\in(\pi/2,\pi]$, $a_0\ge0$, $g\in C([0,T];D_A)$. Тогда функция*

$$z_g(t)=\int\limits_0^t Z(t-s)g(s)\,ds \tag{2.2}$$

является единственным решением задачи (1.8), (2.1) *с $z_l=0$, $l=0,1,\dots,m-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так же, как это было сделано для Z_l, нетрудно показать, что $Z(t)$ имеет аналитическое продолжение на $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$. В силу леммы 1 и того, что $A\in\mathcal{A}_W(\theta_0,a_0)$, имеем

$$\|Z^{(l)}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le C\int\limits_{\Gamma}\frac{|\lambda|^l e^{t\,\Re\lambda}\,ds}{|W(\lambda)|}\le C_1\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{t\,\Re\lambda}\,ds}{|\lambda|^{\alpha_n-l}}, \quad l=0,1,\dots,m-1.$$

Следовательно, $Z^{(l)}(0)=0$ для $l=0,1,\dots,m-2$. При $t\in(0,1]$ получаем

$$\int\limits_{\Gamma_0}\frac{e^{t\,\Re\lambda}\,ds}{|\lambda|^{\alpha_n-m+1}}\le 2\,\pi\,\delta^{m-1-\alpha_n}e^{a+\delta},$$

$$\int\limits_{\Gamma_\pm}\frac{e^{t\,\Re\lambda}}{|\lambda|^{\alpha_n-m+1}}\,ds\le\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{e^{rt\,\cos\theta}\,dr}{r^{\alpha_n-m+1}}\le(-t\,\cos\theta)^{\alpha_n-m}\,\Gamma(m-\alpha_n),$$

поэтому $\|Z^{(m-1)}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}=O(t^{\alpha_n-m})$ при $t\to0+$. Таким образом,

$$z_g^{(k)}(t)=\int\limits_0^t Z^{(k)}(t-s)g(s)\,ds,$$

$\|z_g^{(m-1)}(t)\|_{\mathcal{Z}}\le C\,t^{\alpha_n-m+1}\to0$ при $t\to0+$ и условия Коши (1.8) с $z_k=0$, $k=0,1,\dots,m-1$, выполняются.

Положим $g(t)=0$ при $t\ge T$, тогда $z_g=Z*g$, $\widehat{z}_g=\widehat{Z}\widehat{g}$. Нетрудно показать, что $\widehat{Z}(\lambda)=(W(\lambda)I-A)^{-1}$, так как $A\in\mathcal{A}_W(\theta_0,a_0)$, и при $\lambda\in S_{\theta,a}\setminus\{\nu\in\mathbb{C}\colon|\nu|<\varrho\}$

$$\Big\|\frac{1}{\mu-\lambda}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}\Big\|\le\frac{C}{|\lambda|^{\alpha_n+1}}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Lap}\Big[\sum_{k=1}^{n}\omega_k D^{\alpha_k} z_g\Big](\mu)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu^{\alpha_k}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}\widehat{g}(\mu)$$

$$=\widehat{g}(\mu)+A\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\mu^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}\widehat{g}(\mu).$$

Подействовав обратным преобразованием Лапласа на обе части этого равенства, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k D^{\alpha_k} z(t)=g(t)+A(Z*g)(t)=g(t)+Az_g(t),$$

так как $g\in C([0,T];D_A)$, и в силу замкнутости оператора A имеем $A(Z*g)(t)=Z*Ag(t)$.

Доказательство единственности стандартно. □

Рассмотрим теперь случай повышенной гладкости функции g по временно́й переменной. Через $C^{\gamma}([0,T];\mathcal{Z})$ при $\gamma\in(0,1]$ обозначим класс гельдеровых функций, т. е. таких функций $f\colon[0,T]\to\mathcal{Z}$, что при всех $t,s\in[0,T]$ $\|f(t)-f(s)\|_{\mathcal{Z}}\le C|t-s|^{\gamma}$ с некоторым $C>0$.

Лемма 3. *Пусть $m-1<\alpha_n\le m\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{A}_W(\theta_0,a_0)$ при некоторых $\theta_0\in(\pi/2,\pi]$, $a_0\ge 0$, $g\in C^{\gamma}([0,T];\mathcal{Z})$, $\gamma\in(0,1]$. Тогда функция* (2.2) *является единственным решением задачи* (1.8), (2.1) *с $z_l=0$, $l=0,1,\dots,m-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $\operatorname{im}Z(t)\subset D_A$ при $t>0$. Действительно,

$$AZ(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}A\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}e^{\lambda t}\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}\Big(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}e^{\lambda t}\,d\lambda=Z_0^{(1)}(t).$$

Поскольку

$$\int\limits_{\Gamma_{\pm}}\frac{|\lambda|e^{t\Re\lambda}}{|\lambda-a|}\,ds\le\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{|re^{i\theta}+a|e^{rt\cos\theta}\,dr}{r}\le\frac{C_1}{-t\cos\theta},$$

то $\|AZ(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}=O(t^{-1})$ при $t\to 0+$, $\|AZ(t-s)(g(s)-g(t))\|_{\mathcal{Z}}\le C_2|t-s|^{\gamma-1}$. Следовательно, интеграл

$$\int\limits_0^t A\,Z(t-s)g(s)\,ds=\int\limits_0^t A\,Z(t-s)(g(s)-g(t))\,ds+\int\limits_0^t Z_0^{(1)}(t-s)g(t)\,ds$$

$$=\int\limits_0^t A\,Z(t-s)(g(s)-g(t))\,ds-(Z_0(t)-I)g(t)\,ds$$

сходится, поэтому $z_g(t)\in D_A$, $z_g\in C((0,T);D_A)$. Остальная часть доказательства не отличается от соответствующей части доказательства леммы 2. □

Теорема 5 и леммы 2, 3 сразу влекут следующий результат.

Теорема 8. *Пусть* $m-1<\alpha_n\le m\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{A}_W(\theta_0,a_0)$ *при некоторых* $\theta_0\in(\pi/2,\pi]$, $a_0\ge 0$, $g\in C([0,T];D_A)\cup C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})$, $\gamma\in(0,1]$, $z_l\in D_A$, $l=0,1,\ldots,m-1$. *Тогда функция*

$$z(t)=\sum_{l=0}^{m-1}Z_l(t)z_l+\int_0^t Z(t-s)g(s)\,ds$$

является единственным решением задачи (1.8), (2.1).

З а м е ч а н и е 5. Заметим, что

$$Z_0(t)=\sum_{k=1}^n\omega_kD^{\alpha_k-1}Z(t).$$

Действительно, из полученных при доказательстве леммы 2 равенств $\widehat{Z}(\lambda)=(W(\lambda)I-A)^{-1}$, $Z^{(l)}(0)=0$, $l=0,1,\ldots,m-2$, следует, что

$$\mathrm{Lap}\Big[\sum_{k=1}^n\omega_kD^{\alpha_k-1}Z(t)\Big](\lambda)=\sum_{k=1}^n\omega_k\lambda^{\alpha_k-1}\Big(\sum_{k=1}^n\omega_k\lambda^{\alpha_k}I-A\Big)^{-1}=\widehat{Z_0}(\lambda),$$

так как $\alpha_k-1\le m-1$, $k=0,1,\ldots,n$.

3. Приложение к начально-краевым задачам

Пусть заданы полиномы $P_n(\lambda)=\sum\limits_{j=0}^n c_j\lambda^j\not\equiv 0$, $Q_n(\lambda)=\sum\limits_{j=0}^n d_j\lambda^j$, $c_j,d_j\in\mathbb{R}$, $j=0,1,\ldots,n$, $d_n\ne 0$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda u)(s)=\sum_{|q|\le 2p}a_q(s)\,\frac{\partial^{|q|}u(s)}{\partial s_1^{q_1}\,\partial s_2^{q_2}\ldots\partial s_d^{q_d}},\quad a_q\in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_lu)(s)=\sum_{|q|\le p_l}b_{lq}(s)\,\frac{\partial^{|q|}u(s)}{\partial s_1^{q_1}\,\partial s_2^{q_2}\ldots\partial s_d^{q_d}},\quad b_{lq}\in C^\infty(\partial\Omega),\quad l=1,2,\ldots,p,$$

$q=(q_1,q_2,\ldots,q_d)\in\mathbb{N}_0^d$, $|q|=q_1+\cdots+q_d$, операторный пучок $\Lambda,B_1,B_2,\ldots,B_p$ регулярно эллиптичен (см. [22]). Пусть оператор $\Lambda_1\in\mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения

$$D_{\Lambda_1}=H^{2p}_{\{B_l\}}(\Omega):=\{v\in H^{2p}(\Omega)\colon B_lv(s)=0,\ l=1,2,\ldots,p,\ s\in\partial\Omega\}$$

действует согласно равенству $\Lambda_1u=\Lambda u$. Предположим, что Λ_1 — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 действительный и дискретный (см. [22]). Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k\colon k\in\mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k\colon k\in\mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(s,0)=u_0(s),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(s,0)=u_1(s),\quad s\in\Omega,\tag{3.1}$$

$$B_l\Lambda^ku(s,t)=0,\quad k=0,1,\ldots,n-1,\quad l=1,2,\ldots,p,\quad (s,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\tag{3.2}$$

$$\sum_{k=1}^n\omega_kD_t^{\alpha_k}P_n(\Lambda)u(s,t)=Q_n(\Lambda)u(s,t)+f(s,t),\quad (s,t)\in\Omega\times(0,T),\tag{3.3}$$

где D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто по переменной t, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, $1 < \alpha_n < 2$, $\omega_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $f\colon \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$. Обозначим $n_0 := \max\{j \in \{0, 1, \dots, n\}\colon c_j \neq 0\}$, $L = P_n(\Lambda)$, $M = Q_n(\Lambda)$,

$$\mathcal{X} = \bigl\{v \in H^{2rn_0}(\Omega)\colon B_l\Lambda^k v(s) = 0,\ k = 0, 1, \dots, n_0 - 1,\ l = 1, 2, \dots, p,\ s \in \partial\Omega\bigr\}, \quad \mathcal{Y} = L_2(\Omega),$$

$$D_M = \bigl\{v \in H^{2rn}(\Omega)\colon B_l\Lambda^k v(s) = 0,\ k = 0, 1, \dots, n - 1,\ l = 1, 2, \dots, p,\ s \in \partial\Omega\bigr\}.$$

Тогда $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (более того, $M \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, если $n_0 = n$, т.е. $c_n \neq 0$). Пусть $P_n(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})$, и задача (3.1)–(3.3) представима как задача Коши $z(0) = z_0$, $z^{(1)}(0) = z_1$ для уравнения (1.3), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A = L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $D_A = D_M$, $z_0 = u_0(\cdot)$, $z_1 = u_1(\cdot)$.

Лемма 4. *Пусть $(-1)^{n-n_0}d_n/c_{n_0} < 0$, если $n_0 < n$; $\alpha_n \in (1, 2)$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ не содержит точки ноль и корней многочлена $P_n(\lambda)$. Тогда в обозначениях данного раздела $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$.*

Доказательство. Обозначим $\mu_l := Q_n(\lambda_l)/P_n(\lambda_l)$, тогда $\lim\limits_{l\to\infty} \mu_l = d_n/c_n$ в случае $n_0 = n$, а при $n_0 < n$ $\lim\limits_{l\to\infty} \mu_l = -\infty$ в силу условия $(-1)^{n-n_0}d_n/c_{n_0} < 0$. Поэтому в любом случае существует $\max\limits_{l\in\mathbb{N}} \mu_l := \mu_0$. Выберем в (1.9) $\varepsilon \in (0, \pi(2 - \alpha_n)/2)$ и для него возьмем

$$\epsilon \in \left(0, \frac{\frac{\pi}{2}(2 - \alpha_n) - \varepsilon}{\alpha_n}\right), \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2} + \epsilon, \quad a_0 = \max\left\{\frac{\delta}{\sin\theta_0}, \frac{\varrho}{\sin\theta_0}, \frac{(2c^{-1}\mu_0)^{1/\alpha_n}}{\sin\theta_0}\right\},$$

где $\delta = \delta(\varepsilon)$ выбрано таким, чтобы выполнялось неравенство (1.9), константы c и ϱ взяты из формулировки леммы 1. В таком случае для $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполняется $|\lambda| > \delta$, $|\lambda| > \varrho$, поэтому

$$\Bigl|\arg\sum_{k=1}^{n} \omega_k\lambda^{\alpha_k}\Bigr| \leq \alpha_n\theta_0 + \varepsilon < \pi, \qquad \Bigl|\sum_{k=1}^{n} \omega_k\lambda^{\alpha_k}\Bigr| \geq c|\lambda|^{\alpha_n} \geq 2\mu_0$$

в силу леммы 1. Поэтому для $v \in \mathcal{X}$, $\Re\lambda > 0$

$$\Bigl\|\sum_{k=1}^{n} \omega_k\lambda^{\alpha_k - 1}\Bigl(\sum_{k=1}^{n} \omega_k\lambda^{\alpha_k}I - A\Bigr)^{-1} v\Bigr\|_{\mathcal{X}}^2 = \Bigl|\sum_{k=1}^{n} \omega_k\lambda^{\alpha_k - 1}\Bigr|^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_l^{2n_0})\,|\langle v, \varphi_l\rangle|^2}{\Bigl|\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k\lambda^{\alpha_k} - \dfrac{Q_n(\lambda_l)}{P_n(\lambda_l)}\Bigr|^2}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_l^{2n_0})\,|\langle v, \varphi_l\rangle|^2}{|\lambda|^2\Bigl|1 - W(\lambda)^{-1}\dfrac{Q_n(\lambda_l)}{P_n(\lambda_l)}\Bigr|^2} \leq \frac{K(a)^2\sum\limits_{l=1}^{\infty}(1 + \lambda_l^{2n_0})\,|\langle v, \varphi_l\rangle|^2}{|\lambda - a|^2} \leq \frac{K(a)^2\,\|v\|_{\mathcal{X}}^2}{|\lambda - a|^2}$$

для любого $a \geq a_0$. Здесь использован тот факт, что по построению при тех l, для которых $\mu_l \leq 0$, выполняется $|1 - W(\lambda)^{-1}\mu_l| \geq \sin(\alpha_n\theta_0 + \varepsilon) > 0$, а если $\mu_l > 0$, то $|1 - W(\lambda)^{-1}\mu_l| \geq 1/2$. □

С помощью этой леммы и теоремы 8 получим теорему об однозначной разрешимости задачи (3.1)–(3.3).

Теорема 9. *Пусть $(-1)^{n-n_0}d_n/c_{n_0} < 0$, если $n_0 < n$; $\alpha_n \in (1, 2)$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ не содержит точки ноль и корней многочлена $P_n(\lambda)$, $u_0, u_1 \in D_M$, $f \in C([0, T]; D_M) \cup C^\gamma([0, T]; \mathcal{X})$, $\gamma \in (0, 1]$. Тогда существует единственное решение задачи* (3.1)–(3.3).

П р и м е р. Возьмем $P_1(\lambda) \equiv 1$, $Q_1(\lambda) = \lambda$, $Au = \Delta u$, $p = 1$, $B_1 = I$. Тогда (3.1)–(3.3) является начально-краевой задачей для некоторой модификации уравнения ультрамедленной диффузии (см. [7]):

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k D_t^{\alpha_k} u(s,t) = \Delta u(s,t), \quad (s,t) \in \Omega \times (0,T),$$

$$u(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u(s,0) = u_0(s), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(s,0) = u_1(s), \quad s \in \Omega.$$

Начально-краевая задача для такого уравнения с дискретно распределенной дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна исследована в работе [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нахушев А. М.** О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.
2. **Caputo M.** Mean fractional order derivatives. Differential equations and filters // Ann. Univ. Ferrara. 1995. Vol. 41, no. 1. P. 73–84. doi: 10.1007/BF02826009.
3. **Sokolov I. M., Chechkin A. V., Klafter J.** Distributed-order fractional kinetics // Acta Physica Polonica B. 2004. Vol. 35. P. 1323–1341.
4. **Diethelm K., Ford N., Freed A. D., Luchko Y.** Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2003. Vol. 194, no. 6–8. P. 743–773. doi: 10.1016/j.cma.2004.06.006.
5. **Псху А. В.** Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с. ISBN 5-02-033721-8.
6. **Atanacković T. M., Oparnica L., Pilipović S.** On a nonlinear distributed order fractional differential equation // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 328. P. 590–608. doi: 10.1016/j.jmaa.2006.05.038.
7. **Kochubei A. N.** Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 340. P. 252–280. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.08.024.
8. **Fedorov V. E., Abdrakhmanova A. A.** A class of initial value problems for distributed order equations with a bounded operator // Stability, Control and Differential Games: eds. A. Tarasyev, V. Maksimov, T. Filippova. Cham: Springer Nature, 2020. P. 251–262. doi: 10.1007/978-3-030-42831-0_22.
9. **Fedorov V. E., Streletskaya E. M.** Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces // Electronic J. Diff. Eq. 2018. Vol. 2018, no. 176. P. 1–17.
10. **Федоров В. Е., Фуонг Т. Д., Киен Б. Т., Бойко К. В., Ижбердеева Е. М.** Один класс полулинейных уравнений распределенного порядка в банаховых пространствах // Челяб. физ.-мат. журн. 2020. Т. 5, вып. 3. С. 342–351. doi: 10.47475/2500-0101-2020-15308.
11. **Федоров В. Е.** О порождении аналитического в секторе разрешающего семейства операторов дифференциального уравнения распределенного порядка // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2020. Т. 489. С. 113–129.
12. **Fedorov V. E.** Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations // Mathematics. 2020. Vol. 8, no. 1306. P. 1–15. doi: 10.3390/math8081306.
13. **Псху А. В.** Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1078–1098. doi: 10.17377/semi.2016.13.086.
14. **Kostić M.** Degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex spaces // Publication de l'Institut Mathématique. Nouvelle série. 2016. Tome 100 (114). P. 49–75. doi: 10.2298/PIM1614049K.
15. **Novozhenova O. G.** Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet Union // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2017. Vol. 20, no. 3. P. 790–809. doi: 10.1515/fca-2017-0040.
16. **Podlubny I.** Fractional Differential Equations. San Diego; Boston: Academic Press, 1999. 340 p.
17. **Prüss J.** Evolutionary integral equations and applications. Basel: Springer, 1993. 369 c.

18. **Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F.** Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel: Springer, 2011. 539 p.
19. **Bajlekova E. G.** Fractional evolution equations in Banach spaces. PhD thesis; Eindhoven: Eindhoven University of Technology: University Press Facilities, 2001.
20. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 616 с.
21. **Goldstein J. A.** Semigroups and second-order differential equations // J. Functional Analysis. 1969. Vol. 4. P. 50–70. doi: 10.1016/0022-1236(69)90021-4.
22. **Трибель Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.

Поступила 1.02.2021
После доработки 6.03.2021
Принята к публикации 15.03.2021

Федоров Владимир Евгеньевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры математического анализа
Челябинский государственный университет
г. Челябинск;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: kar@csu.ru

Филин Николай Владимирович
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург;
аспирант
Югорский государственный университет
г. Ханты-Мансийск;
ассистент кафедры математического анализа
Челябинский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: nikolay_filin@inbox.ru

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. Continuous differential equations and their difference analogues. *Dokl. Math.*, 1988, vol. 37, no. 3, pp. 729–732.
2. Caputo M. Mean fractional-order-derivatives. Differential equations and filters. *Ann. Univ. Ferrara*, 1995, vol. 41, no. 1, pp. 73–84. doi: 10.1007/BF02826009.
3. Sokolov I.M., Chechkin A.V., Klafter J. Distributed-order fractional kinetics. *Acta Physica Polonica B*, 2004, vol. 35, pp. 1323–1341.
4. Diethelm K., Ford N., Freed A.D., Luchko Y. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, vol. 194, no. 6–8, pp. 743–773. doi: 10.1016/j.cma.2004.06.006.
5. Pskhu A.V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial differential equations of fractional order]. Moscow: Nauka Publ., 2005, 199 p. ISBN 5-02-033721-8.
6. Atanacković T.M., Oparnica L., Pilipović S. On a nonlinear distributed order fractional differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 328, no. 1, pp. 590–608. doi: 10.1016/j.jmaa.2006.05.038.
7. Kochubei A.N. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 340, no. 1, pp. 252–281. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.08.024.
8. Fedorov V.E., Abdrakhmanova A.A. A class of initial value problems for distributed order equations with a bounded operator. *Stability, Control and Differential Games.* A. Tarasyev, V. Maksimov, T. Filippova (eds). Cham: Springer Nature, 2020, pp. 251–262. doi: 10.1007/978-3-030-42831-0_22.

9. Fedorov V.E., Streletskaya E.M. Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces. *Electronic J. Diff. Eq.*, 2018, vol. 2018, no. 176, pp. 1–17.
10. Fedorov V.E., Phuong T.D., Kien B.T., Boyko K.V., Izhberdeeva E.M. A class of distributed order semilinear equations in Banach spaces. *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, 2020, vol. 5, no. 3, pp. 342–351 (in Russian). doi: 10.47475/2500-0101-2020-15308 .
11. Fedorov V.E. On generation of an analytic in a sector resolving operators family for a distributed order equation. *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2020, vol. 489, pp. 113–129 (in Russian).
12. Fedorov V.E. Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 1306, pp. 1–15. doi: 10.3390/math8081306 .
13. Pskhu A.V. Fractional diffusion equation with discretely distributed differentiation operator. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 1078–1098 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2016.13.086 .
14. Kostić M. Degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex spaces. *Publication de l'Institut Mathématique. Nouvelle série*, 2016, vol. 100, no. 114, pp. 49–75. doi: 10.2298/PIM1614049K .
15. Novozhenova O.G. Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet Union. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2017, vol. 20, no. 3, pp. 790–809. doi: 10.1515/fca-2017-0040 .
16. Podlubny I. *Fractional differential equations*. San Diego; Boston: Acad. Press, 1999, 340 p. ISBN: 0-12-558840-2 .
17. Prüss J. *Evolutionary integral equations and applications*. Basel: Springer, 1993, 369 p. ISBN: 978-3-0348-8570-6 .
18. Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel: Springer, 2011, 539 p. ISBN: 978-3-0348-0087-7 .
19. Bajlekova E.G. *Fractional evolution equations in Banach spaces*. PhD thesis; Eindhoven: Eindhoven University of Technology: University Press Facilities, 2001. 117 p.
20. Yosida K. *Functional Analysis.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1965, 475 p. ISBN: 978-3-642-52814-9 . Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz.* Moscow: Mir Publ., 1967, 616 p.
21. Goldstein J.A. Semigroups and second-order differential equations. *Journal of Functional Analysis*, 1969, vol. 4, no. 1, pp. 50–70. doi: 10.1016/0022-1236(69)90021-4 .
22. Triebel H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. Amsterdam: North-Holland Publ., 1978, 528 p. ISBN: 0720407109 . Translated to Russian under the title *Teoriya interpolyatsii. Funktsional'nye prostranstva. Differentsial'nye operatory.* Moscow: Mir Publ., 1980, 664 p.

Received February 1, 2021
Revised March 6, 2021
Accepted March 15, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 21-51-54003), is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2021-1383).

Vladimir Evgenyevich Fedorov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: kar@csu.ru .

Nikolay Vladimirovich Filin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Yugra State University, Khanty-Mansiysk, 628012 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia;
e-mail: nikolay_filin@inbox.ru .

Cite this article as: V. E. Fedorov, N. V. Filin. Linear equations with discretely distributed fractional derivative in Banach spaces, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 264–280 .