ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ И ВОЗМОЖНОЙ ПОЛОМКЕ[1]

В. Н. Ушаков, В. И. Ухоботов, И. В. Изместьев

Рассматривается линейная задача с импульсным управлением при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи. О помехе известно только множество ее возможных значений, которое является связным компактом. Считается, что возможна одна поломка, которая приводит к изменению динамики управляемого процесса. Время наступление поломки заранее не известно. Известна только длина промежутка времени необходимого на устранение поломки. Цель процесса управления заключается в том, чтобы значение линейной функции от фазовых координат в фиксированный момент времени принадлежало заданному отрезку. Управление строится, исходя из принципа минимизации гарантированного результата. Противной стороной является помеха и момент наступления поломки. Найдены достаточные условия, при выполнении которых задача имеет решение. Построено гарантирующее управление.

Ключевые слова: управление, импульсное управление, помеха, поломка.

V. N. Ushakov, V. I. Ukhobotov, I. V. Izmest'ev. On a problem of impulse control under a disturbance and a possible breakdown.

We consider a linear problem with impulse control under an uncontrolled disturbance. The only information available about the disturbance is a connected compact set of its possible values. It is believed that one breakdown may occur and lead to a change in the dynamics of the controlled process. The time of the breakdown is not known in advance. Only the length of a time interval required to eliminate the breakdown is known. The goal of the control process is to ensure that the value of a linear function of the phase coordinates at a fixed point in time belongs to a given closed interval. The control is constructed based on the principle of minimizing the guaranteed result. The opponents are the disturbance and the time of the breakdown. Sufficient conditions are found under which the problem has a solution. A guaranteeing control is constructed.

Keywords: control, impulse control, disturbance, breakdown.

MSC: 49N70, 49N75, 91A23, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-249-263

Введение

Наряду с вероятностными методами решения задач управления с нарушениями в динамике, возникающими в результате поломки, возможно применение метода построения гарантированного результата (см. [1]). Такой подход естественен, если заранее неизвестен момент поломки, а длина промежутка времени, необходимого на устранение поломки, задана. Если цель выбора управления заключается в переводе фазового вектора из начального состояния на заданное замкнутое множество, то эта задача близка к задаче теории дифференциальных игр преследования-уклонения. Это позволяет в случае линейных систем управления использовать, например, идеи прямых методов Л. С. Понтрягина (см. [2;3]) при изучении задач с поломками.

К числу первых работ, посвященных задачам управления с поломкой в такой постановке, относятся исследования М. С. Никольского (см., например, [4–6]). В работах [5;6] автор отмечает, что на детерминированные модели с нарушениями в динамике обратил его внимание Ю. С. Осипов.

Линейную задачу управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи и с фиксированным моментом окончания процесса управления с помощью линейной замены переменных (см. [7, с. 160]) можно свести к виду, когда в правой части новых уравнений стоит только сумма управления и помехи, значения которых принадлежат заданным

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 19-11-00105).

множествам, зависящим от времени. Эта процедура была применена в [8] при рассмотрении линейной задачи управления с неконтролируемой помехой и поломкой. В данной задаче терминальная составляющая платы зависит от модуля линейной функции фазовых переменных, а интегральная составляющая задается интегралом от степени управления. Управление построено, исходя из принципа минимизации гарантированного результата. Противной стороной является помеха и момент наступления поломки.

Этот подход применим и к линейным задачам с импульсным управлением. Такие задачи возникают, например, при управлении механическими системами переменного состава, когда в отдельные моменты времени может отделяться конечное количество реактивной массы (см. [9, с. 85–87]). Анализ задач импульсного управления усложняется тем, что траектория управляемой системы может быть разрывной.

Задачам импульсного управления с помехой и дифференциальным играм при отсутствии нарушений в динамике посвящено достаточное количество работ.

В 1963 г. Н. Н. Красовский (см. [10]) предложил метод решения задач преследования, основанный на принципе поглощения областей достижимости. В этой работе рассматривались геометрические, интегральные и импульсные ограничения на выбор управления, введено понятие первого момента поглощения. В работе [11] приводится пример об импульсной встрече двух точек, когда первый игрок не может поддерживать требуемое включение областей достижимости. Обсуждается вопрос о возможности применения метода динамического программирования к задачам импульсной встречи. Идея применения этого метода для решения механических задач импульсной встречи получила развитие в работах Г. К. Пожарицкого (см. [12]).

В работе [13] доказана теорема об альтернативе для дифференциальных игр с импульсными управлениями в предположении, что целевые координаты вектора состояния меняются непрерывно. В работах [14; 15] рассматриваются задачи импульсного управления в условиях неполной информации о фазовом состоянии. В работах [16; 17] рассматриваются линейные дифференциальные игры преследования, в которых используемые импульсные управления выражаются при помощи дельта-функции Дирака. В [18; 19] исследуются задачи группового преследования при импульсных ограничениях на управления.

Важным классом дифференциальных игр являются такие задачи, когда в правой части уравнений стоит только сумма управлений первого и второго игрока с однотипными ограничениями. В [20] рассмотрена такая дифференциальная игра, в которой на управление первого игрока наложено импульсное ограничение.

При реализации численных алгоритмов решения задач импульсного управления возникает необходимость в оценке их множеств достижимости. В работе [21] развивается один из таких подходов.

В настоящей работе рассматривается линейная задача импульсного управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи и с заданным моментом окончания процесса управления. Считается, что возможна одна поломка, которая приводит к изменению динамики управляемого процесса. Время наступление поломки заранее не известно. Цель выбора импульсного управления заключается в том, чтобы в момент окончания процесса управления значение заданной линейной функции фазовых координат принадлежало фиксированному отрезку. Найдены достаточные условия, которым должно удовлетворять начальное значение фазового вектора, для того, чтобы можно было построить импульсное управление, решающее задачу.

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемый процесс

$$\dot{x} = A(t)x + \gamma(t,\tau)\dot{\phi}(t)C(t)\chi + \eta, \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t_0 \le t \le p. \tag{1.1}$$

Здесь p — заданный момент окончания процесса управления; t_0 — начальный момент времени; $\phi \in \mathbb{R}$ и $\chi \in N \subset \mathbb{R}^\rho$ являются управлениями. Множество N суть связный компакт, симметричный относительно начала координат. Помеха η принадлежит связному компакту $Q \subset \mathbb{R}^d$. Непрерывные при $t_0 \leq t \leq p$ матрицы $A(t)$ и $C(t)$ имеют размерности $d \times d$ и $d \times \rho$, соответственно. Далее, функция $\gamma(t,\tau) = 1$, если $t_0 \leq t < \tau$ или $\tau + \delta \leq t \leq p$, и $\gamma(t,\tau) = 0$ при $\tau \leq t < \tau + \delta$.

Такая ситуация может иметь место, когда в момент времени $t_0 \leq \tau \leq p$ происходит поломка и меняется динамика процесса. Момент поломки τ заранее не известен. Число $\delta > 0$, равное времени, которое необходимо на устранение поломки, задано.

Управлением является пара функций $\phi(t) \in \mathbb{R}$ и $\chi\colon [t_0,p]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\rho$. На выбор функции $\phi(t)$ накладывается импульсное ограничение

$$\mu(t) = \mu(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} |d\,\phi(r)| \geq 0,$$

где $\mu(t_0) \geq 0$ — начальный запас ресурсов, который можно использовать при формировании функции $\phi(t)$. Функция χ удовлетворяет ограничению

$$\chi(t,x) \in N \quad \text{при} \quad t \in [t_0,p] \quad \text{и} \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

Помехой η является произвольная функция

$$\eta(t,x) \in Q \quad \text{при} \quad t \in [t_0,p] \quad \text{и} \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.3}$$

При выборе функции $\phi(t)$ можно в отдельные моменты времени осуществлять ее коррекцию, которая производится следующим образом. Начальный момент времени t_0 является моментом коррекции q_0. В момент коррекции $q_i \in [t_0,p)$, $i \geq 0$ известно состояние $x(q_i)$ и оставшийся запас ресурсов $\mu(q_i) \geq 0$. Выбираются абсолютно непрерывная неубывающая функция $\phi_i\colon [q_i,p] \to \mathbb{R}$ и число $\Delta_i \geq 0$ такие, что

$$\mu(t) = \mu(q_i) - \Delta_i - \int\limits_{q_i}^{t} \dot\phi_i(r)dr \geq 0 \quad \text{при} \quad q_i < t \leq p. \tag{1.4}$$

Мгновенно меняется фазовый вектор

$$x(q_i+0) = x(q_i) + \Delta_i\gamma(q_i,\tau)C(q_i)\chi(q_i,x(q_i)). \tag{1.5}$$

Следуя [7], движение системы (1.1), порожденное выбранными функциями (1.2) и (1.3), строим на отрезке $[q_i,p]$ с помощью ломаных $x_\omega(t)$. Для этого берем его разбиение ω с диаметром $d(\omega)$

$$\omega\colon q_i = t^{(0)} < t^{(1)} < \ldots < t^{(l+1)} = p, \quad d(\omega) = \max_{0\leq j\leq l}(t^{(j+1)} - t^{(j)}). \tag{1.6}$$

Построим при $t^{(0)} < t \leq t^{(1)}$ функцию $x_\omega(t)$ как решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot x_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + \gamma(t,\tau)\dot\phi_i(t)C(t)\chi(t^{(0)},x_\omega(t^{(0)})) + \eta(t^{(0)},x_\omega(t^{(0)}))$$

с начальным условием $x_\omega(t^{(0)}) = x(\tau_i + 0)$.

Пусть функция $x_\omega(t)$ построена при $t^{(k-1)} < t \leq t^{(k)}$, $1 \leq k \leq l$. Обозначим $x^{(k)} = x_\omega(t^{(k)})$. Построим $x_\omega(t)$ при $t^{(k)} < t \leq t^{(k+1)}$ как решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot x_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + \gamma(t,\tau)\dot\phi_i(t)C(t)\chi(t^{(k)},x_\omega(t^{(k)})) + \eta(t^{(k)},x_\omega(t^{(k)})) \tag{1.7}$$

с начальным условием $x_\omega(t^{(k)}) = x^{(k)}$.

Можно показать, что семейство ломаных $x_\omega(t)$, определенных на отрезке $[q_i,p]$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. По теореме Арцела (см. [22, с. 104]) из любой подпоследовательности этих ломаных можно выделить равномерно сходящуюся на отрезке $[q_i, p]$. Под движением, реализовавшимся при выбранных $\phi_i(t)$, $\chi(t,x)$, $\eta(t,x)$ и моменте поломки τ из состояния $x(q_i+0)$, будем понимать любой равномерный предел последовательности ломаных $x_\omega(t)$, у которых диаметр разбиения ω (см. (1.6)) стремится к нулю.

При выборе следующего момента коррекции $q_{i+1} \in (q_i, p]$ становится известно, произошла поломка или нет, и если да, то когда.

Задан вектор $\psi_0 \in \mathbb{R}^d$, числа $\varepsilon \geq 0$ и $X \in \mathbb{R}$. Цель выбора управления заключается в том, чтобы выполнялось неравенство

$$|\langle x(p+0), \psi_0\rangle - X| \leq \varepsilon.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

2. Переход к одномерной задаче

Перейдем к новой управляемой системе, в уравнениях движения которой отсутствует фазовый вектор. Рассмотрим при $t_0 \leq t \leq p$ решение $\psi(t)$ задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t), \quad \psi(p) = \psi_0. \tag{2.1}$$

Здесь $A^*(t)$ — транспонированная матрица. Положим

$$b_-(t) = \min_{\eta \in Q}\langle \psi(t), \eta\rangle, \quad b_+(t) = \max_{\eta \in Q}\langle \psi(t), \eta\rangle. \tag{2.2}$$

Из связности компакта Q следует (см. [23, с. 333]), что

$$\langle \psi(t), \eta\rangle = \frac{1}{2}(b_+(t) + b_-(t)) + b(t)v, \quad |v| \leq 1, \quad b(t) = \frac{1}{2}(b_+(t) - b_-(t)) \geq 0. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$c(t) = \max_{\chi \in N}\langle \psi(t), C(t)\chi\rangle. \tag{2.4}$$

Из связности и симметрии компакта N имеем, что $c(t) \geq 0$ и $\langle \psi(t), C(t)\chi\rangle = -c(t)u$, $|u| \leq 1$. Следовательно,

$$\langle \psi(t), \gamma(t,\tau)\dot{\phi}(t)C(t)\chi\rangle = -a(t,\tau)\dot{\phi}(t)u. \tag{2.5}$$

Здесь при $\tau \leq p$ обозначено

$$\begin{gathered} a(t,\tau) = c(t) \quad \text{при} \quad t < \tau, \\ a(t,\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau \leq t < \min(\tau+\delta; p); \\ \text{если} \quad \tau+\delta \leq p, \quad \text{то} \quad a(t,\tau) = c(t) \quad \text{при} \quad \tau+\delta \leq t \leq p, \\ \text{если} \quad \tau+\delta > p, \quad \text{то} \quad a(t,\tau) = 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Отметим, что функции (2.2) и (2.4) являются непрерывными (см. [24, с. 84, лемма 3.5]). Поэтому непрерывной является и функция $b(t)$ (см. (2.3)).

Перейдем к новой переменной

$$z = \langle x, \psi(t)\rangle + \frac{1}{2}\int_t^p (b_+(r) + b_-(r))\,dr - X. \tag{2.7}$$

Тогда из (2.1) и (2.7) следует, что $z(p) = \langle x(p), \psi_0\rangle - X$. Далее, из (1.5), (2.5) и (2.6) получим, что

$$z(q_i+0) = z(q_i) - \Delta_i a(q_i,\tau)u_i. \tag{2.8}$$

Ломаная $z_\omega(t)$, отвечающая ломаной (1.7), определяется равенствами

$$\dot z_\omega(t) = -a(t,\tau)\dot\phi_i(t)u_i + b(t)v_i, \quad |u_i| \le 1, \quad |v_i| \le 1.$$

Таким образом, получили одномерную задачу импульсного управления

$$\dot z = -a(t,\tau)\dot\phi(t)u + b(t)v, \quad \dot\phi(t) \ge 0, \quad |u| \le 1, \quad |v| \le 1 \tag{2.9}$$

с заранее неизвестным моментом поломки $\tau < p$. Условие окончания принимает следующий вид:

$$|z(p)| \le \varepsilon + \mu(p)a(p,\tau), \quad \mu(p) \ge 0. \tag{2.10}$$

В задаче (2.8)–(2.10) допустимыми управлениями являются абсолютно непрерывная неубывающая функция $\phi(t)$ и произвольная функция $u(t,z)$ с $|u(t,z)| \le 1$. Допустимой помехой является произвольная функция $v(t,z)$ с $|v(t,z)| \le 1$. Движение $z(t)$ при $q_i < t \le p$ определяется как равномерный предел последовательности ломаных

$$z_\omega(t) = z_\omega(t^{(k)}) - \int\limits_{t^{(k)}}^{t} a(r,\tau)\dot\phi_i(r)\,dr\, u(t^{(k)}, z_\omega(t^{(k)})) + \int\limits_{t^{(k)}}^{t} b(r)\,dr\, v(t^{(k)}, z_\omega(t^{(k)})) \tag{2.11}$$

при $t^{(k)} < t \le t^{(k+1)}$. Здесь $z_\omega(t^{(0)}) = z(q_i + 0)$.

Далее будем рассматривать задачу (2.8)–(2.10) в более общем случае, когда z, u, v принадлежат пространству $\mathbb{R}^n$, $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, которую обозначим $\|\cdot\|$.

Примем

$$w(z) = \frac{z}{\|z\|} \quad \text{при} \quad z \ne 0 \quad \text{и} \quad w(0) \text{ — любое с ограничением } \quad \|w(0)\| = 1. \tag{2.12}$$

Рассмотрим при $q_i \le t_* \le t \le p$ задачу

$$\dot z = -b(t)w(z) + b(t)v(t,z), \quad z(t_*) = 0. \tag{2.13}$$

Лемма 1. *Для любой допустимой помехи решением задачи* (2.13) *является только функция* $z(t) = 0$ *при* $t_* \le t \le p$.

Доказательство. Пусть последовательность ломаных $z_{\omega_i}(t)$ (см. (2.11)), записанных для уравнения (2.13), сходится равномерно на отрезке $[q_i, p]$ к функции $z(t)$ при $d(\omega_i) \to 0$. Зафиксируем число $t_* < t < p$. Пусть $t^{(s_i)} \le t_* < \ldots < t^{(p_i)} < t \le t^{(p_i+1)}$. Из формулы (2.11) имеем

$$\|z_{\omega_i}(t^{(k+1)})\| \le \left| z(t^{(k)}) - \int\limits_{t^{(k)}}^{t^{(k+1)}} b(r)\,dr \right| + \int\limits_{t^{(k)}}^{t^{(k+1)}} b(r)\,dr.$$

Из этого неравенства получим (см. [25, с. 83, лемма 10.2]), что

$$\|z_{\omega_i}(t^{(p_i+1)}\| \le \max\Bigg(\|z_{\omega_i}(t^{(s_i)}\|; 2 \max_{s_i \le j \le p_i} \int\limits_{t^{(j)}}^{t^{(j+1)}} b(r)\,dr \Bigg).$$

Отсюда, учитывая условие $d(\omega_i) \to 0$, равномерную сходимость $z_{\omega_i}(t) \to z(t)$ и теорему об абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [22, с. 282]), выводим $\|z(t_*)\| = 0$. $\square$

Лемма 2. *Пусть в* (2.9) *функция* $\dot\phi_i(t) = 0$ *при* $q_i \le t \le p$. *Тогда для любой допустимой помехи и любого движения* $z(t)$ *выполнено неравенство*

$$\|z(t)\| \le \|z(t^*)\| + \int\limits_{t^*}^{t} b(r)\,dr \quad \textit{при любых} \quad q_i \le t^* \le t \le p \tag{2.14}$$

при любом моменте поломки.

Доказательство. Из формулы (2.11) при $\dot{\phi}_i(t) = 0$ следует, что $\|\dot{z}_\omega(t)\| \le b(t)$. Отсюда получим неравенство (2.14). □

3. Основные предположения

Обозначим

$$t(\varepsilon) = \inf\Big\{t \le p\colon \varepsilon \ge \int\limits_t^p b(r)\,dr\Big\}. \tag{3.1}$$

Предположение 1. *Время $\delta > 0$, которое необходимо на устранение поломки, удовлетворяет неравенству $\delta < p - t(\varepsilon)$.*

Введем в рассмотрению функцию

$$m(t) = \max_{t \le r \le p} c(r), \quad t \le p, \quad m(t) = 0 \quad \text{при} \quad p < t. \tag{3.2}$$

Эта функция является непрерывной и удовлетворяет условию монотонности $m(t^*) \le m(t_*)$ при $t_* \le t^* \le p$.

Предположение 2. *При любом $t < p$ выполнено неравенство $m(t) > 0$.*

Предположение 3. *Существует набор чисел $\theta_0 = p$, $\theta_{k+1} < \theta_k$, $k \ge 0$ такой, что объединение промежутков $[\theta_{k+1}, \theta_k)$ при $k \ge 0$ совпадает с полуосью $(-\infty, p)$, и для каждого номера $k \ge 0$ выполнено одно из следующих условий: либо $c(t) = m(t)$ при всех $t \in [\theta_{k+1}, \theta_k]$, либо $m(\theta_k) = m(t)$ при $t \in [\theta_{k+1}, \theta_k]$.*

Отметим, что в точках θ_k выполнено равенство

$$c(\theta_k) = m(\theta_k) \quad \text{при} \quad k \ge 0. \tag{3.3}$$

Зафиксируем число $s < p$. Если $s \in [\theta_{i+1}, \theta_i)$, где $m(\theta_i) = m(t)$ при $t \in [\theta_{i+1}, \theta_i)$, положим

$$f(r,s) = m(s+\delta) \quad \text{при} \quad r \in [\theta_{i+1}, s+\delta),$$

$$f(r,s) = m(r) \quad \text{при} \quad r \notin [\theta_{i+1}, s+\delta). \tag{3.4}$$

Если $s \in [\theta_{j+1}, \theta_j)$, где $c(t) = m(t)$ при $t \in [\theta_{j+1}, \theta_j)$, положим

$$f(r,s) = m(s+\delta) \quad \text{при} \quad r \in [s, s+\delta),$$

$$f(r,s) = m(r) \quad \text{при} \quad r \notin [s, s+\delta). \tag{3.5}$$

Тогда из предположения 3 следует, что либо $s \in [\theta_{i+1}, \theta_i)$, либо $s \in [\theta_{j+1}, \theta_j)$.

4. Случай $t(\varepsilon) \le t_0 < p$

Лемма 3. *Пусть $t(\varepsilon) \le t^* < p$, $z(t^*) \in \mathbb{R}$ и $\mu(t^*) \ge 0$ таковы, что выполнено неравенство*

$$\|z(t^*)\| \le c(t^*)\mu(t^*) + \varepsilon - \int\limits_{t^*}^p b(r)\,dr. \tag{4.1}$$

Тогда существует такое управление, что для любой допустимой помехи и при любом возможном моменте поломки $t^* < \tau \le p$ выполнены неравенства (2.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В начале отметим, что из формулы (2.6) следует, что $a(p,\tau)\ge 0$ при $\tau\le p$.

В момент времени $q_0=t^*$ берем управление

$$u(t,z)=w(z),\quad \dot\phi_0(t)=0 \quad \text{при} \quad q_0\le t\le p \quad \text{и} \quad \Delta_0=0. \tag{4.2}$$

Тогда из (1.4) получим, что $\mu(t)=\mu(t^*)$ при $t^*\le t\le p$. Далее, выполнено неравенство (2.14).

Пусть $c(t^*)=0$. Положим в (2.14) $t=p$. Тогда, используя (4.1), получим, что $\|z(p)\|\le\varepsilon$, $\mu(p)\ge 0$. Стало быть, условия окончания (2.10) выполнены.

Пусть $c(t^*)>0$. В момент коррекции $q_0=t^*$ берем

$$\dot\phi_0(t)=0 \quad \text{при} \quad t^*\le t\le p \quad \text{и} \quad \Delta_0=\min\Big(\mu(t^*);\frac{\|z(t^*)\|}{c(t^*)}\Big).$$

Тогда из (1.4) получим, что $\mu(t)=\mu(t^*)-\Delta_0\ge 0$ при всех $t^*\le t\le p$. По условию леммы возможный момент поломки $t^*<\tau\le p$. Поэтому из (2.6) получим, что $a(t^*,\tau)=c(t^*)$. Следовательно, используя (2.8) и (2.12), получим, что

$$\|z(t^*+0)\|=|\|z(t^*)\|-\Delta_0c(t^*)|=\max(0;\|z(t^*+0)\|-c(t^*)\mu(t^*)).$$

Отсюда и из леммы 2 следует, что при любой допустимой помехе выполнено неравенство

$$\|z(p)\|\le\|z(t^*+0)\|+\int_{t^*}^{p}b(r)\,dr\le\max\Big(\int_{t^*}^{p}b(r)\,dr;\|z(t^*)\|-c(t^*)\mu(t^*)+\int_{t^*}^{p}b(r)\,dr\Big).$$

Поэтому, используя (3.1) и (4.1), получим, что $\|z(p)\|\le\varepsilon$. □

Лемма 4. *Пусть* $t(\varepsilon)\le t^*<p$, $z(t^*)\in\mathbb{R}^n$ *и* $\mu(t^*)\ge 0$ *таковы, что выполнено неравенство*

$$\|z(t^*)\|\le m(t^*)\mu(t^*)+\varepsilon-\int_{t^*}^{p}b(r)\,dr. \tag{4.3}$$

Тогда существует такое управление, что для любой допустимой помехи при отсутствии на отрезке $[t^*,p]$ *поломки будут выполнены неравенства* (2.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (4.3), учитывая формулу (3.2), получим, что существует число $t^*\le t_*\le p$, при котором

$$\|z(t^*)\|\le c(t_*)\mu(t^*)+\varepsilon-\int_{t^*}^{p}b(r)\,dr. \tag{4.4}$$

Пусть $t^*=t_*$. Тогда из (4.4), применяя лемму 3, получим доказываемое утверждение.

Пусть $t^*<t_*\le p$. В начальный момент коррекции $q_0=t^*$ берем управление (4.2). Тогда при любой допустимой помехе выполнены равенство $\mu(t)=\mu(t^*)$ и неравенство (2.14) при $t^*\le t\le p$.

Пусть $t_*=p$. Положим в (2.14) $t=p$. Тогда из (4.4) и (2.14) получим требуемое неравенство (2.10).

Пусть $t^*<t_*<p$. Положим в (2.14) $t=t_*$ и подставим в него неравенство (4.4). Получим неравенство (4.1) с заменой в нем t^* на t_*. Далее применяем лемму 3. □

Теорема 1. *Пусть начальное состояние* $t(\varepsilon)\le t_0<p$, $z(t_0)\in\mathbb{R}^n$ *и* $\mu(t_0)\ge 0$ *таково, что выполнено неравенство*

$$\|z(t_0)\|\le f(t_0,s)\mu(t_0)+\varepsilon-\int_{t_0}^{p}b(r)\,dr \quad \textit{при любом} \quad t_0\le s\le p. \tag{4.5}$$

Тогда существует управление, которое при любой допустимой помехе и при любом моменте поломки $\tau\in[t_0,p]$ *осуществляет выполнение неравенств* (2.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в неравенстве (4.5) $s = t_0$ и учтем формулы (3.4) и (3.5). Получим

$$\|z(t_0)\| \le m(t_0+\delta)\mu(t_0) + \varepsilon - \int_{t_0}^{p} b(r)\,dr. \tag{4.6}$$

В начальный момент коррекции $q_0 = t_0$ берем управление (4.2). Тогда при любой допустимой помехе и при любом моменте поломки $t_0 \le \tau \le p$ выполнены равенство $\mu(t) = \mu(t_0)$ и неравенство (2.14) с заменой в нем t^* на t_0. Из этих соотношений и из неравенства (4.6) следует, что

$$\|z(t)\| \le m(t_0+\delta)\mu(t) + \varepsilon - \int_{t}^{p} b(r)\,dr \quad \text{при} \quad t_0 \le t \le p. \tag{4.7}$$

Из (3.2) вытекает, что $m(t_0+\delta) \le c(p)$ при $t_0 + \delta \ge p$. Полагая в этом случае в (4.7) $t = p$, получим требуемое неравенство (2.10). Будем считать, что $t_0 + \delta < p$.

Пусть поломка произошла в начальный момент времени t_0. Положим в (4.7) $t = t_0 + \delta$. Поскольку при $t_0 + \delta \le t \le p$ поломки нет, то применима лемма 4.

Рассмотрим теперь случай, когда в момент времени t_0 поломки еще не было.

Пусть t_0 принадлежит промежутку $[\theta_{j+1}, \theta_j)$, $j \ge 0$, на котором выполнено равенство $c(t) = m(t)$ при $\theta_{j+1} \le t \le \theta_j$. Тогда из (3.5) следует, что $f(t_0, s) = c(t_0)$ при любом $t_0 < s < \theta_j$. Отсюда и из неравенства (4.5) получим неравенство (4.1) с заменой в нем t^* на t_0. Далее применяем лемму 3.

Пусть t_0 принадлежит промежутку $[\theta_{i+1}, \theta_i)$, $i \ge 0$, где $m(t_0) = m(t)$ при $t_0 \le t \le \theta_i$. Из неравенств (2.14) при $t^* = t_0$ и (4.5) получим, что при любом $t_0 \le t \le p$ выполнено неравенство

$$\|z(t)\| \le f(t_0, s)\mu(t) + \varepsilon - \int_{t}^{p} b(r)\,dr \quad \text{для всех} \quad s \in [t_0, p]. \tag{4.8}$$

Пусть поломка произошла при $t_0 < \tau < \theta_i$. Тогда из формулы (3.4) следует, что $f(t_0, \tau) = m(\tau + \delta)$. Отсюда и из неравенства (4.8) следует

$$\|z(t)\| \le m(\tau+\delta)\mu(t) + \varepsilon - \int_{t}^{p} b(r)\,dr \quad \text{при} \quad t_0 \le t \le p. \tag{4.9}$$

Если $\tau + \delta \ge p$, то полагая в (4.9) $t = p$, получим требуемое неравенство (2.10).

Пусть $\tau + \delta < p$. Положим в (4.9) $t = \tau + \delta$. Поскольку на отрезке $[\tau + \delta, p]$ поломки нет, то применима лемма 4.

Пусть при $t_0 \le t < \theta_i$ поломки не было. Подставим в (4.8) любое $\theta_i < s \le p$. Тогда из (3.4) и (3.5) получим, что $f(t_0, s) = m(t_0) = m(\theta_i)$. Неравенство (4.8) при $t = \theta_i$ примет вид

$$\|z(\theta_i)\| \le m(\theta_i)\mu(\theta_i) + \varepsilon - \int_{\theta_i}^{p} b(r)\,dr.$$

Отсюда и из равенства (3.3) следует, что применима лемма 3. □

5. Случай $t_0 < t(\varepsilon)$

Рассмотрим состояние $t^* < t(\varepsilon)$, $z(t^*) \in \mathbb{R}^n$ и $\mu(t^*) \ge 0$, удовлетворяющее неравенству

$$\|z(t^*)\| \le m(t^*)\Bigg(\mu(t^*) - \int_{t^*}^{t(\varepsilon)} \frac{b(r)}{m(r)}\,dr\Bigg). \tag{5.1}$$

Лемма 5. *Пусть* t^* *принадлежит промежутку* $[\theta_{j+1}, \theta_j)$, *где* $c(t) = m(t)$ *при* $\theta_{j+1} \le t \le \theta_j$. *Тогда управление*

$$u(t, z) = w(z), \quad \dot{\phi}_0(t) = \frac{b(t)}{m(t)} \quad \text{при} \quad \theta_{j+1} \le t \le \theta_j, \quad \Delta_0 = \frac{\|z(t^*)\|}{c(t^*)} \tag{5.2}$$

при любой допустимой помехе обеспечивает при отсутствии поломки на промежутке $[\theta_{j+1}, \theta_j)$ *выполнение соотношений*

$$\|z(t)\| = 0, \quad \mu(t) \ge \int\limits_{t}^{t(\varepsilon)} \frac{b(r)}{m(r)}\,dr \quad \text{при} \quad t^* < t \le \theta_j. \tag{5.3}$$

Доказательство. Согласно (2.6) $a(t, \tau) = c(t)$ при любом $t < \tau \le p$. Поэтому из (2.6) при $i = 0$, $q_0 = t^*$ и Δ_0 (см. (5.2)) выводим, что $\|z(t^* {+} 0)\| = 0$. Подставим функцию $\dot{\phi}_0(t)$ (см. (5.2)) в формулу (2.9). Получим уравнение (2.13). Из леммы 1 получим первое равенство в (5.3). Из (1.4) и (5.2) следует, что

$$\mu(t) = \mu(t^*) - \frac{\|z(t^*)\|}{c(t^*)} - \int\limits_{t^*}^{t} \frac{b(r)}{m(r)}\,dr.$$

Отсюда, используя неравенство (5.1), имеем неравенство (5.3). □

Лемма 6. *Пусть выполнено неравенство* (5.1), *число* t^* *принадлежит промежутку* $[\theta_{i+1}, \theta_i)$, *где* $m(\theta_i) = m(t)$ *при* $\theta_{i+1} \le t \le \theta_i$. *Тогда управление* (4.2) *при любой допустимой помехе и при любом возможном моменте поломки* $t^* \le \tau \le \theta_i$ *обеспечивает выполнение неравенства* (5.1) *с заменой в нем* t^* *на* t *при всех* $t^* \le t \le \min(t(\varepsilon); \theta_i)$.

Доказательство. Подставим управление (4.2) в (2.9). Из леммы 2 следует, что при любой допустимой помехе и для любого возможного момента поломки выполнено неравенство (2.14). Подставим в него неравенство (5.1). Тогда, учитывая, что $\mu(t) = \mu(t^*)$ и $m(t) = m(t^*)$, получим неравенство (5.1) с заменой в нем t^* на t. □

Лемма 7. *Пусть начальное состояние удовлетворяет неравенству* (5.1). *Тогда существует управление, которое при любой допустимой помехе и при отсутствии поломки на отрезке* $[t^*, p]$ *обеспечивает выполнение неравенства* (2.10).

Доказательство. Пусть числа θ_k из предположения 3 таковы, что $\theta_{k+1} \le t^* < \theta_k < \ldots < \theta_q \le t(\varepsilon) < \theta_{q-1}$. Применяя поочередно леммы 5 и 6, строим управление так, чтобы при $t = t(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $\|z(t(\varepsilon))\| \le m(t(\varepsilon))\mu(t(\varepsilon))$. Из (3.1) следует равенство

$$\varepsilon = \int\limits_{t(\varepsilon)}^{p} b(r)\,dr. \tag{5.4}$$

Поэтому при $t^* = t(\varepsilon)$ выполнено неравенство (4.3). Далее применяем лемму 4. □

Теорема 2. *Пусть начальное состояние* $t_0 < t(\varepsilon)$, $z(t_0) \in \mathbb{R}^n$ *и* $\mu(t_0) \ge 0$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|z(t_0)\| \le f(t_0, s)\left(\mu(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t(\varepsilon)} \frac{b(r)}{f(r, s)}\,dr\right) \quad \text{при любом} \quad t_0 \le s \le p. \tag{5.5}$$

Тогда существует управление, которое при любой допустимой помехе и при любом моменте поломки $\tau \in [t_0, p]$ *осуществляет выполнение неравенства* (2.10).

Доказательство. Пусть $t_0 \in [\theta_{j+1}, \theta_j)$, где $m(t) = c(t)$ при $\theta_{j+1} \le t \le \theta_j$.

Рассмотрим в начале случай, когда поломка произошла в начальный момент времени $\tau = t_0$. Из предположения 1 следует, что $t_0 + \delta \le p$. Положим в (5.5) $s = t_0$. Тогда из (3.5) получим, что

$$\|z(t_0)\| \le m(t_0+\delta)\left(\mu(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t(\varepsilon)} \frac{b(r)}{f(r,t_0)}\, dr\right).$$

Здесь $f(r,t_0) = m(t_0+\delta)$ при $t_0 \le r < t_0+\delta$ и $f(r,t_0) = m(r)$ при $t_0+\delta \le r \le p$. Отсюда имеем, что если $t_0 + \delta \le t(\varepsilon)$, то

$$\|z(t_0)\| \le m(t_0+\delta)\left(\mu(t_0) - \int\limits_{t_0+\delta}^{t(\varepsilon)} \frac{b(r)}{m(r)}\, dr\right) - \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} b(r)\, dr. \tag{5.6}$$

Если же $t(\varepsilon) < t_0 + \delta$, то

$$\|z(t_0)\| \le m(t_0+\delta)\mu(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t(\varepsilon)} b(r)\, dr. \tag{5.7}$$

Берем управление (4.2) при $q_0 = t_0$. Тогда в случае $t_0 + \delta \le t(\varepsilon)$ из (5.6), используя лемму 2 и равенство $\mu(t_0+\delta) = \mu(t_0)$, получим неравенство (5.1) с заменой в нем t^* на $t_0+\delta$. Далее применяем лемму 7.

Пусть $t(\varepsilon) < t_0+\delta$. Тогда из неравенства (5.7), используя лемму 2, равенства $\mu(t_0+\delta) = \mu(t_0)$ и (5.4), выводим неравенство (4.3) с заменой в нем t^* на $t_0+\delta$. Далее применяем лемму 4.

Рассмотрим теперь случай, когда в начальный момент времени t_0 поломки еще не было. Положим $t_1 = \theta_j$, если поломка на промежутке $[t_0, \theta_j)$ не произошла, и $t_1 = \tau$, если момент поломки $\tau \in (t_0, \theta_j)$. Зафиксируем число $t_1 \le s \le p$. Из формул (3.4) и (3.5) следует, что $f(r,s) = m(r)$ при $t_0 \le r < t_1$. Подставим эту функцию в неравенство (5.5). Учитывая, что $m(r) = c(r) > 0$ при $t_0 \le r < t_1$, получим, что если $t_1 < t(\varepsilon)$, то

$$\frac{\|z(t_0)\|}{c(t_0)} \le \mu(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{b(r)}{c(r)}\, dr - \int\limits_{t_1}^{t(\varepsilon)} \frac{b(r)}{f(r,s)}\, dr \quad \text{при} \quad t_1 \le s \le p. \tag{5.8}$$

Если же $t(\varepsilon) \le t_1$, то

$$\frac{\|z(t_0)\|}{c(t_0)} \le \mu(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t(\varepsilon)} \frac{b(r)}{c(r)}\, dr. \tag{5.9}$$

Возьмем управление (4.2) при $q_0 = t_0$. Тогда при $t_0 < t \le t_1$ будут выполнены соотношения

$$\|z(t)\| = 0, \quad \mu(t) = \mu(t_0) - \frac{\|z(t_0)\|}{c(t_0)} - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{b(r)}{f(r,s)}\, dr. \tag{5.10}$$

Пусть $t(\varepsilon) < t_1$. Тогда из (5.9) и (5.10) получим, что $\mu(t(\varepsilon)) \ge 0$. Отсюда, используя равенства (5.4) и $\|z(t(\varepsilon))\| = 0$, получим условие (4.5) с заменой в нем t_0 на $t(\varepsilon)$. Далее применяем теорему 1.

Из неравенства (5.10), учитывая неравенство (5.8), получим, что при $t_1 \le t(\varepsilon)$

$$\mu(t_1) \ge \int\limits_{t_1}^{t(\varepsilon)} \frac{b(r)}{f(r,s)}\, dr \quad \text{при любых} \quad t_1 \le s \le p.$$

Отсюда и из равенства $\|z(t_1)\| = 0$, используя неравенство $f(t_1, s) \geq 0$ при $t_1 \leq s \leq p$, выводим неравенство (5.5) с заменой в нем t_0 на t_1.

Если $t_1 < \theta_j$, то пришли к разобранному ранее случаю, когда поломка происходит в начальный момент времени $t_0 = t_1$.

Пусть $t_1 = \theta_j$. Переобозначим $\theta_j = \theta_{i+1}$. В силу предположения 3 на промежутке $[\theta_{i+1}, \theta_i)$ выполнено условие $m(t) = m(\theta_i)$ для всех $\theta_{i+1} \leq t \leq \theta_i$.

Итак, пусть $t_0 \in [\theta_{i+1}, \theta_i)$ и выполнено неравенство (5.5). Берем управление (4.2) при $q_0 = t_0$. Тогда из (5.5), используя лемму 2 и равенство $\mu(t) = \mu(t_0)$, имеем

$$\|z(t)\| \leq f(t_0, s)\left(\mu(t) - \int\limits_{t_0}^{t(\varepsilon)} \frac{b(r)}{f(r, s)}\, dr\right) + \int\limits_{t_0}^{t} b(r)\, dr \quad \text{при} \quad t_0 \leq t \leq p \tag{5.11}$$

и любом $t_0 \leq s \leq p$.

Пусть поломка произошла в момент времени $t_0 \leq \tau \leq \theta_i - \delta$. Положим в (5.11) $s = \tau$. Из (3.4) следует, что $f(r, \tau) = m(\theta_i)$ при $t_0 \leq r < \theta_i$ и $f(r, \tau) = m(r)$ при $\theta_i \leq r \leq p$. Подставим эту функцию в неравенство (5.11) при $t = \theta_i$.

Если $\theta_i \leq t(\varepsilon)$, то получим неравенство (5.1) с заменой в нем t^* на θ_i. Далее, на отрезке $[\theta_i, p]$ поломка отсутствует. Применяем лемму 7.

Пусть $t(\varepsilon) < \theta_i$. Тогда из (5.11) следует, что

$$\|z(\theta_i)\| \leq m(\theta_i)\mu(\theta_i) + \int\limits_{t(\varepsilon)}^{\theta_i} b(r)\, dr. \tag{5.12}$$

Отсюда, используя равенство (5.4), выводим неравенство (4.3) с заменой в нем t^* на θ_i. Поскольку на отрезке $[\theta_i, p]$ поломка отсутствует, то применима лемма 4.

Пусть момент поломки удовлетворяет неравенствам $\tau < \theta_i < \tau + \delta$. В этом случае из (3.4) получим, что $f(r, \tau) = m(\tau + \delta)$ при $\theta_{i+1} \leq r < \tau + \delta$ и $f(r, \tau) = m(r)$ при $\tau + \delta \leq r$. Подставим эту функцию в неравенство (5.11) при $s = \tau$. Тогда, учитывая лемму 2 и равенство $\mu(\tau + \delta) = \mu(t_0)$, имеем, что если $\tau + \delta \leq t(\varepsilon)$, то получим неравенство (5.1) с заменой в нем t^* на $\tau + \delta$. Если $t(\varepsilon) < \tau + \delta$, то получим неравенство (4.3) с заменой в нем t^* на $\tau + \delta$. На отрезке $[\tau + \delta, p]$ поломки нет. Поэтому применяем леммы 7 и 4.

Пусть при $t_0 \leq t < \theta_i$ поломки не было. Возьмем любое число $\theta_i \leq s \leq p$. Тогда из (3.4) получим, что $f(r, s) = m(r)$ при $t_0 \leq r < \theta_i$. Отсюда и из неравенства (5.11), учитывая, что $m(r) = m(\theta_i)$ при $t_0 \leq r \leq \theta_i$, имеем, что если $\theta_i \leq t(\varepsilon)$, то получим неравенство (5.5) с заменой в нем t_0 на θ_i. Пришли к разобранному в начале доказательства теоремы случаю.

В случае $t(\varepsilon) < \theta_i$ получим неравенство (5.12). □

6. Пример

Точка переменного состава, движение которой описывается уравнением Мещерского (см. [9, с. 85–87])

$$\ddot{x} = \eta(t)\, \frac{\dot{M}(t)}{M(t)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.1}$$

преследует точку, которая движется с ограниченной по величине скоростью

$$\dot{y} = bv, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \|v\| \leq 1, \quad b > 0. \tag{6.2}$$

Здесь $\eta(t) \in \mathbb{R}^n$ —относительная скорость отделения топлива, ее норма $\|\eta(t)\|$ непрерывно зависит от времени и не возрастает; $M(t)$ — масса в момент времени t. Заданы момент времени

$p > t_0$ и число $\varepsilon > 0$. Цель преследования заключается в осуществлении неравенства $\|y(p) - x(p)\| \leq \varepsilon$. Обозначим через M_1 неизменяемую часть массы $M(t)$. Положим

$$\phi(t) = \ln \frac{M_1}{M(t)} \Rightarrow \dot{\phi}(t) = -\frac{\dot{M}(t)}{M(t)}.$$

Уравнение Мещерского (6.1) принимает вид $\dot{x} = -\|\eta(t)\|\dot{\phi}(t)u,\ u = \dfrac{\eta}{\|\eta\|}$. Условие не перерасхода топлива $M(t) \geq M_1$ запишем неравенством

$$\mu(t) = \ln \frac{M(t)}{M_1} \geq 0.$$

Считаем, что наряду с непрерывным изменением массы $M(t)$ в отдельные моменты времени r может происходить мгновенное отделение конечного количества массы $0 \leq M(r) - M(r+0)$. Это приводит к мгновенному изменению скорости (см. [9])

$$\dot{x}(r+0) = \dot{x}(r) - \Delta u(r), \quad \Delta = \mu(r) - \mu(r+0) \geq 0.$$

Введем новую переменную $z = y - x - (p-t)\dot{x}$. Тогда из уравнений движения (6.1) и (6.2) получим, что $\dot{z} = -c(t)\dot{\phi}u + bv,\ \|u\| = 1,\ \|v\| \leq 1$. Здесь функция $c(t) = (p-t)\|\eta(t)\|$ не возрастает.

Во время преследования может произойти поломка $\|\eta(t)\| = 0$ при $\tau \leq t < \tau + \delta$ в заранее неизвестный момент времени τ.

Поскольку функция $c(t)$ не возрастает, то из формулы (3.5) получим, что $f(r,s) = c(r)$ при $r < s$ и $s + \delta \leq r \leq p$; $f(r,s) = c(s+\delta)$ при $s \leq r < s + \delta$.

Рассмотрим случай, когда начальный момент времени $t_0 < t(\varepsilon) = p - \varepsilon/b$. Пусть поломка происходит при $\tau = t_0$. До момента $t_0 + \delta$ происходит устранение поломки при функции $\phi(t) = 0$. В момент времени $t_0 + \delta$ выбирается управление (5.2), которое в рассматриваемом примере принимает вид

$$u(t,z) = w(z), \quad \dot{\phi}_0(t) = \frac{b}{c(t)} \quad \text{при} \quad t_0 + \delta \leq t \leq t(\varepsilon), \quad \Delta_0 = \frac{\|z(t_0+\delta)\|}{c(t_0+\delta)}. \tag{6.3}$$

Это управление мгновенно меняет скорость $\dot{x}$ и осуществляет равенство

$$\|z(t)\| = 0 \Leftrightarrow \dot{x}(t) = \frac{y(t) - x(t)}{p-t} \quad \text{при} \quad t_0 + \delta + 0 \leq t \leq t(\varepsilon).$$

Отсюда получим, что

$$\left\| y(t(\varepsilon)) - x(t(\varepsilon)) - \frac{\varepsilon}{b}\dot{x}(t(\varepsilon)) \right\| = \varepsilon - b(p - t(\varepsilon)).$$

Поэтому при любом управлении $\|v(t,z)\| \leq 1$ и при управлении $\dot{\phi}(t) = 0,\ t(\varepsilon) \leq t \leq p$ будет выполнено неравенство $\|y(p) - x(p)\| \leq \varepsilon$.

Пусть поломка происходит при $t_0 < \tau < t(\varepsilon)$. Тогда при $t_0 \leq t \leq p$ выбирается управление (6.3). При $\tau \leq t < \tau + \delta$ происходит устранение поломки с функцией $\phi(t) = 0$. В момент времени $\tau + \delta$ выбирается управление (6.3) с заменой в нем числа t_0 на τ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. **Понтрягин Л. С.** О линейных дифференциальных играх. I // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1280.

3. **Понтрягин Л. С.** О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.
4. **Никольский М. С.** О задаче управления линейной системой с нарушениями // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 6. С. 1317–1320.
5. **Никольский М. С.** Задача о переправе с возможной остановкой двигателя // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. С. 1937–1940.
6. **Никольский М. С.** Управление линейными объектами с возможными нарушениями в динамике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1995. Т. 3. С. 132–146.
7. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. **Ухоботов В. И.** Об одной задаче управления при наличии помехи и возможной поломке // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 265–278. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-265-278 .
9. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
10. **Красовский Н. Н.** Об одной задаче преследования // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 2. С. 244–254.
11. **Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.** К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференц. уравнения. 1966. Т 2, № 5. С. 587–599.
12. **Пожарицкий Г. К.** Игровая задача импульсного сближения с противником, ограниченным по энергии // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 4. С. 579–589.
13. **Субботина Н. Н., Субботин А. И.** Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 397–406.
14. **Серов В. П., Ченцов А. Г.** О программной линейной игровой задаче наведения при ограничении на импульс управляемой силы // Автоматика и телемеханика. 1993. № 5. С. 61–74.
15. **Кумков С. И., Пацко В. С.** Информационное множество в задаче импульсного управления // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 195–206.
16. **Белоусов А. А.** Дифференциальные игры с интегральными ограничениями и импульсными управлениями // Докл. НАН Украины. 2013. № 11. С. 37–42.
17. **Тухтасинов М.** Линейная дифференциальная игра преследования с импульсным управлением и линейным интегральным ограничением на управления игроков // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее приложения. Тематический обзор. 2017. Т. 143. С. 24–39.
18. **Петров Н. Н.** Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 38–44.
19. **Котлячкова Е .В.** К нестационарной задаче простого преследования в классе импульсных стратегий // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2015. Т. 1, № 45. С. 106–113.
20. **Ухоботов В. И., Изместьев И. В.** Синтез управлений в однотипной игровой задаче импульсной встречи в заданный момент времени с терминальным множеством в форме кольца // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 1. С. 69–85. doi: 10.20537/vm170107 .
21. **Филиппова Т. Ф.** Оценка множеств достижимости систем с импульсным управлением, неопределенностью и нелинейностью // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т. 10. С. 205–216. doi: 10.26516/1997-7670.2017.19.205 .
22. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
23. **Кудрявцев Л. Д.** Курс математического анализа. М.: Высшая шк., 1981. Т. 1. 687 с.
24. **Пшеничный Б. Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
25. **Ухоботов В. И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун–та, 2005. 124 с.

Поступила 01.02.2021
После доработки 1.03.2021
Принята к публикации 15.03.2021

Ушаков Владимир Николаевич
чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Ухоботов Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург;
зав. кафедрой
Челябинский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: ukh@csu.ru

Изместьев Игорь Вячеславович
канд. физ.-мат. наук
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург;
науч. сотрудник
Челябинский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: j748e8@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 520 p.
2. Pontryagin L.S. *Linear differential games. I. Sov. Math., Dokl.*, 1967, vol. 8, pp. 769–771.
3. Pontryagin L.S. Linear differential games. II. *Sov. Math., Dokl.*, 1967, vol. 8, pp. 910–912.
4. Nikol'skii M.S. The problem of control of a linear system with disturbances. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 287, no. 6, pp. 1317–1320 (in Russian).
5. Nikol'skii M.S. The crossing problem with possible engine shutoff. *Diff. Eq.*, 1993, vol. 29, no. 11, pp. 1681–1684.
6. Nikol'skii M.S. On control problems for linear objects with disturbances in the dynamics. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 1995, vol. 3, pp. 132–146 (in Russian).
7. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
8. Ukhobotov V.I. On a control problem under disturbance and possible breakdown. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2019, vol. 307, pp. S159–S171. doi: 10.1134/S0081543819070137 .
9. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 475 p.
10. Krasovskii N.N. On a problem of tracking. *J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, no. 2, pp. 363–377. doi: 10.1016/0021-8928(63)90006-6 .
11. Krasovskii N.N., Tret'yakov V.E. On a pursuit problem in the case of restrictions on the impulses of control forces. *Differ. Uravn.*, 1966, vol. 2, no. 5, pp. 587–599 (in Russian).
12. Pozharitskii G.K. Game problem of impulse encounter with an opponent limited in energy. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, no. 4, pp. 555–565. doi: 10.1016/0021-8928(75)90056-8 .
13. Subbotina N.N., Subbotin A.I. Alternative for the encounter–evasion differential game with constraints on the momenta of players' controls. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 376–385. doi: 10.1016/0021-8928(75)90002-7 .
14. Serov V.P., Chentsov A.G. On a programmed linear game-theoretic guidance problem with constraints on the control force impulse. *Autom. Remote Control*, 1993, vol. 54, no. 5, part 1, pp. 755–768.
15. Kumkov S.I., Patsko V.S. Information sets in the pulse control problem. *Autom. Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 7, part 2, pp. 1224–1234.
16. Belousov A.A. Differential games under integral constraints with impulse controls. *Dokl. NAN Ukrainy*, 2013, no. 11, pp. 37–42 (in Russian).

17. Tukhtasinov M. Linear differential pursuit game with impulse control and linear integral constraint of controls of players. *J. Math. Sci.*, 2020, vol. 245, pp. 23–39. doi: 10.1007/s10958-020-04674-8 .
18. Petrov N.N. A problem of group pursuit in the class of impulse strategies of pursuers. *J. Computer Systems Sci. International*, 2009, vol. 48, no. 2, pp. 199–205. doi: 10.1134/S106423070902004X .
19. Kotlyachkova E.V. About non-stationary problem of simple pursuit in the class of impulse strategies. *Izv. IMI UdGU*, 2015, no. 1(45), pp. 106–113 (in Russian).
20. Ukhobotov V.I., Izmest'ev I.V. Synthesis of controls in a single-type game problem of pulse meeting at fixed time with a terminal set in the form of a ring. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 1, pp. 69–85 (in Russian). doi: 10.20537/vm170107 .
21. Filippova T.F. Estimates of reachable sets for systems with impulsive control, uncertainty and nonlinearity. *The Bulletin of Irkutsk State University. Ser. Mathematics*, 2017, vol. 19, pp. 205–216 (in Russian). doi: 10.26516/1997-7670.2017.19.205 .
22. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*, vol. 1, 2. Mineola; N Y: Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830 . Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*. Moscow: Nauka Publ., 1972, 496 p.
23. Kudryavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza; tom* 1 [A course in mathematical analysis; vol. 1]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 1981, 687 p.
24. Pshenichnyi B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 319 p.
25. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineinykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami* [Method of one-dimensional projecting in linear differential games with integral constraints]. Chelyabinsk: Chelyabinsk State Univ. Publ., 2005, 124 p. ISBN: 5-7271-0725-3 .

Received February 1, 2021
Revised March 1, 2021
Accepted March 15, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00105).

Vladimir Nikolaevich Ushakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: ushak@imm.uran.ru .

Viktor Ivanovich Ukhobotov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Head of Department, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: ukh@csu.ru .

Igor' Vyacheslavovich Izmest'ev, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Researcher, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: j748e8@gmail.com .

Cite this article as: V. N. Ushakov, V. I. Ukhobotov, I. V. Izmest'ev. On a problem of impulse control under a disturbance and a possible breakdown, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 249–263 .