ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.9

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ-РАВЕНСТВОМ[1]

М. И. Сумин

Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности — принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) — в выпуклой задаче оптимального управления для параболического уравнения с операторным ограничением-равенством и граничным управлением. Множество допустимых управлений задачи по традиции вкладывается в пространство суммируемых с квадратом функций. Однако целевой функционал не является, вообще говоря, сильно выпуклым. Получение регуляризованных ПЛ и ПМП основано на использовании двух параметров регуляризации. Один из них "отвечает" за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем добавке к целевому функционалу исходной задачи. Основное предназначение регуляризованных ПЛ и ПМП — устойчивое генерирование минимизирующих приближенных решений в смысле Дж. Варги. Регуляризованные ПЛ и ПМП формулируются как теоремы существования в исходной задаче минимизирующих приближенных решений, состоящих из минималей ее регулярной функции Лагранжа. Они "преодолевают" свойства некорректности ПЛ и ПМП и являются регуляризирующими алгоритмами для решения оптимизационной задачи. Особое внимание уделяется доказательству ПМП в задаче минимизации регулярной функции Лагранжа и получению на этой основе регуляризованного ПМП в исходной задаче оптимального управления как следствия регуляризованного ПЛ.

Ключевые слова: выпуклое оптимальное управление, параболическое уравнение, операторное ограничение, граничное управление, минимизирующая последовательность, регуляризирующий алгоритм, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина, двойственная регуляризация.

M. I. Sumin. Regularization of the Pontryagin maximum principle in a convex optimal boundary control problem for a parabolic equation with an operator equality constraint.

We consider the regularization of the classical optimality conditions — the Lagrange principle (LP) and the Pontryagin maximum principle (PMP) — in a convex optimal control problem for a parabolic equation with an operator equality constraint and with a boundary control. The set of admissible controls of the problem is traditionally embedded into the space of square-summable functions. However, the objective functional is not, generally speaking, strongly convex. The derivation of regularized LP and PMP is based on the use of two regularization parameters. One of them is "responsible" for the regularization of the dual problem, while the other is contained in a strongly convex regularizing addition to the objective functional of the original problem. The main purpose of the regularized LP and PMP is the stable generation of minimizing approximate solutions in the sense of J. Warga. The regularized LP and PMP are formulated as existence theorems in the original problem of minimizing approximate solutions consisting of minimals of its regular Lagrange function. They "overcome" the ill-posedness properties of the LP and PMP and are regularizing algorithms for solving the optimal control problem. Particular attention is paid to the proof of the PMP in the problem of minimizing the regular Lagrange function and obtaining on this basis the regularized PMP in the original optimal control problem as a consequence of the regularized LP.

Keywords: convex optimal control, parabolic equation, operator constraint, boundary control, minimizing sequence, regularizing algorithm, Lagrange principle, Pontryagin maximum principle, dual regularization.

MSC: 49K20, 49N15, 47A52

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-221-237

Введение

При изучении задач оптимального управления неизбежно приходится сталкиваться с двумя принципиально различными подходами к их постановкам. При первом из них задачи рас-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19-07-00782_а, 20-01-00199_а, 20-52-00030 Бел_а).

сматриваются при “идеальных” предположениях точного задания их исходных данных. Именно на этом пути после открытия принципа максимума Понтрягина (см. [1]) получила фундаментальное развитие теория классических условий оптимальности (КУО) — основа всей теории оптимального управления (см., например, книгу [2]).

При втором подходе к постановкам задач оптимального управления предполагается, что исходные данные задач задаются с погрешностями. Подобные задачи, в которых неизбежно приходится иметь дело с неточным заданием исходных данных, возникают в различных естественнонаучных приложениях. В частности, это имеет место тогда, когда к задачам оптимального управления сводятся обратные задачи современного естествознания. Главной отличительной особенностью постановок оптимизационных задач при втором подходе является необходимость учета свойств некорректности задач оптимального управления или, говоря более общим языком, свойств некорректности задач условной оптимизации в целом (см. [3]). Эти свойства некорректности неразрывно связаны, в свою очередь, со свойствами некорректности соответствующих КУО — принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП). Здесь, говоря о некорректности КУО, мы имеем в виду такие ее проявления, как неустойчивость и невыполнимость (см. [4; 5]). Напомним, что говорим о неустойчивости КУО, если выделяемые ими в задачах, “близких” к исходной (невозмущенной) задаче, элементы, формально удовлетворяющие КУО в этих возмущенных задачах, фактически не являются реальными приближениями к точному решению исходной задачи, т. е. при сколь угодно малых возмущениях оптимизационных задач эти, удовлетворяюшие “возмущенным” КУО элементы, могут сколь угодно сильно отличаться как по аргументу, так и по функции от оптимальных элементов невозмущенных задач. В свою очередь, невыполнимость КУО в той или иной конкретной задаче условной оптимизации понимаем как принципиальную невозможность записать их для этой задачи в той привычной (классической) форме, в которой принято записывать условия оптимальности в других задачах данного класса. Подробное описание указанных понятий некорректности применительно к задачам условной оптимизации и оптимального управления, связанную с ними историю вопроса, соответствующие комментарии можно найти в [4; 5], иллюстративные примеры неустойчивости и невыполнимости КУО — в [4].

Анализ различных примеров задач условной оптимизации (оптимального управления) приводит к естественному выводу о том, что свойства их некорректности, а также некорректности соответствующих КУО заложены в самой природе этих задач. Одновременно проверка на корректность конкретных задач условной оптимизации (оптимального управления), их систем оптимальности представляет собой, как правило, сложную самостоятельную математическую задачу. Поэтому, если хотим “привлекать” КУО непосредственно к решению оптимизационных задач при втором подходе к их постановкам, то и “относиться” к КУО необходимо как к математическим объектам с выраженными свойствами некорректности (см. [3; 6]).

Настоящая работа посвящена регуляризации КУО в задаче оптимального управления для параболического уравнения с выпуклым функционалом цели, граничным управлением и операторным ограничением-равенством. В ней продолжается линия работы [5], в которой также рассматривалась регуляризации КУО в задаче оптимального управления с операторным ограничением-равенством, но в случае сосредоточенной управляемой системы. Получение регуляризованных КУО для задач оптимального управления распределенными системами по сравнению с аналогичными задачами для систем сосредоточенных сопряжено с рядом существенных трудностей технического характера. Эти трудности вызваны “более сложным устройством” уравнений в частных производных, необходимостью применения “подходящих” оценок для их решений, свойств регулярности этих решений, влекущих их “нужные компактностные” свойства. Все отмеченные обстоятельства являются существенными при получении регуляризованных КУО в рассматриваемой в данной работе задаче, при этом особое внимание уделяется здесь описанию процесса получения регуляризованного ПМП, главную роль в котором играет вывод обычного ПМП в “простейшей” задаче минимизации регулярной функции Лагранжа исходной задачи (см. лемму 4 и ее доказательство).

Подчеркнем, что, как и в [4; 5], центральными понятиями здесь являются понятие обобщенной минимизирующей последовательности — минимизирущего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги [7] (в теории математического программирования подобные обобщенные (минимизирующие) последовательности, удовлетворяющие ограничениям задачи "в пределе", известны также под названием обобщенных (оптимальных) планов [8]) и жестко с ним связанное понятие МПР-образующего (регуляризирующего) алгоритма (см. [5]). Последнее так же, как и в [5], "встраивается" в получаемые регуляризованные ПЛ и ПМП, превращая их в соответствующие регуляризирующие алгоритмы. Такая трансформация КУО основана по аналогии с [5] на использовании двух параметров регуляризации, первый из которых "отвечает" за регуляризацию двойственной задачи, второй же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем добавке к целевому функционалу исходной задачи, не являющемуся, вообще говоря, сильно выпуклым. Естественно, в случае сильной выпуклости целевого функционала второй регуляризирующий параметр является излишним, и его следует считать равным нулю. Отметим также, что применяемое здесь понятие МПР-образующего алгоритма (см. [5]) можно квалифицировать как занимающее промежуточное положение между понятиями регуляризирующих алгоритмов первого (сходимость нижних граней, см. определение 1 [3, гл. 9, § 2, с. 802]) и второго (сходимость по аргументу, см. определение 1 [3, гл. 9, § 6, с. 837, 838]) типа, применяемых в [3, гл. 9] (подробности см. в [5]).

Отметим, наконец, что интерес к проблемам, связанным с вопросами регуляризации КУО, наблюдается на протяжении нескольких последних десятилетий. В частности, укажем здесь на работы самого последнего времени [9; 10] (см. также библиографию этих работ) по обоснованию так называемого SQH метода (Sequential Quadratic Hamiltonian Method) для решения задач оптимального управления, представляющего собою основанную на ПМП итерационную схему, предполагающую использование числовых регуляризирующих добавков к гамильтониану задачи. Подчеркнем в то же время, что указанный SQH метод (см. [9; 10]) предназначен для решения лишь задач оптимального управления с геометрическими ограничениями.

1. Постановка задачи

Пусть $W \subset \mathbb{R}^1$ — выпуклый компакт, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x,t)\colon x \in S,\ t \in (0,T)\}$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \equiv \{w \in L_2(S_T)\colon w(x,t) \in W$ п. в. на $S_T\}$, $\mathcal{D} \subset L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$, w — управляющая функция. Норму в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с элементами w обозначим через $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Рассмотрим выпуклую задачу условной минимизации не сильно выпуклого (вообще говоря) функционала с фазовым в финальный момент времени (полуфазовым) ограничением-равенством

$$(OC) \quad f(w) \to \min, \quad g(w)(x) \equiv G_1(x)z[w](x,T) + G_2(x) = 0 \quad \text{при п. в.} \quad x \in \Omega,\ w \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H},$$

где выпуклый функционал $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ задается равенством[2]

$$f(w) \equiv \langle A(\cdot,\cdot)\, z[w]\,(\cdot,\cdot),\ z[w]\,(\cdot,\cdot)\rangle_{L_2(S_T)} + \int\limits_{S_T} B(s,t,w(s,t))\, ds\, dt.$$

Здесь и ниже $z[w]$ — решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ (см. [11, гл. III]) третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения дивергентного вида

$$\begin{gathered} z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)\, z_{x_j}) + a(x,t)\, z + u(x,t) = 0, \\ z(x,0) = v(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)\, z = w(x,t), \quad (x,t) \in S_T. \end{gathered} \tag{1.1}$$

[2]Здесь и ниже $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H.

В (1.1), как и в [11], $\dfrac{\partial z(x,t)}{\partial \mathcal{N}} \equiv a_{i,j}(x,t)\, z_{x_j}(x,t) \cos\alpha_i(x,t),\ \alpha_i(x,t)$ — угол, образованный внешней нормалью к S с осью x_i.

Замечание 1. Первое слагаемое целевого функционала задачи (OC) имеет "квадратичный вид" по фазовой переменной. Это позволяет заметно сократить выкладки при доказательстве ПМП в задаче минимизации регулярной функции Лагранжа (см. лемму 4). Однако излагаемый ниже подход может быть применен и к задачам с целевыми функционалами более "общего выпуклого" вида.

Ниже нам потребуются следующие условия на исходные данные задачи (OC):

а) функции $A\colon S_T \to \mathbb{R}^1$, $B\colon S_T \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $G_1\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$, $G_2\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$ измеримы по Лебегу; кроме того, функция $B(s,t,\cdot)\colon W \to \mathbb{R}^1$ выпукла и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L > 0$ при п. в. $(s,t) \in S_T$;

б) выполняются условия

$$0 \le A(x,t) \le L \ \text{ при п. в. } (x,t) \in S_T, \quad |B(s,t,w)| \le L \ \text{ при п. в. } (s,t) \in Q_T$$

$$\text{и при всех } w \in W\ G_i \in L_\infty(\Omega),\ \ i = 1,2,$$

где L — некоторая положительная постоянная;

в) функции $a_{i,j}$, a, $u\colon \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^1$, $i,j = 1,\dots,n$, $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$, $\sigma\colon S \times (0,T) \to \mathbb{R}^1$ измеримы в смысле Лебега;

г) справедливы оценки $\nu\,|\xi|^2 \le a_{i,j}(x,t)\,\xi_i\,\xi_j \le \mu\,|\xi|^2\ \ \forall (x,t) \in Q_T,\ \ \nu,\mu > 0$;

д) верны оценки

$$|a(x,t)|,\ |u(x,t)| \le K \ \text{ при п.в. } (x,t) \in Q_T, \quad |v(x)| \le K \ \text{ при п.в. } x \in \Omega,$$

$$|\sigma(x,t)| \le K \ \text{ при п.в. } (x,t) \in S_T,$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная;

е) граница S является кусочно-гладкой.

Замечание 2. Задача оптимального управления (OC) формально записывается в компактной форме задачи выпуклого программирования $f(w) \to \min$, $g(w) = 0$, $w \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}$. Если мы определим, в какое пространство вкладываются элементы $g(w)$, то получим "полноценную" задачу выпуклого программирования. В качестве пространства образов оператора $g(\cdot)$ здесь можно формально рассматривать разные конкретные пространства: $C(\Omega)$, $L_\infty(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, и еще некоторые другие. Какое из них "более нужное", зависит от свойств регулярности решений $z[w]$ задачи (1.1) и "целей регуляризации" КУО. Фазовое ограничение-равенство $g(w) \equiv g(w)(\cdot) \equiv G_1(\cdot)\, z[w]\,(\cdot,T) + G_2(\cdot) = 0$ понимается как равенство почти всюду в Ω: $G_1(x)\, z[w]\,(x,T) + G_2(x)$ при п. в. $x \in \Omega$. Так как $z[w] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ и G_1, $G_2 \in L_\infty(\Omega)$, оно, очевидно, эквивалентно равенству в $L_2(\Omega)$. Поэтому в качестве пространства образов ниже выбрано пространство $L_2(\Omega)$. Возможные неустойчивость и невыполнимость КУО (см. [4]) в подобных ситуациях характеризуют те сложности, которые возникают при анализе задачи (OC) в случае такого выбора пространства образов.

Пусть F — множество всевозможных наборов исходных данных

$$\mathsf{f} \equiv \{A,\ B,\ G_i,\ i = 1,2,\ a_{i,j},\ i,j = 1,\dots,n,\ a,\ u,\ v,\ \sigma\},$$

для каждого из которых выполняются условия а)–е) с не зависящими от набора постоянными L, K. Определим наборы невозмущенных f^0 и возмущенных f^δ исходных данных, соответственно: $\mathsf{f}^0 \equiv \{A^0,\ B^0,\ G_i^0,\ i = 1,2,\ a_{i,j}^0,\ i,j = 1,\dots,n,\ a^0,\ u^0,\ v^0,\ \sigma^0\}$ и $\mathsf{f}^\delta \equiv \{A^\delta,\ B^\delta,\ G_i^\delta,\ i = 1,2,\ a_{i,j}^\delta,\ i,j = 1,\dots,n,\ a^\delta,\ u^\delta,\ v^\delta,\ \sigma^\delta\}$, $\delta \in (0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$, — некоторое число. Будем считать, что выполняются следующие оценки:

$$
\begin{gathered}
\|A^\delta - A^0\|_{\infty,S_T} \le \delta, \quad \sup_{w\in W} \|B^\delta(\cdot,\cdot,w) - B^0(\cdot,\cdot,w)\|_{\infty,S_T} \le \delta, \\
\|G_i^\delta - G_i^0\|_{\infty,\Omega} \le \delta, \quad i = 1,2; \\
\|a_{i,j}^\delta - a_{i,j}^0\|_{\infty,Q_T} \le \delta, \quad i,j = 1,\dots,n, \\
\|a^\delta - a^0\|_{\infty,Q_T},\ \|u^\delta - u^0\|_{\infty,Q_T},\ \|v^\delta - v^0\|_{\infty,\Omega},\ \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty,S_T} \le \delta.
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Соответствующее набору f, а точнее, его части $\{a_{i,j},\ i,j = 1,\dots,n,\ a,\ u,\ v,\ \sigma\}$ решение начально-краевой задачи (1.1) обозначим через $z(\mathsf{f})[w] \equiv z[w]$. Обозначим также задачу (OC), решение $z[w]$, функционал f, оператор g и т. п., соответствующие набору исходных данных f^δ, $\delta \in [0,\delta_0]$, через (OC^δ), $z^\delta[w] \equiv z(\mathsf{f}^\delta)[w]$, f^δ, g^δ соответственно.

Решения задачи (OC^0) в случае их существования будем обозначать через w^0, а всю совокупность таких решений — через W^0. Введем также обозначения: $\|g^\delta(w)\| \equiv \|g^\delta(w)\|_{2,\Omega}$, $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \{w \in \mathcal{D}\colon \|g^\delta(w)\| \le \epsilon\}$, $\epsilon \ge 0$, $\mathcal{D}^{0,0} \equiv \mathcal{D}^0$. Определим обобщенное значение β задачи (OC^0):

$$
\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon\to+0} \beta_\epsilon, \quad \beta_\epsilon \equiv \inf_{w\in\mathcal{D}^{0,\epsilon}} f^0(w), \quad \beta_\epsilon \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}^{0,\epsilon} = \varnothing.
$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta \le \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf\limits_{w\in\mathcal{D}^0} f^0(w)$, — классическое значение задачи. Однако в условиях данной работы ввиду ограниченности $\mathcal{D}$ имеет место равенство $\beta = \beta_0$.

Центральным для нас будет понятие минимизирующего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги (см. [7, гл. III]) в задаче (OC^0), т. е. последовательности элементов $w^i \in \mathcal{D}$, $i = 1,2,\dots$, такой, что

$$
f^0(w^i) \le \beta + \delta^i, \quad w^i \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^i},
$$

для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i = 1,2,\dots$.

Введем важное для всех последующих построений определение.

Определение 1. Пусть $\delta^k \in (0,\delta_0)$, $k = 1,2,\dots$ — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k = 1,2,\dots$, оператор $R(\cdot,\delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k}, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^k$, элемент $w^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется *МПР-образующим* в задаче (OC^0), если последовательность w^{δ^k}, $k = 1,2,\dots$, есть МПР в этой задаче.

2. Регуляризация КУО в задаче оптимального управления

Перепишем задачу (OC^0) и возмущенные задачи (OC^δ) в форме задачи выпуклого программирования с операторным ограничением-равенством. С этой целью сформулируем, прежде всего, необходимые утверждения, связанные с существованием обобщенных решений класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (1.1) и сопряженной с ней задачи, а также с оценками их устойчивости по возмущению коэффициентов задачи и управлений.

Необходимые вспомогательные результаты. В силу условий в), г), д), е) теорема существования обобщенного решения третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения с дивергентной главной частью (см. [12, с. 34; 11, гл. III, § 5]) обеспечивает разрешимость прямой задачи (1.1) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любого управления $w \in \mathcal{H}$ и любого $T > 0$, а также соответствующие необходимые оценки.

Лемма 1. *Если выполняются условия* в), г), д), е)*, тогда для любого управления* $w \in L_2(S_T)$ *существует единственное решение* $z(\mathsf{f})[w] \equiv z[w]$ *класса* $V_2^{1,0}(Q_T)$ *задачи* (1.1) *и имеет* *место оценка*[3]

$$|z[w]|_{Q_T} + \|z[w]\|_{2,S_T} \le C_T(\|u\|_{2,Q_T} + \|v\|_{2,\Omega} + \|w\|_{2,S_T}), \tag{2.1}$$

где постоянная C_T не зависит от $w \in L_2(S_T)$ и набора исходных данных $\mathsf{f} \in \mathsf{F}$.

Кроме того, пусть $\mathsf{f}, \widetilde{\mathsf{f}} \in \mathsf{F}$ — два произвольных набора исходных данных, $z(\mathsf{f})[\cdot]$, $z(\widetilde{\mathsf{f}})[\cdot]$ — соответствующие им решения задачи (1.1). *Тогда, если выполняются условия* в), г), д), е), *то для любых двух управлений w^1, $w \in \mathcal{H}$,*

$$\begin{gathered}|z(\widetilde{\mathsf{f}})[w^1] - z(\mathsf{f})[w]|_{Q_T} + \|z(\widetilde{\mathsf{f}})[w^1] - z(\mathsf{f})[w]\|_{2,S_T} \\ \le C_T\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \|z_{x_j}(\mathsf{f})[w]\|_{2,Q_T}\|\widetilde{a}_{i,j}(\cdot,\cdot) - a_{i,j}(\cdot,\cdot)\|_{\infty,Q_T} + \|z(\mathsf{f})[w]\|_{2,Q_T}\|\widetilde{a}(\cdot,\cdot) - a(\cdot,\cdot)\|_{\infty,Q_T} \\ + \|\widetilde{u} - u\|_{2,Q_T} + \|\widetilde{v} - v\|_{2,\Omega} + \|w^1 - w\|_{2,S_T} + \|z(\mathsf{f})[w]\|_{2,S_T}\|\widetilde{\sigma} - \sigma\|_{\infty,S_T}\Big), \end{gathered}\tag{2.2}$$

где постоянная C_T не зависит от наборов исходных данных $\mathsf{f}, \widetilde{\mathsf{f}} \in \mathsf{F}$ и управлений w, $w^1 \in \mathcal{H}$.

Помимо прямой задачи (1.1) ниже при получении регуляризованного ПМП существенную роль будет играть и сопряженная с ней задача

$$\begin{gathered}-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i}) + a(x,t)\eta + \chi(x,t) = 0, \\ \eta(x,T) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)\eta = \omega(x,t), \quad (x,t) \in S_T, \end{gathered}\tag{2.3}$$

с $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$, решение которой обозначим через $\eta[\chi,\psi,\omega]$.

Так как сопряженная краевая задача (2.3) стандартной заменой времени приводится к более привычному виду начально-краевой задачи (1.1) (с начальным условием при $t = 0$), то можно считать, что следствием первого утверждения леммы 1 является следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* в), г), д), е). *Тогда имеет место однозначная разрешимость в $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любых функций $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$ при любом $T > 0$ сопряженной (к* (1.1)) *задачи* (2.3). *Для ее решений так же, как в случае прямой задачи, справедлива оценка*

$$|\eta[\chi,\psi,\omega]|_{Q_T} + \|\eta[\chi,\psi,\omega]\|_{2,S_T} \le C_T^1(\|\chi\|_{2,Q_T} + \|\psi\|_{2,\Omega} + \|\omega\|_{2,S_T}), \tag{2.4}$$

в которой постоянная C_T^1 не зависит от набора исходных данных f и тройки $(\chi,\psi,\omega) \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$.

Задача оптимального управления как задача выпуклого программирования с операторным ограничением-равенством. Пусть выполняются условия а)–е). При любом наборе исходных данных f значение оператора $g\colon \mathcal{H} \to L_2(\Omega)$ на каждом управлении w является суммой элементов $G_1(\cdot)z_0[w](\cdot,T)$, $G_1(\cdot)z[0](\cdot,T)$ и $G_2(\cdot)$, где через $z_0[w]$ обозначено решение начально-краевой задачи (1.1) при $u(x,t) \equiv 0$, $v(x) \equiv 0$. В этом случае оператор $\mathcal{A}\colon \mathcal{H} \to L_2(\Omega)$, задаваемый равенством $\mathcal{A}[w] \equiv \mathcal{A}w \equiv G_1(\cdot)z_0[w](\cdot,T)$, в силу линейности начально-краевой задачи (1.1) и оценки (2.1) является линейным ограниченным. Так как одновременно функционал $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ является непрерывным и выпуклым, то с формальной точки зрения можно переписать задачу (OC^0) в форме невозмущенной задачи выпуклого программирования

$$(\widetilde{P}^0) \qquad f^0(w) \to \min, \quad \mathcal{A}^0 w = h^0 \equiv -G_1^0(\cdot)z^0[0](\cdot,T) - G_2^0(\cdot), \quad w \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}.$$

[3]Напомним, что, как и в [11], $|z|_{Q_T} \equiv \max\limits_{0\le t\le T}\|z(\cdot,t)\|_{2,\Omega} + \|z_x\|_{2,Q_T}$— норма в банаховом пространстве $V_2^{1,0}(Q_T)$.

С учетом приближенного задания исходных данных имеем формально вместо задачи $(\widetilde{P}^0)$ семейство задач, зависящих от характеризующей ошибку их задания величины δ,

$$(\widetilde{P}^\delta) \qquad f^\delta(w) \to \inf, \quad \mathcal{A}^\delta w = h^\delta \equiv -G_1^\delta(\cdot)z^\delta[0](\cdot,T) - G_2^\delta(\cdot), \quad w \in \mathcal{D}.$$

Получим в силу оценок (1.2) оценки отклонения возмущенных исходных данных $\{f^\delta,\ \mathcal{A}^\delta,\ h^\delta\}$ от невозмущенных исходных данных $\{f^0,\ \mathcal{A}^0,\ h^0\}$ задачи $(\widetilde{P}^0)$. С этой целью нам потребуются оценки леммы 1 отклонения решений начально-краевой задачи (1.1) при возмущении ее коэффициентов и управлений.

В силу оценок (1.2) и оценок (2.1), (2.2) леммы 1 можем записать

$$\|z_0^\delta[w](\cdot,T) - z_0^0[w](\cdot,T)\|_{2,\Omega} \le \widetilde{C}_T\delta\|w\|_{\mathcal{H}}, \tag{2.5}$$

где, как и выше, постоянная $\widetilde{C}_T$ не зависит от набора исходных данных f^δ и управления $w \in \mathcal{H}$. Из оценок (1.2), (2.1), (2.2), (2.5) в свою очередь следуют оценки для линейных ограниченных операторов, действующих из пространства $\mathcal{H}$ в пространство $L_2(\Omega)$, а также элементов h^δ, h^0

$$\|\mathcal{A}^\delta w - \mathcal{A}^0 w\| \le C\delta(1 + \|w\|) \ \ \forall\, w \in \mathcal{H}, \quad \|h^\delta - h^0\| \le C\delta,$$

в которых постоянную $C > 0$ следует считать независящей от δ и управления w.

Кроме того, из оценок (1.2), (2.1), (2.2) следуют также и оценки для отклонения целевого функционала в случае условий a)–e)

$$|f^\delta(w) - f^0(w)| \le C\delta(1 + \|w\|^2) \ \ \forall\, w \in \mathcal{D},$$

в которых постоянную $C > 0$ следует считать также независящей от δ и управления w. Одновременно выполняется и неравенство

$$|f^\delta(w_1) - f^\delta(w_2)| \le \widetilde{L}\|w_1 - w_2\|_{\mathcal{H}} \ \ \forall\, w_1,\, w_2 \in \mathcal{D},$$

где $\widetilde{L} > 0$ — некоторая, не зависящая от $\delta \in [0,\delta_0]$ и w_1, $w_2 \in \mathcal{D}$, постоянная.

Поставленная в предыдущем разделе задача (OC^0) (задача (OC^δ), $\delta \in [0,\delta_0]$), была переписана нами как задача выпуклого программирования $(\widetilde{P}^0)$ (задача $(\widetilde{P}^\delta)$, $\delta \in [0,\delta_0]$), для которой были выписаны также оценки отклонения возмущенных исходных данных от точных.

Регуляризованные КУО в задаче оптимального управления. Вернемся к задаче оптимального управления (OC^0), которая выше была сведена к задаче выпуклого программирования $(\widetilde{P}^0)$. Задача $(\widetilde{P}^\delta)$ представляет собой частный случай задачи выпуклого программирования (P^δ) из работы [5, с. 256, разд. 2]. Здесь в качестве гильбертова пространства Z выступает пространство $\mathcal{H}$ и отсутствуют ограничения-неравенства. Поэтому для получения анонсированных регуляризованных условий оптимальности в задаче (OC^0) необходимо далее "расшифровать" утверждения теорем 2, 3 из [5] в терминах исходной задачи (OC^0). Следуя этому плану, определим функцию Лагранжа в задаче оптимального управления (OC^δ)

$$L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda) \equiv f^\delta(w) + \varepsilon\|w\|^2 + \langle \lambda, \mathcal{A}^\delta w - h^\delta\rangle = \int\limits_{S_T} A^\delta(s,t)(z^\delta[w](s,t))^2\,ds\,dt$$

$$+ \int\limits_{S_T} B^\delta(s,t,w(s,t))\,ds\,dt + \varepsilon\|w\|^2 + \int\limits_{\Omega} \lambda(x)(G_1^\delta(x)z_0^\delta[w](x,T) + G_1^\delta(x)z^\delta[0](x,T) + G_2^\delta(x))\,dx,$$

$$w \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in L_2(\Omega), \quad \varepsilon > 0, \quad L^0(w,\lambda) \equiv L^{0,0}(w,\lambda).$$

Введем также обозначение $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda] = \operatorname{argmin}\{L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda) \colon w \in \mathcal{D}\}$. Определим далее двойственную задачу

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda) \equiv \min_{w\in\mathcal{D}} L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda) \to \sup, \quad V^\delta(\lambda) \equiv V^{\delta,0}(\lambda) \equiv \min_{w\in\mathcal{D}} L^{\delta,0}(w,\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in L_2(\Omega).$$

Пусть $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta \in (0, \delta_0]$ и выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{2.6}$$

Обозначим через $\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon} \in L_2(\Omega)$ решение регуляризованной двойственной задачи

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda) - \alpha(\delta)\|\lambda\|^2 \to \max, \quad \lambda \in L_2(\Omega),$$

с условием согласования (2.6). "Расшифровка" теорем 2, 3 из [5] в терминах исходной задачи приводит соответственно к регуляризирующему двойственному алгоритму и регуляризованному ПЛ в задаче оптимального управления (OC^0) в случае ограниченного множества $\mathcal{D}$.

Следующие два утверждения выполняются в случае условий a)–e).

Теорема 1 (Регуляризирующий двойственный алгоритм в задаче оптимального управления). *Пусть задача (OC^0) разрешима и выполняется условие согласования* (2.6), $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$, *— произвольная фиксированная последовательность,* $\varepsilon^k, k = 1, 2, \dots,$ *— произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел. Тогда оператор* $R(\cdot, \delta^k)$, *ставящий в соответствие набору исходных данных* f^{δ^k}, *удовлетворяющих оценкам* (1.2) *при* $\delta = \delta^k$, *управление* $R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) \equiv w^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}]$, *является МПР-образующим в задаче* (OC^0) (*см. определение* 1), *причем каждая слабая предельная точка последовательности* $w^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}]$, $k = 1, 2, \dots,$ *есть решение задачи* (OC^0).

Теорема 2 (Регуляризованный ПЛ в задаче оптимального управления в случае ограниченного $\mathcal{D}$). *Пусть* $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$, *— произвольная фиксированная последовательность. Пусть также выполняется условие согласования* (2.6), $\varepsilon^k, k = 1, 2, \dots,$ *— произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел.*

Для того чтобы в задаче (OC^0) *существовало МПР* (*и, следовательно, каждая его слабая предельная точка принадлежала множеству* W^0), *необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность двойственной переменной* $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$ *такая, что* $\delta^k\|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполняются включения*

$$w^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k,\gamma^k}, \quad \gamma^k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{2.7}$$

для некоторой последовательности положительных чисел $\widetilde{\gamma}^k, k = 1, 2, \dots$ (*она играет роль последовательности* $\epsilon^k, k = 1, 2, \dots$ *из определения МПР*)[4], *и предельное соотношение*

$$\langle \lambda^k, G_1^{\delta^k}(\cdot) z^{\delta^k}[w^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]](\cdot, T) + G_2^{\delta^k}(\cdot)\rangle_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{2.8}$$

Более того, последовательность $w^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots,$ *является искомым МПР. Другими словами, оператор* $R(\cdot, \delta^k)$, *ставящий в соответствие набору исходных данных* f^{δ^k}, *удовлетворяющих оценкам* (1.2) *при* $\delta = \delta^k$, *управление* $R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) = w^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$, *является МПР-образующим* (*см. определение* 1), *причем каждая слабая предельная точка последовательности* $w^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots,$ *есть решение задачи* (OC^0). *Одновременно с предельным соотношением* $\delta^k\|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$ *и соотношениями* (2.7), (2.8) *выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^k) \to \sup_{\lambda \in L_2(\Omega)} V^0(\lambda) = f^0(w^0).$$

В качестве конкретной последовательности $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots,$ *может быть взята, например, последовательность* $\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}$, $k = 1, 2, \dots,$ *о которой идет речь в теореме* 1.

[4]В силу ограниченности $\mathcal{D}$ условие (2.7) со стремящимися к нулю последовательностями положительных чисел δ^k, $\gamma^k, k = 1, 2, \dots,$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняются включения $w^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{0,\widetilde{\gamma}^k}, k = 1, 2, \dots,$ для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел $\widetilde{\gamma}^k, k = 1, 2, \dots,$ имеющие тот же самый вид, что и в определении МПР в конце разд. 1.

З а м е ч а н и е 3. Следует отметить, что в случае сильной выпуклости целевого функционала второй регуляризирующий параметр ε естественно становится излишним. В этом случае в теоремах 1, 2 следует положить $\varepsilon^k = 0,\ k = 1, 2, \dots$, и вести речь о сильной сходимости конструируемых в них МПР к единственному в такой ситуации решению w^0 задачи (OC^0) (см., например, [5, теорема 1]).

Переходим к формулировке и обоснованию регуляризованного ПМП в задаче (OC^0). Центральную роль здесь играет задача минимизации функции Лагранжа

$$L^{\delta,\varepsilon}(w, \lambda) \to \min, \quad w \in \mathcal{D}, \tag{2.9}$$

единственным решением которой является управление $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \in \mathcal{D}$. Запишем ПМП для управления $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$ в этой простейшей (только с геометрическим ограничением) задаче оптимального управления в предположении компактности выпуклого множества W и выполнимости условий a)–e). Условие компактности W играет существенную роль при вычислении первой вариации функционала Лагранжа в задаче минимизации (2.9) в процессе получения в ней ПМП. При этом вычислении возникает потребность иметь дело с ограниченными решениями как прямой начально-краевой задачи (1.1), так и сопряженной с ней.

Введем стандартное обозначение: $H^{\delta,\varepsilon}(s,t,w,\eta) \equiv w\eta - B^{\delta}(s,t,w) - \varepsilon w^2$. Получим поточечный по компоненте w ПМП в задаче минимизации функции Лагранжа (2.9) с использованием “нужных” дополнительных свойств решений z, η как прямой задачи, так и сопряженной и соответствующих C, L_∞ оценок для этих решений. В случае применения таких оценок поточечный ПМП может быть получен в случае функционала качества общего вида, однако при условиях несколько более жестких по сравнению с условиями a)–e). Получению различных вариантов C, L_∞ оценок для решений начально-краевых задач через нормы управлений в лебеговых пространствах с конечными показателями суммируемости и их применению в теории оптимального управления посвящено за последние десятилетия большое число публикаций. В случае оценок для параболических уравнений укажем, например, на важные, хотя и относительно давние работы [13;14] (см. также обширную библиографию этих работ). Воспользуемся здесь их результатами и в первую очередь C и L_∞ оценками предложений 3.3, 3.4 работы [13].

С целью получения поточечного ПМП по компоненте w напомним предварительно, что понимается под точкой Лебега суммируемой функции, заданной на поверхности S_T. Так как в соответствии с условием e) граница S области Ω является липшицевой (она является кусочно-гладкой), то можно утверждать, что существует конечный набор измеримых в смысле $(n-1)$-мерной меры, индуцированной на S, множеств $S_r,\ r = 1, 2, \dots, e$, и функций $\omega_r,\ r = 1, 2, \dots, e$ таких, что, во-первых, $\bigcup\limits_{r=1}^{e} S_r = S,\ \operatorname{int} S_k \cap \operatorname{int} S_l = \varnothing$, если $k \neq l$, и, во-вторых, функции $\omega_r \colon \overbrace{(-P,P) \times \dots \times (-P,P)}^{n-1} \to \mathbb{R}^1$ являются липшицевыми, и для некоторой координатной системы $(x'_r, x_{r,n}) \equiv (x_{r,1}, \dots, x_{r,n-1}, x_{r,n})$ имеет место равенство

$$\operatorname{int} S_r = \Big\{(x'_r, \omega(x'_r)) \colon x'_r \in \overbrace{(-P,P) \times \dots \times (-P,P)}^{n-1}\Big\}.$$

Зафиксируем точку $x_0 \in \operatorname{int} S_r$ для некоторого $1 \le r \le e$ и организуем для данного достаточно малого $\epsilon > 0$ множество

$$S_\epsilon(x_0) \equiv \Big\{x = (x'_r, \omega(x'_r)) \colon x'_r \in B_\epsilon(x'_{0r}) \subset \overbrace{(0,1) \times \dots \times (0,1)}^{n-1}\Big\}, \tag{2.10}$$

где $B_\epsilon(x'_{0r})$ — шар радиуса ϵ с центром в точке x'_{0r} пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Определим также множество $S_T^\epsilon(x_0, t_0) \equiv \{S_\epsilon(x_0) \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)\}$. Справедлива следующая лемма, доказательство которой можно найти, например, в [14, лемма 7.2].

Лемма 3. *Пусть задана функция $f \in L_1(S_T)$. Тогда существует измеримое в смысле индуцированной на S_T n-мерной меры μ_T множество L, $\mu_T(L) = \mu_T(S_T)$, такое, что для каждой точки $(x_0, t_0) \in L$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\mu_T(S_T^\epsilon(x_0,t_0))} \int\limits_{S_T^\epsilon(x_0,t_0)} |f(x,t) - f(x_0,t_0)|\, \mu_T\,(ds\,dt) = 0.$$

Указанные в сформулированной лемме точки (x_0, t_0) из множества L и называем точками Лебега функций из $L_1(S_T)$.

Итак, пусть в дополнение к условиям a)–e) исходные данные задачи (OC^δ) таковы, что

$$a^\delta_{i,j} \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad \gamma > 0, \quad a^\delta_{i,j}(x) = a^\delta_{j,i}(x), \quad i,j = 1,\dots,n, \quad \Omega \text{ — область класса } C^{2,\gamma}, \tag{2.11}$$

т. е. граница S области Ω является границей класса $C^{2,\gamma}$, $\gamma \in (0,1]$. Последнее означает, что S — $(n-1)$-мерная поверхность класса $C^{2,\gamma}$ такая, что область Ω лежит локально по одну сторону от S. При этом функция принадлежит классу $C^{2,\gamma}$, если она дважды гладкая и ее вторые производные принадлежат гельдеровскому классу H^γ. Считаем также, что вместо оценки $\|a^\delta_{i,j} - a^0_{i,j}\|_{\infty,Q_T} \le \delta$, входящей в определение отклонения возмущенных исходных данных f^δ от невозмущенных f^0, выполняется оценка

$$\|a^\delta_{i,j} - a^0_{i,j}\|_{C^{1,\gamma}(\Omega)} \le \delta. \tag{2.12}$$

В этом случае, так как выполняются условия a)–e), в силу леммы 1 решение $z^\delta[w]$ класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ (этот класс традиционно еще обозначается как $C([0,T];\, L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\, H^1(\Omega)) \equiv C([0,T];\, L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;\, H_1(\Omega)))$ существует для любого $w \in \mathcal{D}$ (точнее, для любого $w \in \mathcal{H}$) при любом $\delta \in [0, \delta_0]$.

Лемма 4. *Управление $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$, являющееся решением задачи* (2.9) *при условиях* a)–e) *с компактным множеством W и при дополнительных условиях* (2.11), (2.12), *удовлетворяет при $w = w(\cdot,\cdot) = w^{\delta,\varepsilon}[\lambda](\cdot,\cdot)$ соотношению максимума*

$$H^{\delta,\varepsilon}(s,t,w(s,t),\eta^\delta[w](s,t)) = \max_{w \in W} H^{\delta,\varepsilon}(s,t,w,\eta^\delta[w](s,t)) \ \text{ при п. в. } (s,t) \in S_T, \tag{2.13}$$

где $\eta^\delta[w] \equiv \eta^\delta[w,\lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — решение сопряженной задачи

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a^\delta_{i,j}(x,t)\,\eta_{x_i}) + a^\delta(x,t)\,\eta = 0,$$

$$\eta(x,T) = -\lambda(x) G_1^\delta(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t)\,\eta = -2A^\delta(x,t)\, z^\delta[w](x,t), \quad (x,t) \in S_T.$$

И, обратно, в силу выпуклости задачи любой элемент $w = w(\cdot,\cdot) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий вместе с некоторой $\lambda \in H = L_2(\Omega)$ соотношению максимума (2.13), *доставляет минимум в задаче* (2.9), *т. е. $w(\cdot,\cdot) = w^{\delta,\varepsilon}[\lambda](\cdot,\cdot)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\lambda^i \in L_2(\Omega)$, $i = 1,2,\dots,$ — такая последовательность ограниченных функций, $\lambda^i \in L_\infty(Q_T)$, что $\|\lambda^i - \lambda\|_{2,\Omega} \to 0$, $i \to \infty$. Рассмотрим семейство зависящих от $i = 1,2,\dots$ вспомогательных задач минимизации

$$L^{\delta,\varepsilon}(w, \lambda^i) \to \min, \quad w \in \mathcal{D}.$$

Можем записать оценку

$$|L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda^i)-L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda)|=|\langle\lambda^i-\lambda,\mathcal{A}^\delta w-h^\delta\rangle|\le\|\lambda^i-\lambda\|_{2,\Omega}\,(\|\mathcal{A}^\delta w\|_{2,\Omega}+\|h^\delta\|_{2,\Omega}),$$

из которой в силу оценки (2.1) леммы 1 следует, что $L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda^i)-L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda)\to 0,\ i\to\infty$, равномерно по $w\in\mathcal{D}$. Так как каждый функционал $L^{\delta,\varepsilon}(\cdot,\lambda^i),\ i=1,2,\dots$, является непрерывным (в силу оценок леммы 1) и сильно выпуклым на $\mathcal{D}$, то задача (2.9) при каждом i является разрешимой единственным образом, и решение ее может быть записано в соответствии с используемыми обозначениями как $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$. Так как в силу указанной выше равномерной сходимости имеет место сходимость минимумов $L^{\delta,\varepsilon}(w^{\delta,\varepsilon}[\lambda],\lambda)-L^{\delta,\varepsilon}(w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i)\to 0,\ i\to\infty$, то с учетом сходимости

$$L^{\delta,\varepsilon}(w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i)-L^{\delta,\varepsilon}(w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda)\to 0,\quad i\to\infty\ \ (w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\in\mathcal{D}),$$

имеем, что $L^{\delta,\varepsilon}(w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda)\ \to\ L^{\delta,\varepsilon}(w^{\delta,\varepsilon}[\lambda],\lambda),\ i\ \to\ \infty$; откуда благодаря сильной выпуклости $L^{\delta,\varepsilon}(\cdot,\lambda)$ получаем сходимость (см. [3, гл. 8, § 2, теорема 10])

$$\|w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]-w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]\|_{\mathcal{H}}\to 0,\quad i\to\infty. \tag{2.14}$$

Получим ПМП в задаче (2.9) при $\lambda=\lambda^i$. С этой целью применим формулу из [15, лемма 3] для интегрального представления приращения функционала $L^{\delta,\varepsilon}(\cdot,\lambda^i)$ для пары управлений w и $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$ из $\mathcal{D}$. Можем записать

$$(z^\delta[w]-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]])_t-\frac{\partial}{\partial x_i}(a^\delta_{i,j}(x,t)(z^\delta[w]-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]])_{x_j})+a^\delta(x,t)(z^\delta[w]-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]])=0,$$

$$(z^\delta[w]-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]])(x,0)=0,\quad x\in\Omega,$$

$$\frac{\partial(z^\delta[w]-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]])}{\partial\mathcal{N}}+\sigma^\delta(s,t)(z^\delta[w]-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]])=w(s,t)-w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t),\quad (s,t)\in S_T.$$

Кроме того, можем записать также, используя далее для сокращения записи обозначение $B^\delta_\varepsilon(s,t,w)\equiv B^\delta(s,t,w)+\varepsilon w^2$,

$$L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda^i)-L^{\delta,\varepsilon}(w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i)=\int\limits_{S_T}A^\delta(s,t)[(z^\delta[w](s,t))^2-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s,t))^2]\,ds\,dt$$

$$+\int\limits_{S_T}[B^\delta_\varepsilon(s,t,w(s,t))-B^\delta_\varepsilon(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t))]\,ds\,dt+\int\limits_{\Omega}\lambda^i(x)G^\delta_1(x)(z^\delta[w](x,T)-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x,T))\,dx$$

$$=\int\limits_{S_T}A^\delta(s,t)[z^\delta[w](s,t)+z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s,t)]\,[z^\delta[w](s,t)-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s,t)]\,ds\,dt$$

$$+\int\limits_{S_T}[B^\delta_\varepsilon(s,t,w(s,t))-B^\delta_\varepsilon(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t))]\,ds\,dt+\int\limits_{\Omega}\lambda^i(x)G^\delta_1(x)(z^\delta[w](x,T)-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x,T))\,dx.$$

Тогда, применяя [15, лемма 3], получаем

$$L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda^i)-L^{\delta,\varepsilon}(w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i)=-\int\limits_{S_T}(w(s,t)-w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t))\,\eta^\delta[w,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s,t)\,ds\,dt$$

$$+\int\limits_{S_T}[B^\delta_\varepsilon(s,t,w(s,t))-B^\delta_\varepsilon(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t))]\,ds\,dt, \tag{2.15}$$

где $\eta^\delta[w, w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \equiv \eta^\delta[w, w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — обобщенное решение вспомогательной (промежуточной) сопряженной задачи

$$\begin{gathered}-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a^\delta_{i,j}(x,t)\,\eta_{x_i}) + a^\delta(x,t)\,\eta = 0, \quad \eta(x,T) = -\lambda^i(x)G^\delta_1(x), \quad x \in \Omega,\\ \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(s,t)\,\eta = -A^\delta(s,t)[z^\delta[w](s,t) + z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s,t)], \quad (s,t) \in S_T.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Применяем далее игольчатое варьирование управления $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$, задаваемое формулой

$$w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i](s,t) \equiv \begin{cases} w \in W, & \text{если} \quad (s,t) \in S^\epsilon_T(\bar s,\bar t),\\ w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t), & \text{если} \quad (s,t) \in S_T \setminus S^\epsilon_T(\bar s,\bar t),\end{cases} \tag{2.17}$$

где $(\bar s,\bar t)$ — точка Лебега функций (множество $S^\epsilon_T(\bar s,\bar t)$ определяется равенством (2.10))

$$(w' - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t))\,\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s,t), \quad B^\delta_\varepsilon(s,t,w') - B^\delta_\varepsilon(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t)), \quad (s,t) \in S_T, \quad w' \in W^*,$$

и $\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \equiv \eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — обобщенное решение предельной краевой сопряженной задачи

$$\begin{gathered}-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a^\delta_{i,j}(x,t)\,\eta_{x_i}) + a^\delta(x,t)\,\eta = 0, \quad \eta(x,T) = -\lambda^i(x)\,G^\delta_1(x), \quad x \in \Omega,\\ \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(s,t)\,\eta = -2A^\delta(s,t)z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s,t), \quad (s,t) \in S_T,\end{gathered} \tag{2.18}$$

а W^* — счетное всюду плотное множество в W. Благодаря лемме 3 такой выбор точек $(\bar s,\bar t)$ возможен, причем лебегова мера множества всех таких точек $(\bar s,\bar t)$ совпадает соответственно с лебеговой мерой боковой поверхности S_T.

Далее замечаем, что так как W — компакт, а значит, все управления $w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]$ равномерно по ϵ ограничены и $|u^\delta(x,t)| \le K$ при п. в. $(x,t) \in Q_T$, $|v^\delta(x)| \le K$ при п. в. $x \in \Omega$ ($K > 0$ — постоянная из условия д)), то ввиду сформулированных выше условий (см. дополнительные условия (2.11), (2.12)) можно в силу [13, предложения 3.3, 3.4] записать оценки

$$\|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]]\,\|_{\infty,Q_T} + \|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]]\,\|_{\infty,S_T} \le C_1(\|u^\delta\|_{q,Q_T} + \|v^\delta\|_{\infty,\Omega} + \|w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\|_{r,S_T}),$$

где постоянная $C_1 > 0$ зависит лишь от ϵ, n, $q > (n+2)/2$, $r > n+1$, Ω, T, K, и

$$\|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]]\,\|^{(0)}_{Q_{\iota,T}} \le C_2(\|u^\delta\|_{q,Q_T} + \|v^\delta\|_{2,\Omega} + \|w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]\|_{r,S_T}), \tag{2.19}$$

где постоянная $C_2 > 0$ зависит лишь от ϵ, ι, n, $q > (n+2)/2$, $r > n+1$, Ω, T, K и используется обозначение $Q_{\iota,T} \equiv \Omega \times (\iota < t < T)$.

Одновременно с (2.19) можем записать

$$\|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]] - z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\,\|^{(0)}_{Q_{\iota,T}} \le C_2\|w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i] - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{r,S_T} \to 0, \quad \epsilon \to 0. \tag{2.20}$$

Естественно, одновременно мы можем записать и более “грубую” оценку (2.1) леммы 1

$$\|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]] - z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\,\|_{2,Q_T} + \|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]] - z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{2,S_T} \le C\|w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i] - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{2,S_T},$$

из которой получаем сходимость

$$\|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]] - z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{2,Q_T} + \|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_\epsilon[\lambda^i]] - z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{2,S_T} \to 0, \quad \epsilon \to 0. \tag{2.21}$$

Таким образом, в силу предельных соотношений (2.20), (2.21), ограниченности функций u^δ, v^δ, равномерной по ϵ ограниченности функций $w^{\delta,\varepsilon}_{\epsilon}[\lambda^i]$ можно утверждать, что выполняется и предельное соотношение

$$\|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_{\epsilon}[\lambda^i]]-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\,\|_{q,Q_T}+\|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_{\epsilon}[\lambda^i]](\cdot,T)-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\cdot,T)\|_{\infty,\Omega}$$

$$+\,\|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_{\epsilon}[\lambda^i]]-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{r,S_T}\to 0,\quad \epsilon\to 0. \tag{2.22}$$

Полученное предельное соотношение (2.22) дает возможность применить оценки из [13, предложения 3.3, 3.4] еще раз, но теперь уже применительно к разности решений вспомогательной (2.16) (при $w=w^{\delta,\varepsilon}_{\epsilon}[\lambda^i]$) и предельной (2.18) сопряженных задач. По этой причине можем записать предельное соотношение

$$\|\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_{\epsilon}[\lambda^i],w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]-\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{\infty,Q_T}+\|\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_{\epsilon}[\lambda^i],w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\cdot,0)-\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\cdot,0)\|_{\infty,\Omega}$$

$$+\,\|\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_{\epsilon}[\lambda^i],w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]-\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{\infty,S_T}\to 0,\quad \epsilon\to 0. \tag{2.23}$$

Последнее предельное соотношение позволяет вычислить первую вариацию функционала Лагранжа в случае, когда $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$ варьируется по формуле (2.17). В этом случае мы имеем предельное соотношение

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\mu_T(S^{\epsilon}_T(\bar x,\bar t))}\big(L^{\delta,\varepsilon}(w^{\delta,\varepsilon}_{\epsilon}[\lambda^i],\lambda^i)-L^{\delta,\varepsilon}(w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i],\lambda^i)\big)$$

$$=(w-w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar s,\bar t))\,\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\bar s,\bar t)+B^\delta_\varepsilon(\bar s,\bar t,w)-B^\delta_\varepsilon(\bar s,\bar t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](\bar s,\bar t)),$$

основанное на полученном выше представлении (2.15) для приращения функционала Лагранжа и равномерной сходимости (см. (2.23))

$$\|\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}_{\epsilon}[\lambda^i],w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]-\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\,\|_{\infty,S_T}\to 0,\quad \epsilon\to 0.$$

Как результат получаем поточечный по компоненте w ПМП для управления $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$

$$H^{\delta,\varepsilon}(s,t,w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s,t),\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s,t))$$

$$=\max_{w\in W}H^{\delta,\varepsilon}(s,t,w,\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s,t))\quad \text{при п. в.}\quad (s,t)\in S_T. \tag{2.24}$$

Наконец, предельный переход при $i\to\infty$ в соотношении (2.24) приводит к ПМП для управления $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$. Для обоснования этого предельного перехода надо выписать предельное соотношение

$$|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]]\,|_{Q_T}+\|z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]-z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]]\,\|_{2,S_T}\to 0,\quad i\to\infty,$$

являющееся следствием предельного соотношения (2.14) и оценки (2.1) леммы 1, а затем заметить, что его следствием является в свою очередь предельное соотношение при $i\to\infty$

$$\|A^\delta(\cdot,\cdot)z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\cdot,\cdot)-A^\delta(\cdot,\cdot)z^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]](\cdot,\cdot)\|_{2,S_T}\to 0,$$

которое в силу оценки (2.4) леммы 2 позволяет записать

$$|\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]-\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]]\,|_{Q_T}+\|\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]-\eta^\delta[w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]]\,\|_{2,S_T}\to 0,\quad i\to\infty. \tag{2.25}$$

Предельные соотношения (2.14) и (2.25) обеспечивают предельный переход при $i\to\infty$ в соотношении (2.24). Как результат этого предельного перехода получаем сформулированный в лемме ПМП для управления $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняются соотношения (2.13) для некоторого управления $w \in \mathcal{D}$ и некоторого $\lambda \in H = L_2(\Omega)$. Тогда можем записать для произвольного $w' \in \mathcal{D}$ с учетом выпуклости функции $A(s,t)z^2$ по $z \in \mathbb{R}^1$ (напомним, что $B^\delta_\varepsilon(s,t,w) \equiv B^\delta(s,t,w) + \varepsilon w^2$)

$$L^{\delta,\varepsilon}(w',\lambda) - L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda) = \int_{S_T} A^\delta(s,t)[(z^\delta[w'](s,t))^2 - z^\delta[w](s,t))^2]\,ds\,dt$$

$$+\int_{S_T}[B^\delta_\varepsilon(s,t,w'(s,t)) - B^\delta_\varepsilon(s,t,w(s,t))]\,ds\,dt + \int_\Omega \lambda(x)\,G^\delta_1(x)(z^\delta[w'](x,T) - z^\delta[w](x,T))\,dx$$

$$\geq \int_{S_T} A^\delta(s,t)[2z^\delta[w](s,t)]\,[z^\delta[w'](s,t) - z^\delta[w](s,t)]\,ds\,dt$$

$$+\int_{S_T}[B^\delta_\varepsilon(s,t,w'(s,t)) - B^\delta_\varepsilon(s,t,w(s,t))]\,ds\,dt + \int_\Omega \lambda(x)\,G^\delta_1(x)(z^\delta[w'](x,T) - z^\delta[w](x,T))\,dx.$$

Можем также записать

$$(z^\delta[w'] - z^\delta[w])_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a^\delta_{i,j}(x,t)(z^\delta[w'] - z^\delta[w])_{x_j}) + a^\delta(x,t)(z^\delta[w'] - z^\delta[w]) = 0,$$

$$(z^\delta[w'] - z^\delta[w])(x,0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial(z^\delta[w'] - z^\delta[w])}{\partial\mathcal{N}} + \sigma^\delta(s,t)(z^\delta[w'] - z^\delta[w]) = w'(s,t) - w(s,t), \quad (s,t) \in S_T.$$

Тогда, применяя, как и выше при доказательстве необходимости, лемму 3 из [15], получаем

$$L^{\delta,\varepsilon}(w',\lambda) - L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda)$$

$$\geq -\int_{S_T}(w'(s,t) - w(s,t))\,\eta^\delta[w](s,t)\,ds\,dt + \int_{S_T}[B^\delta_\varepsilon(s,t,w'(s,t)) - B^\delta_\varepsilon(s,t,w(s,t))]\,ds\,dt, \qquad (2.26)$$

где $\eta^\delta[w] \equiv \eta^\delta[w,\lambda] \in V^{1,0}_2(Q_T)$ — обобщенное решение сопряженной задачи

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a^\delta_{i,j}(x,t)\,\eta_{x_i}) + a^\delta(x,t)\,\eta = 0, \quad \eta(x,T) = -\lambda(x)G^\delta_1(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\mathcal{N}} + \sigma^\delta(s,t)\,\eta = -2A^\delta(s,t)\,z^\delta[w](s,t), \quad (s,t) \in S_T.$$

Замечая теперь, что в силу соотношений ПМП (2.13) выражение в правой части неравенства (2.26) неотрицательно при всех $w' \in \mathcal{D}$, получаем неравенство

$$L^{\delta,\varepsilon}(w',\lambda) - L^{\delta,\varepsilon}(w,\lambda) \geq 0 \ \ \forall\, w' \in \mathcal{D},$$

т. е. управление $w \in \mathcal{D}$ есть решение задачи (2.9) и, стало быть, $w = w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$.

Лемма 4 доказана.

После доказательства ПМП леммы 4 для простейшей задачи оптимального управления (2.9) мы можем переформулировать полученный выше регуляризованный ПЛ теоремы 2 для задачи (OC^0) в форме регуляризованного ПМП. С целью указанной переформулировки прежде всего обозначим через $W^{\delta,\varepsilon}_m[\lambda]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих ПМП леммы 4. Очевидно, в нашем случае благодаря сильной выпуклости $f^\delta(\cdot) + \varepsilon\|\cdot\|^2$ это множество состоит из одного элемента, т. е. $W_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \equiv w_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$, и справедливо равенство $w_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda] = w^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$. Тогда непосредственным следствием теоремы 2 и леммы 4 является следующий регуляризованный ПМП в задаче оптимального управления (OC^0).

Теорема 3 (Регуляризованный ПМП в задаче оптимального управления). *Пусть выполняются условия* a)–e) *и дополнительные условия* (2.11), (2.12), *множество* W *— выпуклый компакт. Тогда все утверждения теоремы* 2 *остаются справедливыми и в том случае, если в них* $w^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$ *заменяется везде на* $w_m^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k]$.

Заключение

В статье получены так называемые регуляризованные КУО для выпуклой задачи граничного оптимального управления с операторным ограничением-равенством, связанной с параболическим уравнением. Они сформулированы как теоремы существования минимизирующих последовательностей — минимизирующих приближенных решений в смысле Дж. Варги, выражаются в терминах регулярных обычных функций Лагранжа и Гамильтона — Понтрягина и представляют собой регуляризирующие алгоритмы для решения оптимизационных задач с одновременным конструктивным представлением конкретных минимизирующих последовательностей. Устроенные структурно так же, как и классические ПЛ и ПМП, регуляризованные ПЛ и ПМП

1) преодолевают возможную некорректность своих классических аналогов;

2) являются теоретической базой для конструирования на своей основе устойчивых численных алгоритмов для практического решения конкретных задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
3. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации: в 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
4. **Сумин М. И.** Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 279–296. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-279-296 .
5. **Сумин М. И.** О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 252–269. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-252-269 .
6. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
7. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
8. **Гольштейн Е. Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
9. **Breitenbach T., Borzi A.** A sequential quadratic hamiltonian method for solving parabolic optimal control problems with discontinuous cost functionals // J. Dyn. Control Syst. 2019. Vol. 25, iss. 3. P. 403–435. doi: 10.1007/s10883-018-9419-6 .
10. **Breitenbach T., Borzi A.** On the SQH scheme to solve nonsmooth PDE optimal control problems // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2019. Vol. 40, iss. 13. P. 1489–1531. doi: 10.1080/01630563.2019.1599911 .
11. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
12. **Плотников В. И.** Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165, № 1. С. 33–35.
13. **Raymond J.-P., Zidani H.** Hamiltonian Pontryagin's principles for control problems governed by semilinear parabolic equations // Appl. Math. Optim. 1999. Vol. 39, iss. 2. P. 143–177.
14. **Casas E.** Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35. P. 1297–1327.

15. **Сумин М. И.** Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 11. С. 2001–2019.

Поступила 29.01.2021
После доработки 13.02.2021
Принята к публикации 1.03.2021

Сумин Михаил Иосифович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина
г. Тамбов;
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
г. Нижний Новгород
e-mail: m.sumin@mail.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishechenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes.* N Y; London: John Wiley & Sons, 1962, 360 p. doi: 10.1002/zamm.19630431023. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
2. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal Control.* N Y: Plenum Press, 1987, 309 p. doi: 10.1007/978-1-4615-7551-1. Original Russian text published in Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie.* Moscow: Nauka Publ., 1979, 432 p.
3. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: MTsNMO Publ., 2011, vol. 1, 620 p., ISBN: 978-5-94057-707-2; vol. 2, 433 p., ISBN: 978-5-94057-708-9.
4. Sumin M.I. Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 279–296 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-279-296.
5. Sumin M.I. On regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 252–269 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-252-269.
6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for solutions of ill-posed problems.* N Y: Wiley, 1977, 258 p. ISBN: 0470991240. Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1986, 288 p.
7. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations.* N Y: Acad. Press, 1972, 531 p. ISBN: 0127351507. Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 624 p.
8. Golshtein E.G. *Teoriya dvoistvennosti v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya* [Duality theory in mathematical programming and its applications]. Moscow: Nauka Publ., 1971, 352 p.
9. Breitenbach T., Borzi A. A sequential quadratic Hamiltonian method for solving parabolic optimal control problems with discontinuous cost functionals. *J. Dyn. Control Syst.*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 403–435. doi: 10.1007/s10883-018-9419-6.
10. Breitenbach T., Borzi A. On the SQH scheme to solve nonsmooth PDE optimal control problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2019, vol. 40, no. 13, pp. 1489–1531. doi: 10.1080/01630563.2019.1599911.
11. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* Providence, R.I.: AMS, 1968, 648 p. ISBN: 978-0-8218-1573-1. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa.* Moscow: Nauka Publ., 1967, 736 p.
12. Plotnikov V.I. Uniqueness and existence theorems and apriori properties of generalized solutions. *Sov. Math., Dokl.*, 1965, vol. 6, pp. 1405–1407.

13. Raymond J.P., Zidani H. Hamiltonian Pontryagin's principles for control problems governed by semilinear parabolic equations. *Appl. Math. Optim.*, 1999, vol. 39, no. 2, pp. 143–177. doi: 10.1007/s002459900102 .
14. Casas E. Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations. *SIAM J. Control Optim.*, 1997, vol. 35, pp. 1297–1327. doi: 10.1137/S0363012995283637 .
15. Sumin M.I. A regularized gradient dual method for the inverse problem of a final observation for a parabolic equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 11, pp. 1903–1921.

Received January 29, 2021
Revised February 13, 2021
Accepted March 1, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 19-07-00782_a, 20-01-00199_a, 20-52-00030 Bel_a).

Mikhail Iosifovich Sumin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tambov State University, Tambov, 392000 Russia; Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, 603950 Russia,
e-mail: m.sumin@mail.ru .

Cite this article as: M. I. Sumin. On the regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 221–237 .