ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977+517.23

ВЫЧИСЛЕНИЕ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО ПО ЗАШУМЛЕННЫМ ДАННЫМ. СЛУЧАЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

П. Г. Сурков

Рассматривается одна из постановок “классических” задач математического анализа — задача нахождения производной функции. Значения функции измеряются непрерывно на конечном отрезке времени с некоторой погрешностью. На основании этих значений в работе предлагается алгоритм приближенного вычисления дробной производной Капуто на основе методов теории управления (по закону обратной связи). Сначала задача вычисления дробной производной заменяется обратной задачей для управляемой системы. Для полученной обратной задачи применяется метод динамического обращения, позволяющий построить алгоритм ее решения, устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений и работающий в режиме реального времени. Алгоритм базируется на двух ключевых элементах. Первый из них — это широко известные в теории гарантированного управления конструкции метода экстремального прицеливания Н. Н. Красовского. Второй — это локальная модификация классического метода регуляризации А. Н. Тихонова со сглаживающим функционалом. В работе получен порядок сходимости предложенного алгоритма. Рассмотрен численный пример, иллюстрирующий применение разработанной методики для вычисления дробных производных Капуто от конкретных функций в режиме реального времени.

Ключевые слова: дробная производная типа Капуто, реконструкция, неполная информация, оценка погрешности.

P. G. Surkov. Real-time calculation of a Caputo fractional derivative from noisy data. The case of continuous measurements.

We consider the problem of finding the derivative of a function, which is a classical problem of mathematical analysis. The values of the function are measured continuously over a finite time interval with some error. We propose an algorithm for the approximate calculation of a Caputo fractional derivative from the measurement values based on the methods of feedback control theory. First, the problem of calculating the fractional derivative is replaced by an inverse problem for a control system. Then the method of dynamic inversion is applied to the inverse problem, which allows us to construct a real-time solution algorithm stable under information noises and computational errors. The algorithm is based on N. N. Krasovskii’s extremal aiming method, which is widely known in the theory of guaranteed control, and on a local modification of A. N. Tikhonov’s classical regularization method with a smoothing functional. The order of convergence of the proposed algorithm is obtained, and a numerical example illustrating the application of the developed technique for calculating fractional Caputo derivatives of specific functions in real time is considered.

Keywords: Caputo fractional derivative, reconstruction, incomplete information, error estimate.

MSC: 34A08, 49N45, 65D25, 93C40

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-238-248

Введение

Пусть на конечном отрезке времени $T := [\sigma, \theta]$, $\theta < +\infty$, имеется возможность измерения значений некоторой функции f. С течением времени нам непрерывно (для каждого $t \in T$) поступают данные о значениях $f(t) \in \mathbb{R}^n$ с некоторой погрешностью $h \in (0,1)$, то есть результаты измерений — векторы $\xi^h(t) \in \mathbb{R}^n$ — удовлетворяют неравенствам

$$|f(t) - \xi^h(t)|_n \leqslant h, \quad t \in T,$$

где символом $|\cdot|_n$ обозначена норма в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Также предполагаем, что величина $f(\sigma)$ известна точно. Приведем для удобства постановки задачи необходимые определения из дробного анализа.

О п р е д е л е н и е [1, с. 91]. Для функции $f\colon T \to \mathbb{R}^n$ и произвольного действительного $\gamma \in J := (0,1)$ выражение
$$[D_*^\gamma f](t) = [D^\gamma (f - f(\sigma))](t)$$
задает дробную производную Капуто.

Здесь выражение $[D^\gamma f](t) = \dfrac{d}{dt}[I^{1-\gamma} f](t)$ является дробной производной Римана — Лиувилля [1, с. 70], и интеграл $I^\gamma f$ дробного порядка $\gamma \in J$ с началом в точке σ от произвольной функции $f \in L_1(T, \mathbb{R}^n)$ [1, с. 69] задается формулой
$$[I^\gamma f](t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int\limits_\sigma^t (t-s)^{\gamma-1} f(s)\, ds, \quad t \in T,$$
где $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию Эйлера [1, с. 24].

Задача состоит в построении алгоритма вычисления дробной производной Капуто $[D_*^\gamma f](t)$ при $t \in T$, $\gamma \in J$, в темпе реального времени на основе накопленных к моменту времени t измерений значений $\xi^h(t)$.

Задача нахождения производной функции является одной из старейших “классических” задач математического анализа. Существует большое количество разнообразных подходов к ее решению для обыкновенных дифференциальных уравнений. Одна из ранних постановок задачи была сделана с позиций теории приближений как приближение неограниченного линейного оператора (задача Стечкина [2]), в том числе оператора численного дифференцирования. Развитие указанного подхода отражено в обзорной статье [3]. Такой подход оказался тесно связан с решением некорректной задачи оптимального равномерного восстановления значений оператора по заданным с погрешностью данным. Различные варианты применения методов теории некорректных задач для задачи нахождения производной функции базируются на работах [4;5]. Так, например, нахождению аппроксимаций производной на основе неклассических регуляризирующих семейств операторов посвящены исследования [6;7], а в работах [8–10] для задачи численного дифференцирования применялся метод регуляризации А. Н. Тихонова.

В прикладных исследованиях часто используется подход, основанный на привлечении сплайнов, конечноразностная аппроксимация производных с соответствующей сеткой и другие виды аппроксимаций. Алгоритмы решения конкретных задач в большинстве случаев применяют дискретное разбиение временного интервала и измерения значений функции в его узлах. Следует отметить, что увеличение числа точек разбиения при наличии погрешности не дает уточнения результата, а также приводит к значительному росту вычислений, особенно если требуется решение вспомогательных задач в узлах. Поэтому естественно рассматривать задачу нахождения производной функции с позиций теории управления (по принципу обратной связи), в особенности если измерения поступают непрерывно.

Прежде чем перейти к описанию предлагаемого подхода, отметим, что будет рассматриваться задача приближенного вычисления дробной производной Капуто. Задачи приближенного вычисления дробных производных были поставлены также достаточно давно, и имеется несколько подходов к их решению. Один из таких подходов был определен в [11, гл. 8] и подразумевает двухэтапное приближенное вычисление дробной производной Римана — Лиувилля: на одном этапе приближенно вычисляется интеграл, на другом — обыкновенная производная. В соответствии с указанной техникой в [12] был предложен метод вычисления дробной производной Капуто. Другой подход, основанный на методе регуляризации М. М. Лаврентьева, допускающий также работу в режиме реального времени, разработан в [13].

В настоящей работе мы придерживаемся иного подхода, базирующегося на концепции обратных задач для динамических систем. Впервые он был предложен в [14] и получил распространение в [15–17], где рассматривались системы с запаздыванием, с распределенными параметрами и стохастические системы. В его основу было положено сочетание методов теории гарантированного управления [18] и методов теории некорректных задач, в частности классический метод регуляризации А. Н. Тихонова со сглаживающим функционалом. Отличительной чертой данного подхода является возможность работы алгоритмов в режиме реального времени. В задаче восстановления правой части с априорными ограничениями для систем дробного порядка этот метод использовался в [19], а также успешно применялся для приближенного вычисления обыкновенной производной функции в [20]. В настоящей работе рассматривается случай непрерывных измерений в отличие от [19; 20], где измерения дискретны.

1. Алгоритм решения

Введем вспомогательную функцию — фиктивное управление в виде $u(t) := [D_*^\gamma f](t)$. Тогда имеем управляемую систему

$$[D_*^\gamma f](t) = u(t), \quad t \in T, \tag{1.1}$$

где $f \in \mathbb{R}^n$. Для полученной системы дифференциальных уравнений дробного порядка (1.1) зададим начальные условия

$$f(\sigma) = f_\sigma.$$

Таким образом, от задачи вычисления производной Капуто мы переходим к задаче динамического восстановления правой части системы (1.1). Для ее решения применим методику динамического обращения со сглаживающим функционалом. Она подразумевает два ключевых момента. Первый — это выбор вспомогательной системы (модели), которую в рассматриваемой задаче берем в виде

$$[D_*^\gamma y^h](t) = v^h(t), \quad t \in T, \tag{1.2}$$

с начальными условиями

$$y^h(\sigma) = y_\sigma := f_\sigma.$$

Без ограничения общности для упрощения вычислений будем предполагать, что величины $y(t)$ измеряются точно.

Второй ключевой момент — это правило построения управления v^h в модели (1.2). Для этого зафиксируем некоторую функцию $\alpha := \alpha(h)$, $\alpha\colon (0,1) \to (0,1)$. Определим $v^h(t)$ по принципу обратной связи формулой

$$v^h(t) = \frac{1}{\alpha}(\xi^h(t) - y^h(t)), \quad t \in T. \tag{1.3}$$

Приведем более подробное описание классов рассматриваемых в задаче функций.

Условие 1. Пусть априори известно, что $[D_*^\gamma f](\cdot) \in L_\infty(T, \mathbb{R}^n)$.

Из этого условия следует существование такого $p = \text{const} > 0$, что $|u(t)|_n \leqslant p$ для п.в. $t \in T$.

Условие 2. Пусть функция $\alpha = \alpha(h)$ и постоянная $\beta_1 \in (0, 2)$ таковы, что выполнены соотношения

(a) $\alpha(h) \to 0, \quad \dfrac{h^{\beta_1}}{\alpha^2(h)} \to 0$ при $h \to 0$;

(b) $\dfrac{h^\lambda}{\alpha(h)} \to 0$ при $h \to 0$, где $\lambda := \min\{\beta_1; 2 - \beta_1\}$.

Из условия 2(a) можно заключить, что найдется число $h_* \in (0,1)$ такое, что при всех $h \in (0, h_*)$ справедливо неравенство

$$\frac{h^{\beta_1}}{\alpha(h)} \leqslant \frac{1}{4}. \tag{1.4}$$

Для доказательства теоремы 1 о сходимости предложенного алгоритма нам понадобится следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда можно выписать в явном виде постоянные* a_1, a_2 *и* b_1, *не зависящие от* h *и* α, *такие, что при всех* $h \in (0, h_*)$ *выполнены неравенства*

$$|f(t) - y^h(t)|_n^2 \leqslant a_1\alpha + a_2 h^\mu, \tag{1.5}$$

$$[I^\gamma |v^h|_n^2](t) \leqslant [I^\gamma |u|_n^2](t) + b_1\alpha^{-1}h^\lambda, \quad t \in T, \tag{1.6}$$

где $\mu := \min\{1, 2 - \beta_1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем неравенство (1.5). Рассмотрим разность между (1.1) и (1.2), получаем

$$[D_*^\gamma \varepsilon^h](t) = u(t) - v^h(t), \tag{1.7}$$

где $\varepsilon^h(t) := f(t) - y^h(t)$. Воспользуемся результатом [21, лемма 4.1] и, учитывая введенные обозначения, имеем

$$\frac{1}{2}[D^\gamma |\varepsilon^h|_n^2](t) \leqslant ([D^\gamma \varepsilon^h](t), \varepsilon^h(t)). \tag{1.8}$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. По постановке задачи $f(\sigma) = y(\sigma)$, откуда $\varepsilon(\sigma) = 0$, и, следовательно, дробные производные Капуто и Римана — Лиувилля равны, $[D^\gamma \varepsilon^h](t) = [D_*^\gamma \varepsilon^h](t)$. Тогда (1.8) перепишется в виде

$$\frac{1}{2}[D_*^\gamma |\varepsilon^h|_n^2](t) \leqslant ([D_*^\gamma \varepsilon^h](t), \varepsilon^h(t)). \tag{1.9}$$

Неравенство (1.9) в силу системы (1.7) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}[D_*^\gamma |\varepsilon^h|_n^2](t) \leqslant (u(t) - v^h(t), \varepsilon^h(t)). \tag{1.10}$$

Оценим правую часть последней формулы. Учитывая неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned}\big(u(t) - v^h(t), \varepsilon^h(t)\big) &\leqslant \big(u(t) - v^h(t), \xi^h(t) - y^h(t)\big) + \big(u(t) - v^h(t), f(t) - \xi^h(t)\big) \\ &\leqslant \big(u(t) - v^h(t), \xi^h(t) - y^h(t)\big) + h(|u(t)|_n + |v^h(t)|_n) \ \text{ при п.в. } \ t \in T.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Используя (1.11) в (1.10), имеем

$$\frac{1}{2}[D_*^\gamma |\varepsilon^h|_n^2](t) \leqslant \big(u(t) - v^h(t), \xi^h(t) - y^h(t)\big) + h(|u(t)|_n + |v^h(t)|_n). \tag{1.12}$$

Последнее неравенство можно преобразовать к виду

$$[D_*^\gamma |\varepsilon^h|_n^2](t) = 2\big(u(t) - v^h(t), \xi^h(t) - y^h(t)\big) + 2h(|u(t)|_n + |v^h(t)|_n) + \zeta(t), \tag{1.13}$$

где $\zeta(\cdot)$ — некоторая неположительная функция. Решение дифференциального уравнения (1.13) с условием $\mu(\sigma) = 0$ определяется формулой

$$|\varepsilon^h(t)|_n^2 = 2[I^\gamma(u - v^h, \xi^h - y^h)](t) + 2h([I^\gamma |u|_n](t) + [I^\gamma |v^h|_n](t) + [I^\gamma \zeta](t). \tag{1.14}$$

Для последнего слагаемого правой части (1.14) справедлива оценка

$$[I^\gamma \zeta](t) \leqslant 0 \quad \forall t \in T,$$

с учетом которой равенство (1.14) можно представить в виде

$$|\varepsilon^h(t)|_n^2 \leqslant 2[I^\gamma(u - v^h, \xi^h - y^h)](t) + 2h([I^\gamma |u|_n](t) + [I^\gamma |v^h|_n](t). \tag{1.15}$$

Добавляя одинаковые слагаемые с множителем α в левой и правой частях (1.15), получаем

$$|\varepsilon^h(t)|_n^2 + \alpha[I^\gamma|v^h|_n^2](t) - \alpha[I^\gamma|u|_n^2](t) \leqslant \alpha[I^\gamma|v^h|_n^2](t) - \alpha[I^\gamma|u|_n^2](t)$$
$$- 2[I^\gamma(v^h - u, \xi^h - y^h)](t) + 2h([I^\gamma|u|_n](t) + [I^\gamma|v^h|_n](t). \tag{1.16}$$

Отметим, что управление v^h, заданное в виде (1.3), может быть выведено из формулы

$$v^h(t) = \operatorname{argmin}\big\{\alpha|\upsilon|_n^2 - 2(\xi^h(t) - y^h(t), \upsilon),\ \upsilon \in \mathbb{R}^n\big\}. \tag{1.17}$$

Тогда, принимая во внимание (1.17), справедлива следующая оценка:

$$\alpha[I^\gamma|v^h|_n^2](t) - \alpha[I^\gamma|u|_n^2](t) - 2[I^\gamma(v^h - u, \xi^h - y^h)](t) \leqslant 0 \quad \forall u(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in T.$$

Учитывая последнее неравенство в (1.16), приходим к оценке

$$|\varepsilon^h(t)|_n^2 \leqslant \alpha[I^\gamma|u|_n^2](t) - \alpha[I^\gamma|v^h|_n^2](t) + 2h([I^\gamma|u|_n](t) + [I^\gamma|v^h|_n](t)). \tag{1.18}$$

Ввиду того, что из выражения $|v^h(t)|_n^2 \geqslant 0$ следует

$$\alpha[I^\gamma|v^h|_n^2](t) \geqslant 0 \quad \forall t \in T,$$

используя условие 1 и неравенство Коши с $\beta_1 \in (0, 2)$ в (1.18), выводим

$$|\varepsilon^h(t)|_n^2 \leqslant \alpha[I^\gamma p^2](t) + 2h[I^\gamma p](t) + 2[I^\gamma(h^{2-\beta_1} + h^{\beta_1}|v^h|_n^2)](t).$$

Перепишем последнюю формулу в упрощенном виде

$$|\varepsilon^h(t)|_n^2 \leqslant c_1p^2\alpha + 2c_1ph + 2c_1h^{2-\beta_1} + 2h^{\beta_1}[I^\gamma|v^h|_n^2](t). \tag{1.19}$$

Получим необходимую для дальнейших преобразований оценку для слагаемого правой части (1.19). Учитывая формулу (1.3), имеем

$$|v^h(t)|_n^2 = \alpha^{-2}\big(\xi^h(t) - f(t) + f(t) - y^h(t), \xi^h(t) - f(t) + f(t) - y^h(t)\big) \leqslant 2\alpha^{-2}(h^2 + |\varepsilon^h(t)|_n^2).$$

Вычисляя интеграл от обеих частей полученного неравенства, приходим к выражению

$$[I^\gamma|v^h|_n^2](t) \leqslant 2c_1\alpha^{-2}h^2 + 2\alpha^{-2}[I^\gamma|\varepsilon^h|_n^2](t). \tag{1.20}$$

Используя (1.20) в (1.19), находим

$$|\varepsilon^h(t)|_n^2 \leqslant c_1p^2\alpha + 2c_1ph + 2c_1h^{2-\beta_1} + 4c_1\alpha^{-2}h^{4+\beta_1} + 4\alpha^{-2}h^{\beta_1}[I^\gamma|\varepsilon^h|_n^2](t).$$

По предположению леммы 1 выполнено условие 2(a), тогда имеем

$$|\varepsilon^h(t)|_n^2 \leqslant c_2\alpha + c_3h^\mu + 2\alpha^{-2}h^{\beta_1}[I^\gamma|\varepsilon^h|_n^2](t).$$

Далее, применяя неравенство Гроноулла — Беллмана [22, теорема 6], получаем

$$|\varepsilon^h(t)|_n^2 \leqslant (c_4\alpha + c_5h^\mu)\exp\left(\frac{K_1}{2}\alpha^{-4}h^{2\beta_1}(t-\sigma) + t\right),$$

где $K_1 = 2\Gamma(2\gamma - 1)/4^{\gamma-1}$ при $\gamma \in (1/2, 1)$. В результате приходим к оценке

$$|\varepsilon^h(t)|_n^2 \leqslant c_6\alpha + c_7h^\mu,$$

следствием которой и является (1.5).

Докажем неравенство (1.6). Перепишем (1.18) в следующем виде:

$$|\varepsilon^h(t)|_n^2 + \alpha[I^\gamma|v^h|_n^2](t) \leqslant \alpha[I^\gamma|u|_n^2](t) + 2h([I^\gamma|u|_n](t) + [I^\gamma|v^h|_n](t)). \tag{1.21}$$

Поскольку $|\varepsilon^h(t)|_n^2 \geqslant 0$ и выполнено условие 1, то, применяя неравенство Коши с $\beta_1 \in (0,2)$, выражение (1.21) запишем в форме

$$\alpha[I^\gamma|v^h|_n^2](t) \leqslant \alpha[I^\gamma|u|_n^2](t) + 2c_1ph + 2c_1h^{2-\beta_1} + 2h^{\beta_1}[I^\gamma|v^h|_n](t). \tag{1.22}$$

Добавим и вычтем слагаемые в правой части последней формулы. Тогда имеем

$$\alpha\Big(1 - 2\frac{h^{\beta_1}}{\alpha}\Big)[I^\gamma|v^h|_n^2](t) \leqslant \alpha\Big(1 - 2\frac{h^{\beta_1}}{\alpha}\Big)[I^\gamma|u|_n^2](t) + 2h^{\beta_1}[I^\gamma|u|_n^2](t) + c_3h^\mu.$$

Из соотношения (1.4) следует оценка $1 - 2\dfrac{h^{\beta_1}}{\alpha} > 0$. Тогда выводим

$$[I^\gamma|v^h|_n^2](t) \leqslant [I^\gamma|u|_n^2](t) + \alpha^{-1}\Big(1 - 2\frac{h^{\beta_1}}{\alpha}\Big)^{-1}(2h^{\beta_1}[I^\gamma|u|_n^2](t) + c_3h^\mu). \tag{1.23}$$

Преобразуя последнюю формулу с учетом условий 1 и 2(b), приходим к неравенству (1.6). □

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 *можно выписать в явном виде постоянную* b_2, *не зависящую от* h *и* α, *такую, что выполнено неравенство*

$$[I^1|v^h|_n^2](t) \leqslant [I^1|u|_n^2](t) + b_2\alpha^{-1}h^\lambda, \quad t \in T. \tag{1.24}$$

Доказательство. Если проинтегрировать левую и правую части неравенства (1.12) и добавить слагаемые с I^1 и множителем α, то получим

$$[I^{1-\gamma}|\varepsilon^h|_n^2](t) + \alpha[I^1|v^h|_n^2](t) - \alpha[I^1|u|_n^2](t) \leqslant \alpha[I^1|v^h|_n^2](t) - \alpha[I^1|u|_n^2](t)$$
$$- 2[I^1(v^h - u, \xi^h - y^h)](t) + 2h([I^1|u|_n](t) + [I^1|v^h|_n](t)).$$

Следуя аналогичным рассуждениям, как и при выводе (1.18), имеем

$$[I^{1-\gamma}|\varepsilon^h|_n^2](t) + \alpha[I^1|v^h|_n^2](t) \leqslant \alpha[I^1|u|_n^2](t) + 2h([I^1|u|_n](t) + [I^1|v^h|_n](t)).$$

Далее, повторяя преобразования для формул (1.22), (1.23), единственно с заменой I^γ на I^1, приходим к оценке (1.24). □

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда имеет место сходимость*

$$v^h(\cdot) \to [D_*^\gamma f](\cdot) \quad \textit{в} \quad L_2(T,\mathbb{R}^n) \quad \textit{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство этой теоремы может быть проведено по схеме из [23, теорема 1.2.3]. Нужно показать, что для произвольной последовательности $h_j \to 0+$ при $j \to \infty$ и любых измерений ξ^{h_j} ($|\xi^{h_j}(t) - f(t)|_n \leqslant h_j$, $t \in T$) имеет место сходимость $v^{h_j}(\cdot) \to [D_*^\gamma f](\cdot)$ в $L_2(T,\mathbb{R}^n)$ при $h_j \to 0+$ ($j \to \infty$). Будем доказывать от противного. Предположим, что найдется последовательность $\{v^{h_j}\}$ такая, что

$$v^{h_j}(\cdot) \to \bar v(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T,\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad j \to \infty, \quad \bar v(\cdot) \neq [D_*^\gamma f](\cdot). \tag{1.25}$$

Тогда, выбирая из $\{h_j\}$ подпоследовательность $\{h_{j_k}\}$, получаем

$$y^{h_{j_k}}(\cdot) \to \bar y(\cdot) \quad \text{в} \quad C(T,\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

где $y^{h_{j_k}}(\cdot) = y(\cdot;\sigma, y_\sigma, v^{h_{j_k}})$. Следуя [19, теорема 1], ввиду слабой сходимости управлений $\{v^{h_{j_k}}\}$ имеем равномерную сходимость $\{y^{h_{j_k}}\}$, поэтому $\bar{y}(\cdot)$ является решением задачи

$$[D_*^\gamma y](t) = \bar{v}(t), \quad t \in T, \quad y(\sigma) = y_\sigma.$$

В силу леммы 1 из (1.5) следует равномерная на T сходимость $\bar{y}(t)$ к $f(t)$ — решению задачи (1.1). Таким образом, $\bar{y}(t) \equiv f(t)$, $t \in T$, и значит $\bar{v}(\cdot) = [D_*^\gamma f](\cdot)$. Тогда из (1.25) выводим

$$v^{h_j}(\cdot) \to [D_*^\gamma f](\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T, \mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad j \to \infty$$

С учетом свойств слабого предела из последней формулы вытекает неравенство

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \|v^{h_{j_k}}\|_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} \geqslant \|D_*^\gamma f\|_{L_2(T,\mathbb{R}^n)}. \tag{1.26}$$

Из леммы 2, где $\|v^{h_{j_k}}\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} = [I^1|v^{h_{j_k}}|_n^2](\theta)$, следует

$$\|v^{h_{j_k}}\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} \leqslant \|D_*^\gamma f\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} + b_2(\alpha(h_{j_k}))^{-1} h_{j_k}^\lambda.$$

Откуда находим

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \|v^{h_{j_k}}\|_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} \leqslant \|D_*^\gamma f\|_{L_2(T,\mathbb{R}^n)}. \tag{1.27}$$

В результате, объединяя (1.26) и (1.27), имеем

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \|v^{h_{j_k}}\|_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} \leqslant \|D_*^\gamma f\|_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \|v^{h_{j_k}}\|_{L_2(T,\mathbb{R}^n)}.$$

Из последней формулы следует $\bar{v}(\cdot) = [D_*^\gamma f](\cdot)$, что противоречит (1.25). □

2. Оценка скорости сходимости алгоритма

При некоторых дополнительных условиях можно выписать оценку скорости сходимости алгоритма.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2*, функция* $[D_*^\gamma f](\cdot)$ *имеет ограниченную вариацию на* T*, и пусть* $\alpha(h)/h^{\beta_2} \to 0$ *при* $h \to 0$*, где* $\beta_2 \in (0, \mu)$*. Тогда можно выписать в явном виде постоянные* d_i*,* $i = \overline{1,4}$*, не зависящие от* h *и* α*, такие, что выполнено неравенство*

$$\|v^h - D_*^\gamma f\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} \leqslant d_1 h^{\beta_2} + d_2 h^{\mu-\beta_2} + d_3 \alpha h^{-\beta_2} + d_4 \alpha^{-1} h^\lambda. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая формулы (1.1) и (1.2) и используя неравенство Коши с β_2, выводим

$$\Big|\int_\sigma^t (v^h(s) - u(s))\,ds\Big|_n = \Big|\int_\sigma^t ([D_*^\gamma y^h](s) - [D_*^\gamma f](s))\,ds\Big|_n = \Big|\int_\sigma^t [D_*^\gamma (y^h - f)](s)\,ds\Big|_n$$

$$= |[I^{1-\gamma}(y^h - f)](t)|_n \leqslant [I^{1-\gamma}|y^h - f|_n](t) \leqslant \frac{1}{2}[I^{1-\gamma}(h^{\beta_2} + h^{-\beta_2}|y^h - f|_n^2)](t).$$

Перепишем последнее неравенство, принимая во внимание (1.5), имеем

$$\Big|\int_\sigma^t (v^h(s) - u(s))\,ds\Big|_n \leqslant \frac{1}{2}[I^{1-\gamma}(h^{\beta_2} + a_1 h^{\mu-\beta_2} + a_2 h^{-\beta_2}\alpha)](t) \leqslant \tilde{c}_1 h^{\beta_2} + \tilde{c}_2 h^{\mu-\beta_2} + \tilde{c}_3 \alpha h^{-\beta_2}. \tag{2.2}$$

Обозначим символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в $L_2(T, \mathbb{R}^n)$. Тогда, учитывая соотношения $\|u\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} = [I^1|u|_n^2](\theta)$, $\|v^h\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} = [I^1|v^h|_n^2](\theta)$ и применяя неравенство (1.24), преобразуем

$$\|u - v^h\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} = \|u\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} - 2\langle u, v^h\rangle + \|v^h\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} \leqslant 2\|u\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} - 2\langle u, v^h\rangle + b_2\alpha^{-1}h^\lambda$$

$$= 2\langle u - v^h, u\rangle + b_2\alpha^{-1}h^{\lambda}. \tag{2.3}$$

Используя для оценок (2.2) и (2.3) лемму [23, лемма 1.2.1], получаем

$$\|u - v^h\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} \leqslant 2(V(u;T) + p)(\tilde{c}_1 h^{\beta_2} + \tilde{c}_2 h^{\mu-\beta_2} + \tilde{c}_3\alpha h^{-\beta_2}) + b_2\alpha^{-1}h^{\lambda},$$

где $V(u;T)$ — вариация функции $u(\cdot)$ на отрезке T. Последнее неравенство приводим к виду (2.1). □

З а м е ч а н и е. Для следующего набора параметров: $\alpha(h) = h^{4/7}$, $\beta_1 = \dfrac{8}{7}$ и $\beta_2 = \dfrac{2}{7}$ оценка (2.1) примет вид

$$\|v^h - D^{\gamma}_* f\|^2_{L_2(T,\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 h^{2/7},$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от h и α.

П р и м е р. Применим описанную выше методику для нахождения дробной производной некоторой функции, значения которой измеряются в темпе реального времени с погрешностью. Зададим производную Капуто порядка $\gamma = 0.8$ от функции $f(\cdot)$ следующим выражением:

$$[D^{\gamma}_* f](t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1], \\ \dfrac{1}{2}, & t \in (1,2]. \end{cases}$$

При $t = 1$ она имеет разрыв первого рода, и с ней мы будем сравнивать результаты работы алгоритма. Для моделирования результатов измерений $\xi^h(t)$ сначала находим функцию $f(t)$, вычисляя дробный интеграл $[I^{\gamma} D^{\gamma}_* f](t)$]:

$$f(t) = \begin{cases} k t^{9/5}, & t \in [0,1], \\ k t^{9/5} - 0.9\, k(t-1)^{4/5}, & t \in (1,2], \end{cases}$$

где $k = 0.56484$. Выбираем параметр алгоритма решения $\alpha(h) = h^{4/7}$, и тогда результаты измерений при наличии погрешности имеем в виде $\xi^h(t) = f(t) + \dfrac{h}{2}\sin(16\pi t)$. Далее, используя выражение (1.3) и формулу для решения системы (1.2), получаем приближенное значение дробной производной $v^h(t)$, $t \in T$.

Результаты работы алгоритма представлены на рис. 1 и 2, где график производной Капуто $[D^{\gamma}_* f](t)$ показан серым цветом, а вычисленное приближение $v^h(t)$ — черным.

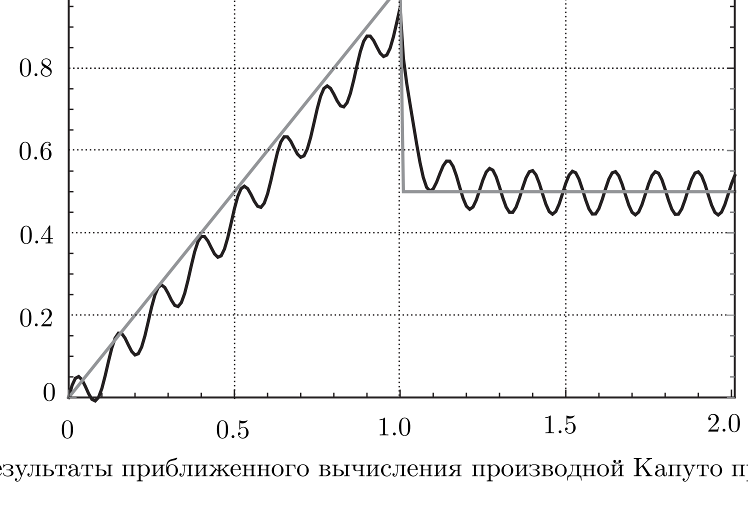

Рис. 1. Результаты приближенного вычисления производной Капуто при $h = 0.01$.

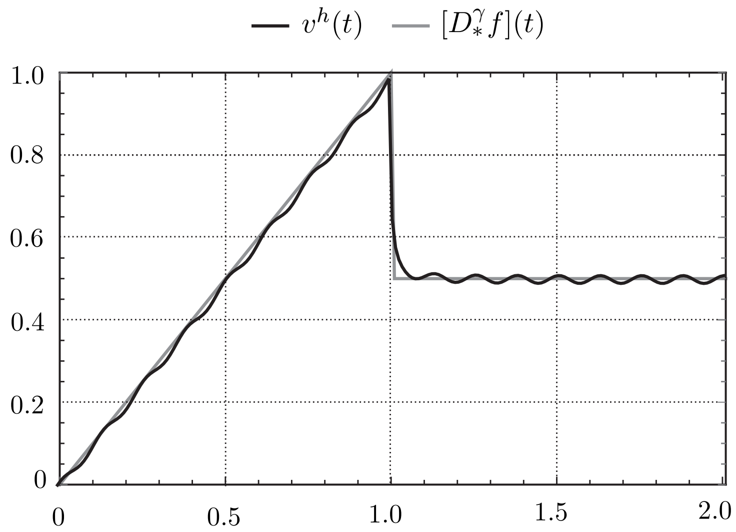

Рис. 2. Результаты приближенного вычисления производной Капуто при $h = 0.001$.

Заключение

Рассмотрена задача восстановления в темпе реального времени дробной производной Капуто от функции, измеряемой с погрешностью. Предложен устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм ее решения в случае непрерывно поступающих измерений. В основе алгоритма лежит метод экстремального прицеливания Н. Н. Красовского локально регуляризованный с помощью метода сглаживающего функционала. Предложенная методика обеспечивает устойчивую аппроксимацию дробной производной с использованием принципа обратной связи, что устанавливается в теореме 1. Следует отметить, что полученные в теореме 2 оценки могут быть улучшены. Рассмотрен численный пример, демонстрирующий применение разработанного алгоритма. В этом примере рис. 1 и рис. 2 показывают, что с уменьшением уровня погрешности точность восстановления дробной производной возрастает. Дальнейшее развитие используемого подход видится, с одной стороны, в использовании других методов регуляризации. С другой стороны, численная реализация алгоритма требует значительных временных затрат, поэтому возможно привлечение технологий параллельных вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. N Y: Elsevier Science, 2006. 540 p.
2. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 137–148.
3. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6 (312). С. 89–124.
4. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
5. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
6. **Васин В.В.** Об устойчивом вычислении производной в пространстве $C(-\infty, \infty)$ // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13, № 6. С. 1383–1389.
7. **Скорик Г.Г.** О наилучшей оценке погрешности метода усредняющих ядер в задаче дифференцирования зашумленной функции // Изв. вузов. Математика. 2004. № 3. С. 76–80.
8. **Hanke M., Scherzer O.** Inverse problems light: numerical differentiation // The American Mathematical Monthly. 2001. Vol. 108, iss. 6. P. 512–521. doi: 10.2307/2695705 .
9. **Wang Y.B., Jia X.Z., Cheng J.** A numerical differentiation method and its application to reconstruction of discontinuity // Inverse Problems. 2002. Vol. 18, iss. 6. P. 1461–1476. doi: 10.1088/0266-5611/18/6/301 .

10. **Chartrand R.** Numerical differentiation of noisy, nonsmooth data // ISRN Applied Mathematics. 2011. Vol. 2011. Article ID 164564. doi: 10.5402/2011/164564.
11. **Oldham K., Spanier J.** The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. N Y: Academic Press, Inc., 1974. 251 p.
12. **Murio D.A.** On the stable numerical evaluation of Caputo fractional derivatives // Comp. Math. Appl. 2006. Vol. 51, iss. 9. P. 1539–1550. doi: 10.1016/j.cawa.2005.11.037.
13. **Pandolfi L.** A Lavrent'ev-type approach to the on-line computation of Caputo fractional derivatives // Inverse problems. 2008. Vol. 24, iss. 1. Article ID 015014. doi: 10.1088/0266-5611/24/1/015014.
14. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О наилучшем приближении оператора дифференцирования в классе неупреждающих операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 2. С. 192–199.
15. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
16. **Максимов В.И., Пандолфи Л.** О реконструкции неограниченных управлений в нелинейных динамических системах // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, № 3. С. 385–391.
17. **Melnikova L., Rozenberg V.** One dynamical input reconstruction problem: Tuning of solving algorithm via numerical experiments // AIMS Mathematics. 2019. Vol. 4, iss. 3. P. 699–713. doi: 10.3934/math.2019.3.699.
18. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
19. **Сурков П.Г.** Задача динамического восстановления правой части системы дифференциальных уравнений нецелого порядка // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 6. С. 865–874. doi: 10.1134/S0374064119060128.
20. **Максимов В.И.** О вычислении производной функции, заданной неточно, с помощью законов обратной связи // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 231–243. doi: 10.1134/S0371968515040172.
21. **Gomoyunov M.I.** Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2018. Vol. 21, iss. 5. P. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066.
22. **Shao J., Meng F.** Gronwall–Bellman type inequalities and their applications to fractional differential equations // Abstract and Applied Analysis. 2013. Vol. 2013. P. 7. doi: 10.1155/2013/217641.
23. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2011. 292 с.

Поступила 5.03.2021
После доработки 2.04.2021
Принята к публикации 12.04.2021

Сурков Платон Геннадьевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: spg@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations.* N Y: Elsevier, 2006, 540 p. ISBN: 0444518320.
2. Stechkin S.B. Best approximation of linear operators. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 91–99. doi: 10.1007/BF01268056.
3. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russian Mathematical Surveys*, 1996, vol. 51, no. 6. pp. 1093–1126. doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001.
4. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002, 281 p. ISBN: 90-6764-367-X/hbk. Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 208 p.

5. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for solutions of ill-posed problems.* N Y: Wiley, 1977, 258 p. ISBN: 0470991240 . Original Russian text (2nd ed.) published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1979, 285 p.
6. Vasin V.V. The stable evaluation of a derivative in space $C(-\infty,\infty)$. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1973, vol. 13, no. 6, pp. 16–24. doi: 10.1016/0041-5553(73)90002-5 .
7. Skorik G.G. On the best error estimate for the method of averaging kernels in the problem of the differentiation of a noisy function. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2004, vol. 48, no. 3, pp. 70–74.
8. Hanke M., Scherzer O. Inverse problems light: numerical differentiation. *The American Mathematical Monthly*, 2001, vol. 108, no. 6, pp. 512–521. doi: 10.2307/2695705 .
9. Wang Y.B., Jia X.Z., Cheng J. A numerical differentiation method and its application to reconstruction of discontinuity. *Inverse Problems*, 2002, vol. 18, no. 6, pp. 1461–1476. doi: 10.1088/0266-5611/18/6/301 .
10. Chartrand R. Numerical differentiation of noisy, nonsmooth data. *ISRN Applied Mathematics*, 2011, vol. 2011, art. ID 164564. doi: 10.5402/2011/164564 .
11. Oldham K., Spanier J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.* N Y: Acad. Press, 1974, 251 p. ISBN: 9780080956206 .
12. Murio D.A. On the stable numerical evaluation of Caputo fractional derivatives. *Computers Math. Appl.*, 2006, vol. 51, no. 9, pp. 1539–1550. doi: 10.1016/j.cawa.2005.11.037 .
13. Pandolfi L. A Lavrent'ev-type approach to the on-line computation of Caputo fractional derivatives. *Inverse problems*, 2008, vol. 24, no. 1. art. ID 015014. doi: 10.1088/0266-5611/24/1/015014 .
14. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Best approximation of the differentiation operator in the class of nonanticipatory operators. *Mathematical notes of the Academy of ciences of the USSR*, 1985, vol. 37, pp. 109–114. doi: 10.1007/B01156754 .
15. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* Basel: Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 2881249442 .
16. Maksimov V.I., Pandolfi L. The reconstruction of unbounded controls in non-linear dynamical systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 2001, vol. 65, no. 3, pp. 371–376. doi: 10.1016/S0021-8928(01)00042-9 .
17. Melnikova L., Rozenberg V. One dynamical input reconstruction problem: Tuning of solving algorithm via numerical experiments. *AIMS Mathematics*, 2019, vol. 4, no. 3, pp. 699–713. doi: 10.3934/math.2019.3.699 .
18. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
19. Surkov P.G. Dynamic right-hand side reconstruction problem for a system of fractional differential equations. *Diff. Eq.*, 2019, vol. 55, no. 6. pp. 849–858. doi: 10.1134/S0012266119060120 .
20. Maksimov V.I. Calculation of the derivative of an inaccurately defined function by means of feedback laws. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2015, vol. 291, pp. 219–231. doi: 10.1134/S0081543815080179 .
21. Gomoyunov M.I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2018, vol. 21, no. 5, pp. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066 .
22. Shao J., Meng F. Gronwall – Bellman type inequalities and their applications to fractional differential equations. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, vol. 2013, art. ID 217641, 7 p. doi: 10.1155/2013/217641 .
23. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem* [Methods for dynamical reconstruction of inputs of controlled systems]. Yekaterinburg, IMM UrO RAN, 2011, 292 p.

Received March 5, 2021
Revised April 2, 2021
Accepted April 12, 2021

Surkov Platon Gennad'evich, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: spg@imm.uran.ru .

Cite this article as: P. G. Surkov. Real-time calculation of a Caputo fractional derivative from noisy data. The case of continuous measurements, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 238–248 .