ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 519.853.62

# О ЗАДАЧЕ КВАДРАТИЧНОЙ МИНИМИЗАЦИИ С НЕРАВНОМЕРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ В КРИТЕРИИ И ОГРАНИЧЕНИЯХ[1]

**Л. А. Артемьева, А. А. Дряженков, М. М. Потапов**

В гильбертовых пространствах рассматривается задача квадратичной минимизации при наличии линейного операторного ограничения типа равенства и квадратичного ограничения типа неравенства. Задача переформулируется в виде задачи поиска седловой точки нормальной функции Лагранжа. Для численного решения данной задачи предлагается регуляризованный метод градиентного типа, осуществляющий итерации как по прямым, так и по двойственным переменным. Приближенные решения строятся в неклассических информационных условиях, когда доступные вычислителю приближения к точным операторам, входящим в постановку задачи, аппроксимируют их лишь сильно поточечно и отсутствуют соответствующие оценки погрешностей в операторных нормах исходных пространств. Вместо этого используется априорная информация о таких уровнях погрешностей, к которым открывается доступ при изменении нормировок в области определения или значения операторов. Оценки первого типа появляются при усилении норм в области определения операторов, а оценки второго типа — при ослаблении норм в области их значений. На каждой итерации предлагаемого метода выполняются два основных действия. Во-первых, строится очередное приближение к минимальному значению функционала и при этом используются оценки погрешности первого типа. Затем с учетом оценок погрешностей второго типа строится очередное приближение к оптимальному решению. Доказано, что генерируемые предложенным методом приближения сходятся к решению исходной задачи оптимизации по норме исходного пространства.

Ключевые слова: задача квадратичной минимизации, приближенные данные, численное решение, некорректная задача, регуляризованный градиентный метод, функция Лагранжа, седловая точка.

**L. A. Artem'eva, A. A. Dryazhenkov, M. M. Potapov. On a quadratic minimization problem with nonuniform perturbations in the criteria and constraints.**

A quadratic minimization problem is considered in Hilbert spaces in the presence of a linear operator constraint of the equality type and a quadratic constraint of the inequality type. The problem is reformulated as the problem of finding the saddle point of the normal Lagrange function. For the numerical solution of this problem, a regularized gradient-type method is proposed that iterates both in primal and in dual variables. Approximate solutions are constructed under nonclassical information conditions, when the approximations to the exact operators from the problem statement available to the computer approximate these operators only strongly pointwise and there are no corresponding error estimates in the operator norms of the original spaces. Instead, a priori information is used about the error levels that become accessible when the norms are changed in the domains or ranges of the operators. Estimates of the first type appear after strengthening norms in the domain spaces of the operators, and estimates of the second type appear after weakening norms in their range spaces. At each iteration of the proposed method, two main actions are performed. First, the next approximation to the minimum value of the functional is computed using error estimates of the first type. Then, the next approximation to the optimal solution is found using error estimates of the second type. It is proved that the approximations generated by the proposed method converge to the solution of the original optimization problem in the norm of the original space.

Keywords: quadratic minimization problem, approximate data, numerical solution, ill-posed problem, regularized gradient method, Lagrange function, saddle point.

**MSC:** 65J20, 65K05, 90C25

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-19-34

## 1. Введение

Пусть $H$, $F$, $G$, $W$ — гильбертовы пространства, в которых действуют заданные линейные ограниченные операторы $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \to F)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(H \to G)$, $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(H \to W)$. Элементы $f \in F$,

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-3539.2019.1.

$g \in G$, $w \in W$, число $R > 0$ и выпукое замкнутое множество $U_0 \subset H$ также считаются заданными. В работе рассматривается следующая задача условной минимизации:

$$J(u) = \|\mathcal{A}u - f\|_F \to \min_{u \in U}, \tag{1.1}$$

$$U = \{u \in U_0 \mid \mathcal{B}u = g,\ \|\mathcal{Q}u - w\|_W \leqslant R\}. \tag{1.2}$$

Требуется найти некоторое оптимальное решение $u_* \in U$ задачи (1.1)

$$u_* \in U_* = \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \|\mathcal{A}u - f\|_F\,. \tag{1.3}$$

Предполагается, что вместо точных входных данных $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}$, $f$, $g$, $w$, $R$ известны лишь сходящиеся к ним приближения $\mathcal{A}_k \in \mathcal{L}(H \to F)$, $\mathcal{B}_k \in \mathcal{L}(H \to G)$, $\mathcal{Q}_k \in \mathcal{L}(H \to W)$, $f_k \in F$, $g_k \in G$, $w_k \in W$, $R_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$, по которым требуется построить последовательность элементов $u_k \in U_0$, сильно сходящуюся в пространстве $H$ к решению исходной задачи $u_* \in U$. Такие задачи относятся к классу некорректных задач, и для их устойчивого численного решения необходимо применять специальные методы регуляризации, использующие дополнительную информацию о точных и приближенных данных. Так если известны уровни погрешностей $h_k$, $\sigma_k$ такие, что

$$\|\mathcal{A}_k - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H \to F)} \leqslant h_k,\ \|\mathcal{B}_k - \mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(H \to G)} \leqslant h_k,\ \|\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H \to W)} \leqslant h_k, \quad \lim_{k \to \infty} h_k = 0, \tag{1.4}$$

$$\|f_k - f\|_F \leqslant \sigma_k,\ \|g_k - g\|_G \leqslant \sigma_k,\ \|w_k - w\|_W \leqslant \sigma_k,\ |R_k - R| \leqslant \sigma_k\,, \quad \lim_{k \to \infty} \sigma_k = 0\,, \tag{1.5}$$

то можно было бы воспользоваться методом стабилизации А. Н. Тихонова [1] или, следуя [2], регуляризировать некоторый базовый итерационный процесс. В данной статье мы придерживаемся именно итеративного подхода [2], который к настоящему времени исследован достаточно глубоко и всесторонне. Уже давно были получены фундаментальные результаты как для вариационных неравенств [3], так и для задач условной минимизации [4]. В этих и многих других работах итерации производились в исходном пространстве. Несколько позже появились работы, в которых акцент переносился на регуляризацию итерационных процессов по двойственным переменным (см., например, [5] и цитированную там литературу) или, как в [6], на организацию синхронной регуляризации в пространстве пар исходных и двойственных переменных. В настоящей работе для численного решения задачи (1.1), (1.2) предлагается регуляризованный метод градиентного типа, в идейном плане близкий к [5; 6] и осуществляющий итерации как по прямым, так и по двойственным переменным, а принципиальные отличия от [5; 6], равно как и от [2–4], будут связаны с заменой информационных условий (1.4), (1.5).

Поясним мотивы этой замены. В приложениях нередко приходится иметь дело с *некомпактными* точными операторами $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}$ и их *конечномерными* приближениями $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}_k$, $\mathcal{Q}_k$, что исключает наличие в (1.4) асимптотики $h_k \to 0$, необходимой для обоснования сходимости. Вместе с тем при соответствующем изменении нормировок в областях определения и значений операторов осуществляемые ими отображения становятся *компактными* и появляются оценки типа (1.4) с асимптотически бесконечно малыми погрешностями. В настоящей работе предлагается итерационный метод регуляризации, использующий именно такую неклассическую информацию об уровнях погрешностей, к которой открывается доступ при изменении нормировок в областях определения и значений операторов.

Пусть наряду с $H$, $F$, $G$, $W$ имеются также гильбертовы пространства $H^-$, $F^+$, $G^+$, $W^+$, связанные с исходными пространствами непрерывными и плотными вложениями $H^- \subset H$, $F \subset F^+$, $G \subset G^+$, $W \subset W^+$. Пусть также вместо (1.4) известны такие $h_k^-$, $h_k^+$, что

$$\|\mathcal{A}_k - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H^- \to F)} \leqslant h_k^-,\ \|\mathcal{B}_k - \mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(H^- \to G)} \leqslant h_k^-,\ \|\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H^- \to W)} \leqslant h_k^-,\ \lim_{k \to \infty} h_k^- = 0, \tag{1.6}$$

$$\|\mathcal{A}_k - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H \to F^+)} \leqslant h_k^+,\ \|\mathcal{B}_k - \mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(H \to G^+)} \leqslant h_k^+,\ \|\mathcal{Q}_k - \mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H \to W^+)} \leqslant h_k^+,\ \lim_{k \to \infty} h_k^+ = 0, \tag{1.7}$$

а наряду с (1.5) известны значения $\sigma_k^+$, для которых

$$\|f_k - f\|_{F^+} \leqslant \sigma_k^+ , \quad \|g_k - g\|_{G^+} \leqslant \sigma_k^+ , \quad \|w_k - w\|_{W^+} \leqslant \sigma_k^+ , \quad \lim_{k\to\infty} \sigma_k^+ = 0. \tag{1.8}$$

В информационных условиях (1.5)–(1.8) для построения устойчивых приближенных решений $u_k$ можно использовать модификацию обобщенного метода невязки [7]. В данной работе предлагается альтернативный метод итерационного типа, который, по нашему мнению, более удобен для численной реализации. В итерационном процессе важную роль будет играть функция Лагранжа, в выражении которой в целях сглаживания взяты квадраты норм из постановки (1.1), (1.2):

$$L(u;\lambda,\mu) = \|\mathcal{A}u - f\|_F^2 + \langle\lambda, \mathcal{B}u - g\rangle_G + \mu\left(\|\mathcal{Q}u - w\|_W^2 - R^2\right), \quad u \in U_0\,, \quad \lambda \in G, \quad \mu \in \mathbb{R}_+\,. \tag{1.9}$$

Вычислительный процесс будет представлять собой модификацию регуляризованного метода проекции градиента [8], осуществляющего итерации как по прямым, так и по двойственным переменным $u$ и $(\lambda,\mu)$. В результате будут вырабатываться приближения к седловой точке $(u_*;\lambda_*,\mu_*)$ функции Лагранжа (1.9), первая компонента которой будет решением исходной задачи оптимизации (1.1), (1.2).

Изложение материала организовано следующим образом. Сначала будет описана предлагаемая вычислительная процедура, затем будут сформулированы основные предположения и основные результаты, после чего будет приведено доказательство сильной сходимости метода, степень детализации которого определяется имеющимися ограничениями на объем текста.

## 2. Описание метода

Метод формирует последовательности элементов $v_k^-$, $v_k^+$ вида

$$\begin{gathered} v_k^- = (u_k^-;\lambda_k^-,\mu_k^-) \in U_0^- \times G \times \mathbb{R}_+, \quad U_0^- = U_0 \cap H^-\,, \\ v_k^+ = (u_k^+,\psi_k^+,\varphi_k^+;\lambda_k^+,\mu_{1k}^+,\mu_{2k}^+) \in U_0 \times F \times W \times G^+ \times \mathbb{R}_+^2\,, \quad k = 0,1,\ldots, \end{gathered} \tag{2.1}$$

и положительные числовые последовательности $m_k$, $d_k$, $k = 0,1,\ldots$, используя положительные параметры $M$, $\alpha_k^-$, $\beta_k^-$, $\alpha_k^+$, $\beta_k^+$, $\varepsilon_k$, $k = 0,1,\ldots$ . Чтобы запустить процесс, нужно выбрать произвольные начальные приближения

$$v_0^- \in U_0^- \times G \times \mathbb{R}_+, \quad v_0^+ \in U_0 \times F \times W \times G^+ \times \mathbb{R}_+^2\,.$$

На $k+1$-й итерации метода, когда приближения $v_k^-$ и $v_k^+$ уже найдены, выполняются два действия, первое из которых (шаг 1) представляет собой самостоятельную итерационную процедуру, нацеленную на приближение к минимальному значению функции $J_*$ с учетом информационных условий (1.5), (1.6). Главной целью второго действия (шаг 2) является построение очередного приближения к оптимальному решению $u_*$; при его выполнении используются результаты шага 1 и условия (1.7), (1.8).

Ш а г 1. Вычисляется очередное приближение $m_k > 0$ к нижней грани $J_*$ функционала (1.1):

$$\begin{aligned} m_k^2 = {} & \left(\|\mathcal{A}_k u_k^- - f_k\|_F + h_k^-\|u_k^-\|_{H^-} + \sigma_k\right)^2 + M\left(\|\mathcal{B}_k u_k^- - g_k\|_G + h_k^-\|u_k^-\|_{H^-} + \sigma_k\right) \\ & + M\max\left\{0,\ \left(\|\mathcal{Q}_k u_k^- - w_k\|_W + h_k^-\|u_k^-\|_{H^-} + \sigma_k\right)^2 - \left(\max(0, R_k - \sigma_k)\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В самом начале полагаем $d_0 = m_0$, а затем вычисляем $d_k > 0$ по правилу

$$d_k^2 = d_{k-1}^2 + \operatorname{sign}\left(m_k^2 - d_{k-1}^2\right)\cdot\min\left\{\varepsilon_{k-1}\,,\ \left|m_k^2 - d_{k-1}^2\right|\right\}, \quad k = 1,2,\ldots\,. \tag{2.3}$$

Элементы $v_{k+1}^-$ определяются по методу типа проекции градиента:

$$v_{k+1}^- = \mathcal{P}_{U_0^-\times G\times\mathbb{R}_+}\left(v_k^- - \beta_k^-\nabla_\pm t_k^-(v_k^-)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.4}$$

где $\mathcal{P}_X$ — оператор проектирования на множество $X$, $t_k^-(v)$ — приближенная функция Тихонова для функции Лагранжа (1.9):

$$t_k^-(v) = t_k^-(u;\lambda,\mu) = \|\mathcal{A}_k u - f_k\|_F^2 + \langle\lambda, \mathcal{B}_k u - g_k\rangle_G + \mu\left(\|\mathcal{Q}_k u - w_k\|_W^2 - R_k^2\right)$$
$$+\,\alpha_k^-\|u\|_{H^-}^2 - \alpha_k^-\left(\|\lambda\|_G^2 + \mu^2\right), \quad u\in H^-, \quad \lambda\in G, \quad \mu\in\mathbb{R}, \tag{2.5}$$

а “градиент” $\nabla_\pm$ отличается от обычного градиента $\nabla$ только знаками при производных по двойственным переменным $\lambda$ и $\mu$ :

$$\nabla_\pm t_k^-(v) = \Big(\frac{\partial t_k^-(v)}{\partial u}; -\frac{\partial t_k^-(v)}{\partial\lambda}, -\frac{\partial t_k^-(v)}{\partial\mu}\Big) \in H^-\times G\times\mathbb{R}.$$

Ш а г 2. В пространстве переменных $v = (u,\,\psi,\,\varphi;\,\lambda,\,\mu_1,\,\mu_2) \in H\times F\times W\times G^+\times\mathbb{R}^2$ вычисляются элементы

$$v_{k+1}^+ = \mathcal{P}_{U_0\times F\times W\times G^+\times\mathbb{R}_+^2}\left(v_k^+ - \beta_k^+\nabla_\pm t_k^+(v_k^+)\right), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где приближенная функция Тихонова $t_k^+(v)$ и ее “градиент” $\nabla_\pm$ имеют вид

$$t_k^+(v) = \|\mathcal{A}_k u - f_k - \psi\|_{F^+}^2 + \|\mathcal{Q}_k u - w_k - \varphi\|_{W^+}^2 + \langle\lambda, \mathcal{B}_k u - g_k\rangle_{G^+}$$
$$+\,\mu_1\left(\|\psi\|_F^2 - d_k^2\right) + \mu_2\left(\|\varphi\|_W^2 - R_k^2\right) + \alpha_k^+\|(u,\psi,\omega)\|_{H\times F\times W}^2 - \alpha_k^+\|(\lambda,\mu_1,\mu_2)\|_{G^+\times\mathbb{R}^2}^2, \tag{2.6}$$

$$\nabla_\pm t_k^+(v) = \Big(\frac{\partial t_k^+(v)}{\partial u}, \frac{\partial t_k^+(v)}{\partial\psi}, \frac{\partial t_k^+(v)}{\partial\varphi}; -\frac{\partial t_k^+(v)}{\partial\lambda}, -\frac{\partial t_k^+(v)}{\partial\mu_1}, -\frac{\partial t_k^+(v)}{\partial\mu_2}\Big) \in H\times F\times W\times G^+\times\mathbb{R}^2. \tag{2.7}$$

## 3. Предположения и основной результат

Для доказательства сходимости метода потребуем, чтобы исходные данные и параметры метода удовлетворяли следующим условиям A1–A6.

A1. Функция Лагранжа (1.9) имеет на множестве $U_0\times G\times\mathbb{R}_+$ седловую точку $(u_\star,\lambda_\star,\mu_\star)$, и известна задействованная в (2.2) постоянная $M>0$ из оценки

$$\|(\lambda_\star,\mu_\star)\|_{G\times\mathbb{R}}^2 = \|\lambda_\star\|_G^2 + \mu_\star^2 \leqslant M^2. \tag{3.1}$$

A2. Пространство $H^-$ всюду плотно в допустимом множестве $U$.

A3. Выполнены аппроксимационные предположения (1.5)–(1.8).

A4. Параметры $\alpha_k^\pm, \beta_k^\pm, \varepsilon_k$ при $k\to\infty$ обладают асимптотическими свойствами

$$\alpha_k^-\to 0, \quad \frac{h_k^-}{(\alpha_k^-)^2}\to 0, \quad \frac{\sigma_k}{\alpha_k^-\beta_k^-}\to 0, \quad \frac{|\alpha_{k+1}^- - \alpha_k^-|}{(\alpha_k^-)^{5/2}\beta_k^-}\to 0, \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_k\to 0, \quad \alpha_k^+\to 0, \quad \frac{h_k^+ + \sigma_k^+ + \sigma_k}{\alpha_k^+\beta_k^+}\to 0, \quad \frac{|\alpha_{k+1}^+ - \alpha_k^+|}{(\alpha_k^+)^2\beta_k^+}\to 0, \quad \frac{\varepsilon_k}{(\alpha_k^+)^2\beta_k^+}\to 0. \tag{3.3}$$

A5. Существуют такие $\gamma^-,\gamma^+\in(0,1)$, при которых для значений $\beta_k^\pm$ имеют место верхние оценки вида

$$\beta_k^- \leqslant \min\Big\{\frac{(\alpha_k^-)^{1/(1-\gamma^-)}}{C_{1k}^-}, \frac{1}{(C_{2k}^-)^{1/\gamma^-}}\Big\}, \quad \beta_k^+ \leqslant \min\Big\{\frac{(\alpha_k^+)^{1/(1-\gamma^+)}}{C_{1k}^+}, \frac{1}{(C_{2k}^+)^{1/\gamma^+}}\Big\}. \tag{3.4}$$

В (3.4) присутствуют вполне конкретные числовые последовательности $C_{1k}^{\pm} > 0$, $C_{2k}^{\pm} > 0$, порождаемые методом (2.1)–(2.7) и используемой техникой обработки условий A1–A4. Ввиду громоздкости мы не приводим явных выражений $C_{1k}^{\pm}$ и $C_{2k}^{\pm}$, но отметим важное свойство их ограниченного роста:

при некотором $C > 0$

$$C_{1k}^{\pm} \leqslant C, \quad C_{2k}^{-} \leqslant C\left(\|u_k^-\|_{H^-}^2 + \mu_k^- + 1\right), \quad C_{2k}^{+} \leqslant C\left(\|\psi_k^+\|_F^2 + \|\varphi_k^+\|_W^2 + \mu_{1k}^+ + \mu_{2k}^+ + 1\right).$$

A6. Следующие ряды расходятся:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^- \beta_k^- = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^+ \beta_k^+ = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = +\infty. \tag{3.5}$$

З а м е ч а н и е 1. Если в условии A1 отсутствует достоверная информация о значении мажоранты $M$, можно в (2.2) на шаге 1 взять любое $M > 0$ (например, $M = 1$) и возвести в степень, меньшую единицы, те выражения из (2.2), которые умножаются на $M$.

З а м е ч а н и е 2. Предъявленные к параметрам метода требования A4–A6 непротиворечивы. В частности, они будут выполняться для произвольно заданных стартовых значений $\alpha_0^{\pm} \in (0,1)$, последующем выборе $\beta_k^{\pm}$ из условий (3.4) и

$$\alpha_{k+1}^{\pm} = \alpha_k^{\pm} - \frac{1}{k}(\alpha_k^{\pm})^2\beta_k^{\pm}, \quad \max\{\sigma_k\,, h_k^-\} \leqslant \frac{1}{k}\sqrt{\alpha_k^-\beta_k^-}, \quad \max\{\sigma_k^+\,, h_k^+\} \leqslant \frac{1}{k}\sqrt{\alpha_k^+\beta_k^+}, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Сформулируем основной результат данной работы.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены предположения* A1–A6 *и* $u_* \in U_*$ — *оптимальное решение задачи* (1.1), (1.2), *обладающее экстремальным свойством*

$$u_* = \arg\min_{u \in U_*} \left(\|u\|_H^2 + \|\mathcal{Q}u - w\|_W^2\right). \tag{3.6}$$

*Тогда к этому решению сходятся первые компоненты* $u_k^+$ *элементов* $v_k^+$ *вида* (2.1), *генерируемых описанным методом*:

$$\|u_k^+ - u_*\|_H \to 0 \quad \textit{при} \quad k \to \infty. \tag{3.7}$$

Доказательство этого утверждения является достаточно громоздким и будет проведено в несколько этапов.

## 4. Вспомогательные утверждения

Наряду с (2.5) рассмотрим функции Тихонова с точными данными

$$T_k^-(v) = T_k^-(u; \lambda, \mu) = \|\mathcal{A}u - f\|_F^2 + \langle \lambda, \mathcal{B}u - g\rangle_G + \mu\left(\|\mathcal{Q}u - w\|_W^2 - R^2\right)$$
$$+ \alpha_k^- \|u\|_{H^-}^2 - \alpha_k^-\left(\|\lambda\|_G^2 + \mu^2\right), \quad u \in H^-, \quad \lambda \in G, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{4.1}$$

Каждая из этих функций имеет на множестве $U_0^- \times G \times \mathbb{R}_+$ седловую точку $v_{*k}^- = (u_{*k}^-; \lambda_{*k}^-, \mu_{*k}^-)$, $k = 0, 1, \ldots$ , [9, предложение 2.1, с. 176]. Обратим внимание на то, что поскольку компоненты $u_{*k}^- \in U_0^- \subset H^-$ и норма в $H^-$ сильнее, чем в $H$, последовательность норм $\|v_{*k}^-\|$ может оказаться неограниченной. В следующей лемме приводятся некоторые предельные свойства последовательности $v_{*k}^-$.

**Лемма 1.** *Пусть выполнены предположения* А1 *и* А2*. Тогда для последовательности седловых точек* $v_{*k}^-$ *выполняются предельные соотношения*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|\mathcal{A}u_{*k}^- - f\|_F^2 \leqslant \|\mathcal{A}u_* - f\|_F^2, \quad \lim_{k\to\infty} \|\mathcal{B}u_{*k}^- - g\|_G = 0, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\|\mathcal{Q}u_{*k}^- - w\|_W^2 - R^2\right) = 0 \quad (4.2)$$

*и свойство ослабленной ограниченности*

$$\exists\, C = \mathrm{const} > 0 : \alpha_k^- \|v_{*k}^-\|_{H^-\times G\times\mathbb{R}}^2 \leqslant C, \quad k = 0, 1, \dots \,. \quad (4.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию А1 оптимальные решения задачи (1.1), (1.2) существуют, а по условию А2 для любого из них и, в частности, для $u_*$ с экстремальным свойством (3.6) найдется последовательность $u_k^- \in H^- \cap U \subset U_0^-$ такая, что [7, лемма 2]

$$\|u_k^- - u_*\|_H \to 0, \quad \alpha_k^- \|u_k^-\|_{H^-}^2 \to 0, \quad k \to \infty\,. \quad (4.4)$$

Из правого седлового неравенства для функции $T_k^-(v)$ имеем

$$T_k^-(v_{*k}^-) \leqslant T_k^-(u_k^-; \lambda_{*k}^-, \mu_{*k}^-) = \|\mathcal{A}u_k^- - f\|_F^2 + \langle \lambda_{*k}^-, \mathcal{B}u_k^- - g\rangle_G + \mu_{*k}^- \left(\|\mathcal{Q}u_k^- - w\|_W^2 - R^2\right)$$
$$+ \alpha_k^- \|u_k^-\|_{H^-}^2 - \alpha_k^- \|(\lambda_{*k}^-, \mu_{*k}^-)\|_{G\times\mathbb{R}}^2 \leqslant \|\mathcal{A}u_k^- - f\|_F^2 + \alpha_k^- \|u_k^-\|_{H^-}^2\,. \quad (4.5)$$

Двойственные компоненты седла $\lambda_{*k}^-, \mu_{*k}^-$ являются точками максимума, поэтому в соответствии с критерием оптимальности [8, теорема 2, с. 665] получаем, что

$$\mathcal{B}u_{*k}^- - g = 2\,\alpha_k^-\,\lambda_{*k}^-, \quad \left(-\|\mathcal{Q}u_{*k}^- - w\|_W^2 + R^2 + 2\alpha_k^-\mu_{*k}^-\right)\left(\mu - \mu_{*k}^-\right) \geqslant 0 \quad \forall\, \mu \geqslant 0\,. \quad (4.6)$$

С помощью соотношений (4.6), во втором из которых взято $\mu = 0$, левая часть (4.5) оценивается снизу:

$$T_k^-(v_{*k}^-) = \|\mathcal{A}u_{*k}^- - f\|_F^2 + \langle \lambda_{*k}^-, \mathcal{B}u_{*k}^- - g\rangle_G + \mu_{*k}^- \left(\|\mathcal{Q}u_{*k}^- - w\|_W^2 - R^2\right)$$
$$+ \alpha_k^- \|u_{*k}^-\|_{H^-}^2 - \alpha_k^- \|(\lambda_{*k}^-, \mu_{*k}^-)\|_{G\times\mathbb{R}}^2 \geqslant \|\mathcal{A}u_{*k}^- - f\|_F^2 + \alpha_k^- \|v_{*k}^-\|_{H^-\times G\times\mathbb{R}}^2\,. \quad (4.7)$$

Из (4.4)–(4.7) следуют ограниченность (4.3) и все утверждения в (4.2).

Лемма доказана.

Наряду с функцией (2.6) рассмотрим точные функции Тихонова

$$T_k^+(v) = T_k^+(u, \psi, \varphi; \lambda, \mu_1, \mu_2) = \|\mathcal{A}u - f - \psi\|_{F^+}^2 + \|\mathcal{Q}u - w - \varphi\|_{W^+}^2 + \langle \lambda, \mathcal{B}u - g\rangle_{G^+}$$
$$+ \mu_1\left(\|\psi\|_F^2 - d_k^2\right) + \mu_2\left(\|\varphi\|_W^2 - R^2\right) + \alpha_k^+ \|(u, \psi, \varphi)\|_{H\times F\times W}^2 - \alpha_k^+ \|(\lambda, \mu_1, \mu_2)\|_{G^+\times\mathbb{R}^2}^2\,,$$
$$u \in H, \quad \psi \in F, \quad \varphi \in W; \quad \lambda \in G^+, \quad \mu_1 \in \mathbb{R}, \quad \mu_2 \in \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

и их седловые точки $v_{*k}^+ = (u_{*k}^+, \psi_{*k}^+, \varphi_{*k}^+; \lambda_{*k}^+, \mu_{1*k}^+, \mu_{2*k}^+)$ на множестве $V_0^+ = U_0 \times F \times W \times G^+ \times \mathbb{R}_+^2$, $k = 0, 1, \dots$ . Обратим внимание на то, что базовые для (4.8) функции Лагранжа

$$L_k^+(v) = L_k^+(u, \psi, \varphi; \lambda, \mu_1, \mu_2) = \|\mathcal{A}u - f - \psi\|_{F^+}^2 + \|\mathcal{Q}u - w - \varphi\|_{W^+}^2$$
$$+ \langle \lambda, \mathcal{B}u - g\rangle_{G^+} + \mu_1\left(\|\psi\|_F^2 - d_k^2\right) + \mu_2\left(\|\varphi\|_W^2 - R^2\right), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.9)$$

при выполнении условия доминирования

$$d_k \geqslant \|Au_* - f\|_F \quad (4.10)$$

будут иметь на том же самом множестве $V_0^+$ общую для них седловую точку $v_*^+ = (u_*, Au_* - f, Qu_* - w; 0, 0, 0)$, связанную с произвольным оптимальным решением $u_*$ задачи (1.1), (1.2). Что касается свойства (4.10), то оно будет доказано ниже в теореме 2 и является свойством независящих от $\alpha_k^+$ величин $d_k$, заложенным в их конструкцию (2.3) требованиями (3.2), (3.4) к параметрам метода $\alpha_k^-$ и $\beta_k^-$, которые связаны с имеющейся информацией (1.5), (1.6) об уровнях погрешностей.

**Лемма 2.** *Пусть выполняется условие* (4.10). *Тогда последовательность* $v_{*k}^+$ *ограничена в пространстве* $V^+ = H \times F \times W \times G^+ \times \mathbb{R}^2$, *причем*

$$\|v_{*k}^+\|_{V^+} \leqslant \|v_*^+\|_{V^+}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в лемме 1, начнем с правого седлового неравенства

$$T_k^+(v_{*k}^+) \leqslant T_k^+(u_*, Au_* - f, Qu_* - w; \lambda_{*k}^+,\ \mu_{1*k}^+,\ \mu_{2*k}^+) = \mu_{1*k}^+(\|Au_* - f\|_F^2 - d_k{}^2)$$
$$+ \mu_{2*k}^+(\|Qu_* - w\|_W^2 - R^2) + \alpha_k^+\|(u_*, Au_* - f, Qu_* - w)\|_{H\times F\times W}^2 - \alpha_k^+\|(\lambda_{*k}^+, \mu_{1*k}^+, \mu_{2*k}^+)\|_{G^+\times\mathbb{R}^2}^2$$
$$\leqslant \mu_{1*k}^+(\|Au_* - f\|_F^2 - d_k{}^2) + \alpha_k^+\|(u_*, Au_* - f, Qu_* - w)\|_{H\times F\times W}^2 \overset{(4.10)}{\leqslant} \alpha_k^+\|v_*^+\|_{V^+}^2 . \tag{4.12}$$

Соотношения, аналогичные (4.6), в данном случае имеют вид

$$\langle\lambda_{*k}^+, Bu_{*k}^+ - g\rangle_{G^+} = 2\,\alpha_k^+\|\lambda_{*k}^+\|_{G^+}^2,$$
$$\mu_{1*k}^+(\|\psi_{*k}^+\|_F^2 - d_k^2) \geqslant 2\,\alpha_k^+(\mu_{1*k}^+)^2, \quad \mu_{2*k}^+(\|\varphi_{*k}^+\|_W^2 - R^2) \geqslant 2\,\alpha_k^+(\mu_{2*k})^2 . \tag{4.13}$$

С учетом (4.12) из (4.13) получаем итоговую оценку (4.11):

$$\alpha_k^+\|v_*^+\|_{V^+}^2 \geqslant T_k^+(v_{*k}^+) = \|Au_{*k}^+ - f - \psi_{*k}^+\|_{F^+}^2 + \|Qu_{*k}^+ - w - \varphi_{*k}^+\|_{W^+}^2 + \langle\lambda_{*k}^+, Bu_{*k}^+ - g\rangle_{G^+}$$
$$+ \mu_{1*k}^+(\|\psi_{*k}^+\|_F^2 - d_k^2) + \mu_{2*k}^+(\|\varphi_{*k}\|_W^2 - R^2)$$
$$+ \alpha_k^+\,\|(u_{*k}^+, \psi_{*k}^+, \varphi_{*k}^+)\|_{H\times F\times W}^2 - \alpha_k^+\,\|(\lambda_{*k}^+, \mu_{1*k}^+\,, \mu_{2*k}^+)\|_{G^+\times\mathbb{R}^2}^2 \geqslant \alpha_k^+\|v_{*k}^+\|^2 .$$

Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть выполнены предположения* A1, A2, $u_*$ — *некоторое решение исходной задачи* (1.1), (1.2), *а* $(u_0, \psi_0, \varphi_0)$ — *нормальное в пространстве* $H\times F\times W$ *решение следующей задачи минимизации, возникающей на шаге* 2 *итерационного процесса*:

$$\begin{gathered}\|\mathcal{A}u - f - \psi\|_{F^+}^2 + \|\mathcal{Q}u - w - \varphi\|_{W^+}^2 \to \min, \quad (u, \psi, \varphi) \in U_0 \times F \times W,\\ \|\psi\|_F \leqslant \|Au_* - f\|_F, \quad Bu = g, \quad \|\varphi\|_W \leqslant R.\end{gathered} \tag{4.14}$$

*Тогда компонента* $u_0$ *будет решением исходной задачи* (1.1), (1.2), *обладающим экстремальным свойством* (3.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что для любого $u_* \in U_*$, оптимального в смысле (1.3), тройка элементов $(u_*, \psi_* = \mathcal{A}u_* - f, \varphi_* = Qu_* - w)$ является для задачи (4.14) допустимой и доставляет функционалу нулевое значение, наименьшее из возможных, значит, $(u_*, \psi_*, \varphi_*) \in U_*^+$, где $U_*^+$ — множество всех оптимальных решений задачи (4.14). Поскольку тройка $(u_0, \psi_0, \varphi_0)$ в задаче (4.14) также оптимальна, да к тому же еще и нормальна, то

$$\begin{gathered}u_0 \in U_0,\ \ \psi_0 = Au_0 - f,\ \ \varphi_0 = Qu_0 - w,\ \ \|\psi_0\|_F \leqslant \|Au_* - f\|_F,\ \ Bu_0 = g,\ \ \|\varphi_0\|_W \leqslant R,\\ \|u_0\|_H^2 + \|\psi_0\|_F^2 + \|\varphi_0\|_W^2 \leqslant \|u\|_H^2 + \|\psi\|_F^2 + \|\varphi\|_W^2 \quad \forall\,(u, \psi, \varphi) \in U_*^+ .\end{gathered} \tag{4.15}$$

В (4.15) содержатся, в частности, неравенства

$$\|Au_0 - f\|_F \leqslant \|Au_* - f\|_F, \quad \|Qu_0 - w\|_W \leqslant R,$$

означающие, что $u_0 \in U_*$, т.е. $u_0$ является одним из оптимальных решений исходной задачи (1.1), (1.2), а тогда

$$\|Au_0 - f\|_F = \|Au_* - f\|_F \quad \forall\, u_* \in U_*.$$

Учитывая данное равенство в последнем из соотношений (4.15), характеризующем нормальность тройки $(u_0, \psi_0, \varphi_0)$, и подставляя в него элементы $u = u_*$, $\psi = \mathcal{A}u_* - f$, $\varphi = Qu_* - w$, порождаемые произвольным $u_* \in U_*$, получаем экстремальное свойство (3.6) компоненты $u_0$.

Лемма доказана.

Покажем, что при некотором усилении условий леммы 2 седловые точки $v^+_{*k}$ приобретают свойство сильной сходимости

**Лемма 4.** *Пусть* $u_*$ *— решение задачи* (1.1), (1.2), *обладающее экстремальным свойством* (3.6), *и* $v^+_* = (u_*, Au_* - f, Qu_* - w; 0, 0, 0)$. *Пусть также выполнены условия* A1, A2, (4.10) *и* $d_k \to \|\mathcal{A}u_* - f\|_F$, $\alpha^+_k \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \|v^+_{*k} - v^+_*\|_{V^+} = 0\,. \tag{4.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу установленного в лемме 2 свойства ограниченности (4.11) можно считать, что последовательность $\{v^+_{*k}\}$ слабо сходится в пространстве $V^+$ к некоторой точке $v^+_0 = (u^+_0, \psi^+_0, \varphi^+_0, \lambda^+_0, \mu^+_{10}, \mu^+_{20})$. Следствиями слабой сходимости $v^+_{*k} \to v^+_0$ и условий леммы о том, что $d_k \to \|\mathcal{A}u_* - f\|_F$, $\alpha^+_k \to 0$, будут предельные соотношения

$$\|v^+_0\|_{V^+} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \|v^+_{*k}\|_{V^+} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \|v^+_{*k}\|_{V^+} \overset{(4.11)}{\leqslant} \|v^+_*\|_{V^+}\,, \tag{4.17}$$

$$\begin{gathered}
\|Au^+_0 - f - \psi^+_0\|_{F^+} + \|Qu^+_0 - w - \varphi^+_0\|_{W^+} \\
\leqslant \varliminf_{k\to\infty} \big(\|Au^+_{*k} - f - \psi^+_{*k}\|_{F^+} + \|Qu^+_{*k} - w - \varphi^+_{*k}\|_{W^+}\big), \\
\mu_1(\|\psi^+_0\|^2_F - \|\mathcal{A}u_* - f\|^2_F) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \mu_1(\|\psi^+_{*k}\|^2_F - d^2_k) \quad \forall\, \mu_1 \geqslant 0, \\
\mu_2(\|\varphi^+_0\|^2_W - R^2) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \mu_2(\|\varphi^+_{*k}\|^2_W - R^2) \quad \forall\, \mu_2 \geqslant 0, \\
\langle \lambda, Bu^+_0 - g\rangle_{G^+} = \lim_{k\to\infty} \langle \lambda, Bu^+_{*k} - g\rangle_{G^+} \quad \forall\, \lambda \in G^+, \\
\mu^+_{10}(\|\psi\|^2_F - \|\mathcal{A}u_* - f\|^2_F) = \lim_{k\to\infty} \mu^+_{1*k}(\|\psi\|^2_F - d^2_k) \quad \forall\, \psi \in F, \\
\mu^+_{20}(\|\varphi\|^2_W - R^2) = \lim_{k\to\infty} \mu^+_{2*k}(\|\varphi\|^2_W - R^2) \quad \forall\, \varphi \in W, \\
\langle \lambda^+_0, Bu - g\rangle_{G^+} = \lim_{k\to\infty} \langle \lambda^+_{*k}, Bu - g\rangle_{G^+} \quad \forall\, u \in H, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha^+_k \|v^+_{*k}\|^2_{V^+} = 0.
\end{gathered} \tag{4.18}$$

Введем функцию Лагранжа, отличающуюся от (4.9) лишь заменой величин $d^2_k$ их предельным значением $\|\mathcal{A}u_* - f\|^2_F$ :

$$\begin{aligned}
L^+(v) = L^+(u, \psi, \varphi; \lambda, \mu_1, \mu_2) &= \|\mathcal{A}u - f - \psi\|^2_{F^+} + \|\mathcal{Q}u - w - \varphi\|^2_{W^+} \\
&+ \langle \lambda, \mathcal{B}u - g\rangle_{G^+} + \mu_1\big(\|\psi\|^2_F - \|\mathcal{A}u_* - f\|^2_F\big) + \mu_2\big(\|\varphi\|^2_W - R^2\big)\,.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Для нее будут выполняться следующие соотношения, вытекающие из (4.17), (4.18) и того, что точки $v^+_{*k}$ являются седловыми для функций $T^+_k(v)$ на множестве $V^+_0$ :

$$\begin{gathered}
L^+(u^+_0, \psi^+_0, \varphi^+_0; \lambda, \mu_1, \mu_2) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} T^+_k(u^+_{*k}, \psi^+_{*k}, \varphi^+_{*k}; \lambda, \mu_1, \mu_2) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} T^+_k(v^+_{*k}) \\
\leqslant \varlimsup_{k\to\infty} T^+_k(v^+_{*k}) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} T^+_k(u, \psi, \varphi; \lambda^+_{*k}, \mu^+_{1*k}, \mu^+_{2*k}) = L^+(u, \psi, \varphi; \lambda^+_0, \mu^+_{10}, \mu^+_{20}) \quad \forall v \in V^+_0.
\end{gathered} \tag{4.20}$$

Полагая в (4.20) $v = v^+_0$, получаем, что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} T^+_k(v_{*k}) = L(v^+_0)$, а это значит, что точка $v^+_0$ является седловой точкой функции (4.19) на множестве $V^+_0$. Заметим, что точка $v^+_*$ также является седловой точкой той же функции на том же множестве, причем в силу особенности образующего ее элемента $u_*$ и утверждения леммы 3 она будет *нормальной* седловой точкой, а тогда $\|v_*^+\|_{V^+} \leqslant \|v_0^+\|_{V^+}$, из (4.17) имеем равенство норм $\|v_*^+\|_{V^+} = \|v_0^+\|_{V^+}$, равенство самих элементов $v_*^+ = v_0^+$, сходимость $\|v_{*k}^+\|_{V^+} \to \|v_*^+\|_{V^+}$, а следовательно, и сильную сходимость (4.16).

Лемма доказана.

## 5. Сходимость метода по функции

В этом разделе будет установлена сходимость к нижней грани $J_*$ задачи (1.1), (1.2) значений $d_k$, которые вычисляются на шаге 1 по правилу (2.3) и связаны с величинами $m_k$ из (2.2). Информацию о свойствах последовательности $m_k$ содержит

**Лемма 5.** *Пусть выполнены предположения* A1–A6 *и* $u_*$ *— некоторое решение задачи* (1.1), (1.2)*. Тогда последовательность* $m_k$ *обладает свойствами*

$$m_k \geqslant \|\mathcal{A}u_* - f\|_F = J_* \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots, \tag{5.1}$$

$$m_k \to \|\mathcal{A}u_* - f\|_F \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{5.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая компонента $u_\star$ седловой точки $(u_\star, \lambda_\star, \mu_\star)$ функции Лагранжа (1.9) из условия A1 является оптимальным решением задачи (1.1), (1.2). Тогда для точек $u_k^- \in U_0^- \subset U_0$, являющихся первыми компонентами элементов $v_k^-$ из (2.4), получим

$$\begin{aligned} J_*^2 = \|\mathcal{A}u_\star - f\|_F^2 = L(u_\star\,; \lambda_\star\,, \mu_\star) \leqslant L(u_k^-\,; \lambda_\star\,, \mu_\star) \\ = \|\mathcal{A}u_k^- - f\|_F^2 + \langle \lambda_\star\,, \mathcal{B}u_k^- - g\rangle_G + \mu_\star \left(\|\mathcal{Q}u_k^- - w\|_W^2 - R^2\right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Используя далее неравенства Коши — Буняковского и треугольника вместе с оценками погрешностей (1.5), (1.6) и априорной оценкой нормы множителей Лагранжа (3.1), извлекаем из (5.3) заявленную оценку (5.1).

Для доказательства свойства (5.2) сначала докажем сходимость $\|v_k^- - v_{*k}^-\|_{V^-} \to 0$, где $v_{*k}^-$ — седловые точки функций Тихонова (4.1). Введем обозначения

$$V^- = H^- \times G \times \mathbb{R}, \quad V_0^- = U_0^- \times G \times \mathbb{R}_+ \tag{5.4}$$

и заметим, что для точек $v_{*k}^-$ верно следующее вариационное неравенство:

$$\langle \nabla_\pm T_k^-(v_{*k}^-), v - v_{*k}^-\rangle_{V^-} \geqslant 0 \quad \forall\, v \in V_0^-\,. \tag{5.5}$$

Запишем вариационное неравенство, характеризующее в (2.4) проекцию:

$$\langle v_{k+1}^- - v_k^- + \beta_k^- \nabla_\pm t_k^-(v_k^-), v - v_{k+1}^-\rangle_{V^-} \geqslant 0 \quad \forall\, v \in V_0^-\,. \tag{5.6}$$

Подставив в (5.5) $v = v_{k+1}^-$, в (5.6) — $v = v_{*k}^-$ и сложив оба неравенства, получим

$$\langle v_{k+1}^- - v_k^-, v_{*k}^- - v_{k+1}^-\rangle_{V^-} + \beta_k^- \langle \nabla_\pm t_k^-(v_k^-) - \nabla_\pm T_k^-(v_{*k}^-), v_{*k}^- - v_{k+1}^-\rangle_{V^-} \geqslant 0. \tag{5.7}$$

Первое слагаемое в левой части (5.7) преобразуем с помощью тождества

$$\langle a - b, c - a\rangle_{V^-} = \frac{1}{2}\,\|b - c\|_{V^-}^2 - \frac{1}{2}\,\|a - c\|_{V^-}^2 - \frac{1}{2}\,\|a - b\|_{V^-}^2\,, \quad a, b, c \in V^-. \tag{5.8}$$

Введем аналогичные (1.9) функции Лагранжа, соответствующие приближенным данным:

$$L_k(u; \lambda, \mu) = \|\mathcal{A}_k u - f_k\|_F^2 + \langle \lambda, \mathcal{B}_k u - g_k\rangle_G + \mu \left(\|\mathcal{Q}_k u - w_k\|_W^2 - R_k^2\right), \tag{5.9}$$

и с учетом (5.8), (5.9) перепишем оценку (5.7) в виде

$$\begin{aligned}(1+2\alpha_k^-\beta_k^-)\|v_{*k}^- - v_{k+1}^-\|_{V^-}^2 + (1-2\alpha_k^-\beta_k^-)\|v_k^- - v_{k+1}^-\|_{V^-}^2 \\ \leqslant (1-2\alpha_k^-\beta_k^-)\|v_{*k}^- - v_k^-\|_{V^-}^2 + 2\beta_k^-\langle\nabla_\pm L_k(v_k^-) - \nabla_\pm L_k(v_{*k}^-), v_{*k}^- - v_{k+1}^-\rangle_{V^-} \\ + 2\beta_k^-\langle\nabla_\pm L_k(v_{*k}^-) - \nabla_\pm L(v_{*k}^-), v_{*k}^- - v_{k+1}^-\rangle_{V^-}\,. \qquad (5.10)\end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части (5.10) может быть оценено следующим образом:

$$\begin{aligned}2\beta_k^-\langle\nabla_\pm L_k(v_k^-) - \nabla_\pm L_k(v_{*k}^-), v_{*k}^- - v_{k+1}^-\rangle_{V^-} \\ \leqslant \Big(\frac{1}{2} + K_{1k}^-\left(\beta_k^-\right)^{\gamma^-} + \sqrt{2}\beta_k^-\|\mathcal{A}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to F)}\Big)\|v_{k+1}^- - v_k^-\|_{V^-}^2 \\ + K_{2k}^-\left(\beta_k^-\right)^{2-\gamma^-}\|v_k^- - v_{*k}^-\|_{V^-}^2 + \left(\beta_k^-\sigma_k\right)^2, \qquad (5.11)\end{aligned}$$

где $\quad K_{1k}^- = \|\mathcal{Q}_k\left(u_k^- - u_{*k}^-\right)\|_W^2 + \|\mathcal{Q}_k u_k^- - w_k\|_W^2 + 2\mu_k^-\|\mathcal{Q}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to W)}^2\,,$

$$K_{2k}^- = 16\|\mathcal{Q}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to W)}^2\|\mathcal{Q}_k u_{*k}^- - w_k\|_W^2 + 5\|\mathcal{Q}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to W)}^2 + 7\|\mathcal{B}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to G)}^2 + 4\alpha_k^-\|\mathcal{B}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to G)}\,.$$

В силу леммы 1 и второго предельного соотношения из (3.2) величины $K_{2k}^-$ ограничены, а для $K_{1k}^-$, как несложно показать с помощью той же леммы, имеется априорная оценка $K_{1k}^- \leqslant C(\|u_k^-\|_{H^-}^2 + \mu_k^- + 1)$. Третье слагаемое из правой части (5.10) оценим так:

$$2\beta_k^-\langle\nabla_\pm L_k(v_{*k}^-) - \nabla_\pm L(v_{*k}^-), v_{*k}^- - v_{k+1}^-\rangle_{V^-} \leqslant K_{3k}^-\left(\beta_k^-\right)^2\|v_{k+1}^- - v_{*k}^-\|_{V^-}^2 + h_k^- + \sigma_k\,, \qquad (5.12)$$

где значения $K_{3k}^-$ ограничены (по тем же причинам, что и $K_{2k}^-$) и имеют вид

$$\begin{aligned}K_{3k}^- = h_k^-\Big((\sqrt{2}\|\mathcal{A}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to F)} + \sqrt{2}\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H^-\to F)} + 1 \\ + \|\mathcal{Q}u_{*k}^- - w - \mathcal{Q}_k u_{*k}^- + w_k\|_W)\|u_{*k}^-\|_{H^-} + \sqrt{2}\|f\|_F + \|\lambda_{*k}^-\|_G \\ + 2\mu_{*k}^-(\|\mathcal{Q}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to W)} + \|\mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H^-\to W)})\|u_{*k}^-\|_{H^-} + 2\mu_{*k}^-\|w\|_W\Big)^2 \\ + \sigma_k\Big(\sqrt{2}\|\mathcal{A}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to F)} + 2\mu_{*k}^-\|\mathcal{Q}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to W)} + 1 + \|u_{*k}^-\|_{H^-} + 2\mu_{*k}^-\|w\|_W + R_k + R\Big)^2.\end{aligned}$$

Собирая вместе оценки (5.10)–(5.12), получим неравенство

$$\begin{aligned}\left(1+2\alpha_k^-\beta_k^- - K_{3k}^-\left(\beta_k^-\right)^2\right)\|v_{*k}^- - v_{k+1}^-\|_{V^-}^2 \\ + \Big(\frac{1}{2} - 2\alpha_k^-\beta_k^- - K_{1k}^-\left(\beta_k^-\right)^{\gamma^-} - \sqrt{2}\beta_k^-\|\mathcal{A}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to F)}\Big)\|v_k^- - v_{k+1}^-\|_{V^-}^2 \\ \leqslant \left(1-2\alpha_k^-\beta_k^- + K_{2k}^-\left(\beta_k^-\right)^{2-\gamma^-}\right)\|v_{*k}^- - v_k^-\|_{V^-}^2 + \left(\beta_k^-\sigma_k\right)^2 + h_k^- + \sigma_k\,. \qquad (5.13)\end{aligned}$$

Наложим на параметры $\beta_k^-$ ограничения

$$K_{3k}^-\beta_k^- \leqslant 2\alpha_k^-,\;\; \beta_k^-\left(2\alpha_k^- + \sqrt{2}\|\mathcal{A}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to F)}\right) \leqslant 1/4,\;\; K_{1k}^-\left(\beta_k^-\right)^{\gamma^-} \leqslant 1/4,\;\; K_{2k}^-\left(\beta_k^-\right)^{1-\gamma^-} \leqslant \alpha_k^-,$$

которые заведомо будут выполнены, если в предположении А5 взять

$$C_{1k}^- = \max\left\{\left(K_{2k}^-\right)^{1/(1-\gamma^-)},\; 0.5\,K_{3k}^-(\alpha_k^-)^{\gamma^-/(1-\gamma^-)}\right\},$$

$$C_{2k}^- = \max\left\{4K_{1k}^-,\; \left(8\alpha_k^- + 4\sqrt{2}\|\mathcal{A}_k\|_{\mathcal{L}(H^-\to F)}\right)^{\gamma^-},\; 1\right\},$$

и перейдем от (5.13) к оценке

$$\|v_{*k}^- - v_{k+1}^-\|_{V^-}^2 \leqslant \bigl(1 - \alpha_k^- \beta_k^-\bigr) \|v_{*k}^- - v_k^-\|_{V^-}^2 + \bigl(\beta_k^- \sigma_k\bigr)^2 + h_k^- + \sigma_k\,. \tag{5.14}$$

Для оценки уклонения $\|v_{*k+1}^- - v_{*k}^-\|$ запишем неравенства, являющиеся следствиями вариационных неравенств, аналогичных (5.5) и (5.6):

$$\langle \nabla_\pm T_k^-(v_{*k}^-), v_{*k+1}^- - v_{*k}^-\rangle_{V^-} \geqslant 0, \quad \langle \nabla_\pm T_{k+1}^-(v_{*k+1}^-), v_{*k}^- - v_{*k+1}^-\rangle_{V^-} \geqslant 0. \tag{5.15}$$

С учетом вида (4.1) функций Тихонова имеем оценку

$$\langle \nabla_\pm T_k^-(v_{*k+1}^-) - \nabla_\pm T_k^-(v_{*k}^-), v_{*k+1}^- - v_{*k}^-\rangle_{V^-} \geqslant 2\alpha_k^- \|v_{*k}^- - v_{*k+1}^-\|_{V^-}^2\,. \tag{5.16}$$

Из (5.15), (5.16) с помощью неравенства Коши — Буняковского получаем соотношения

$$\begin{aligned} 2\alpha_k^- \|v_{*k}^- - v_{*k+1}^-\|_{V^-}^2 &\leqslant \langle \nabla_\pm T_k^-(v_{*k+1}^-) - \nabla_\pm T_{k+1}^-(v_{*k+1}^-), v_{*k+1}^- - v_{*k}^-\rangle_{V^-} \\ = 2\langle \alpha_k^- v_{*k+1}^- - \alpha_{k+1}^- v_{*k+1}^-, v_{*k+1}^- - v_{*k}^-\rangle_{V^-} &\leqslant 2|\alpha_{k+1}^- - \alpha_k^-| \|v_{*k+1}^-\|_{V^-} \|v_{*k+1}^- - v_{*k}^-\|_{V^-}\,, \end{aligned} \tag{5.17}$$

из которых с помощью свойства (4.3) извлекается оценка

$$\|v_{*k}^- - v_{*k+1}^-\|_{V^-} \leqslant C\,\frac{|\alpha_{k+1}^- - \alpha_k^-|}{\alpha_k^- \sqrt{\alpha_{k+1}^-}} \leqslant C\,\frac{|\alpha_{k+1}^- - \alpha_k^-|}{\bigl(\alpha_k^-\bigr)^{3/2}}\,, \tag{5.18}$$

в которой во втором неравенстве была использована сходимость $\alpha_{k+1}^-/\alpha_k^- \to 1$, являющаяся следствием первого и последнего соотношений из (3.2), а также ограниченности значений $\beta_k^-$. Используя вместе с (5.14), (5.18) элементарную оценку

$$\|v_{*k+1}^- - v_{k+1}^-\|_{V^-}^2 \leqslant \bigl(1 + 2\alpha_k^- \beta_k^-\bigr) \|v_{*k}^- - v_{k+1}^-\|_{V^-}^2 + \Bigl(1 + \frac{1}{2\alpha_k^- \beta_k^-}\Bigr) \|v_{*k+1}^- - v_{*k}^-\|_{V^-}^2$$

и неравенство $\alpha_k^- \beta_k^- \leqslant 1/8$, придем к итоговой оценке

$$\|v_{*k+1}^- - v_{k+1}^-\|_{V^-}^2 \leqslant (1 - \xi_k^-) \|v_{*k+1}^- - v_{k+1}^-\|_{V^-}^2 + \zeta_k^-\,,$$

в которой

$$\xi_k^- = \alpha_k^- \beta_k^-\,, \quad \zeta_k^- = \frac{17}{4}\Bigl((\beta_k^- \sigma_k)^2 + h_k^- + \sigma_k + C\,(\alpha_{k+1}^- - \alpha_k^-)^2 / \bigl((\alpha_k^-)^4 \beta_k^-\bigr)\Bigr).$$

Применяя лемму 2.6.6 из [8, с. 107], условия которой выполняются в силу предположений A4–A6, получаем заявленную сходимость $\|v_k^- - v_{*k}^-\|_{V^-} \to 0$ и, в частности, сходимость $\|u_k^- - u_{*k}^-\|_{H^-} \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда, принимая во внимание оценку

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_k u_k^- - f_k\|_F + h_k^- \|u_k^-\|_{H^-} + \sigma_k &\leqslant \|\mathcal{A} u_{*k}^- - f\|_F + \|\mathcal{A}_k\|_{\mathcal{L}(H^- \to F)} \|u_k^- - u_{*k}^-\|_{H^-} \\ &+ h_k^- \|u_{*k}^-\|_{H^-} + 2h_k^- \|u_k^- - u_{*k}^-\|_{H^-} + \sigma_k\,, \end{aligned}$$

условия (3.2) и свойства (4.2), (4.3), имеем предельное соотношение

$$\varlimsup_{k\to\infty} \bigl(\|\mathcal{A}_k u_k^- - f_k\|_F + h_k^- \|u_k^-\|_{H^-} + \sigma_k\bigr) \leqslant \|\mathcal{A} u_* - f\|_F\,. \tag{5.19}$$

Аналогичные оценки для операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{Q}$ приведут к предельным соотношениям

$$\lim_{k\to\infty} \bigl(\|\mathcal{B}_k u_k^- - g_k\|_G + h_k^- \|u_k^-\|_{H^-} + \sigma_k\bigr) = 0, \quad \varlimsup_{k\to\infty} \bigl(\|\mathcal{Q}_k u_k^- - w_k\|_W + h_k^- \|u_k^-\|_{H^-} + \sigma_k\bigr) \leqslant R,$$

которые вместе с (5.19) дают верхнюю предельную оценку для значений $m_k^2$ из (2.2)

$$\varlimsup_{k\to\infty} m_k^2 \leqslant \|\mathcal{A} u_* - f\|_F^2\,. \tag{5.20}$$

Утверждение (5.2) следует из (5.20) и уже полученной оценки (5.1).

Лемма доказана.

Сформулируем основное утверждение данного раздела о сходимости к нижней грани.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия* A1–A6 *и* $u_*$ *— некоторое решение задачи* (1.1), (1.2). *Тогда определенная в* (2.3) *последовательность* $d_k$ *обладает свойством доминирования* (4.10) *и, кроме того,*

$$\left|d_{k+1}^2 - d_k^2\right| \leqslant \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{5.21}$$

$$d_k \to \|\mathcal{A}u_* - f\|_F \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{5.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства свойства (4.10) воспользуемся методом математической индукции, базу которой дает цепочка $d_0 = m_0 \geqslant \|\mathcal{A}u_* - f\|_F$, верная по определению значения $d_0$ и в силу (5.1). Далее предполагаем, что $d_{k-1} \geqslant \|\mathcal{A}u_* - f\|_F$, и рассматриваем два случая. Если $d_{k-1} \leqslant m_k$, то из (2.3) имеем $d_k^2 \geqslant d_{k-1}^2 \geqslant \|\mathcal{A}u_* - f\|_F^2$. Если же $d_{k-1} > m_k$, то из (2.3) следует, что

$$d_k^2 = d_{k-1}^2 - \min\left\{\varepsilon_{k-1}, \left|m_k^2 - d_{k-1}^2\right|\right\} \geqslant d_{k-1}^2 - |m_k^2 - d_{k-1}^2| = m_k^2 \overset{(5.1)}{\geqslant} \|\mathcal{A}u_* - f\|_F^2 .$$

Таким образом, свойство доминирования (4.10) доказано.

Неравенства (5.21) непосредственно следуют из правила (2.3) вычисления значений $d_k^2$.

Для доказательства сходимости (5.22) будем рассуждать от противного, учитывая, что свойство (4.10) уже установлено. Пусть существуют $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность номеров $k$, для которых выполнено условие строгой отделимости от $J_*^2$:

$$d_k^2 \geqslant \|\mathcal{A}u_* - f\|_F^2 + 2\varepsilon. \tag{5.23}$$

В то же время из (5.2) следует существование такого достаточно большого номера $k_0$, что

$$m_k^2 \leqslant \|\mathcal{A}u_* - f\|_F^2 + \varepsilon \quad \forall\, k \geqslant k_0 . \tag{5.24}$$

Учитывая (5.24), устанавливаем, что если при некотором $k = k_1 \geqslant k_0$ выполнено неравенство (5.23), то оно будет выполнено *для всех* номеров $k \geqslant k_1$. Комбинируя (5.23) и (5.24), получаем отделимость $m_k$ от $d_{k-1}$: $|m_k^2 - d_{k-1}^2| = d_{k-1}^2 - m_k^2 \geqslant \varepsilon$ при $k \geqslant k_1$. В соответствии с (3.3) $\varepsilon_k \to 0$, поэтому для всех достаточно больших $k \geqslant k_2$ значения $d_k^2$ в (2.3) будут вычисляться по правилу

$$d_k^2 = d_{k-1}^2 - \varepsilon_{k-1} \quad \forall\, k \geqslant k_2 . \tag{5.25}$$

По условию (3.5) ряд из $\varepsilon_k$ расходится, поэтому существует номер $K > k_2$, для которого

$$\sum_{k=k_2}^{K-1} \varepsilon_k > d_{k_2}^2 - \|\mathcal{A}u_* - f\|_F^2 . \tag{5.26}$$

Суммирование равенств (5.25) от $k_2 + 1$ до $K$ приводит к соотношениям

$$d_K^2 = d_{k_2}^2 - \sum_{k=k_2}^{K-1} \varepsilon_k \overset{(5.26)}{<} d_{k_2}^2 - \left(d_{k_2}^2 - \|\mathcal{A}u_* - f\|_F^2\right) = \|\mathcal{A}u_* - f\|_F^2 ,$$

вступающим в противоречие с (5.23). Тем самым сходимость (5.22) установлена.

Теорема 2 доказана.

## 6. Доказательство основной теоремы

Введем аналогичные (5.4) пространство и множество

$$V^+ = H \times F \times W \times G^+ \times \mathbb{R}^2, \quad V_0^+ = U_0 \times F \times W \times G^+ \times \mathbb{R}_+^2$$

и докажем сходимость $\|v_k^+ - v_{*k}^+\|_{V^+} \to 0$. Сначала получим аналогичную (5.10) оценку

$$
\begin{aligned}
(1 + 2\alpha_k^+\beta_k^+)\|v_{*k}^+ - v_{k+1}^+\|_{V^+}^2 + (1 - 2\alpha_k^+\beta_k^+)\|v_k^+ - v_{k+1}^+\|_{V^+}^2 \\
\leqslant (1 - 2\alpha_k^+\beta_k^+)\|v_{*k}^+ - v_k^+\|_{V^+}^2 + 2\beta_k^+\langle \nabla_\pm l_k(v_k^+) - \nabla_\pm l_k(v_{*k}^+), v_{*k}^+ - v_{k+1}^+\rangle_{V^+} \\
+ 2\beta_k^+\big\langle \nabla_\pm l_k(v_{*k}^+) - \nabla_\pm L_k^+(v_{*k}^+), v_{*k}^+ - v_{k+1}^+\big\rangle_{V^+}
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

с функцией $L_k^+(v)$ из (4.9) и ее приближенным аналогом

$$
\begin{aligned}
l_k(v) = l_k(u,\psi,\varphi;\lambda,\mu_1,\mu_2) = \|\mathcal{A}_k u - f_k - \psi\|_{F^+}^2 + \|\mathcal{Q}_k u - w_k - \varphi\|_{W^+}^2 \\
+ \langle \lambda, \mathcal{B}_k u - g_k\rangle_{G^+} + \mu_1\left(\|\psi\|_F^2 - d_k^2\right) + \mu_2\left(\|\varphi\|_W^2 - R_k^2\right).
\end{aligned}
$$

Второе слагаемое в правой части (6.1) может быть оценено аналогично (5.11):

$$
\begin{aligned}
2\beta_k^+\big\langle \nabla_\pm l_k(v_k^+) - \nabla_\pm l_k(v_{*k}^+), v_{*k}^+ - v_{k+1}^+\big\rangle_{V^+} \\
\leqslant \big(0.5 + K_{1k}^+\big(\beta_k^+\big)^{\gamma^+} + \beta_k^+ K_{\mathcal{A}k}^+\big)\|v_{k+1}^+ - v_k^+\|_{V^+}^2 \\
+ K_{2k}^+\left(\beta_k^+\right)^{2-\gamma^+}\|v_k^+ - v_{*k}^+\|_{V^+}^2 + \left(\beta_k^+\sigma_k^+\right)^2.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Выражения для $K_{1k}^+$, $K_{2k}^+$ и $K_{\mathcal{A}k}^+$ имеют вид

$$
K_{1k}^+ = \|\psi_k^+ - \psi_{*k}^+\|_F^2 + \|\varphi_k^+ - \varphi_{*k}^+\|_W^2 + \|\psi_k^+\|_F^2 + \|\varphi_k^+\|_W^2 + 2\mu_{1k}^+ + 2\mu_{2k}^+,
$$

$$
K_{2k}^+ = 16\|\psi_{*k}^-\|_F^2 + 16\|\varphi_{*k}^-\|_W^2 + 10 + 7\|\mathcal{B}_k\|_{\mathcal{L}(H\to G^+)}^2 + 4\alpha_k^+\|\mathcal{B}_k\|_{\mathcal{L}(H\to G^+)},
$$

$$
K_{\mathcal{A}k}^+ = 2\max{}^{1/2}\Big\{\|\mathcal{A}_k\|_{\mathcal{L}(H\to F^+)}^2 + \|\mathcal{Q}_k\|_{\mathcal{L}(H\to W^+)}^2,\ \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{L}(F\to F^+)}^2,\ \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{L}(W\to W^+)}^2\Big\},
$$

где $\mathcal{I}$ — единичный оператор. В силу леммы 2 и требований (1.7) величины $K_{2k}^+$ и $K_{\mathcal{A}k}^+$ являются ограниченными, а рост $K_{1k}^+$ можно оценить: $K_{1k}^+ \leqslant C(\|\psi_k^+\|_F^2 + \|\varphi_k^+\|_W^2 + \mu_{1k}^+ + \mu_{2k}^+ + 1)$. Оценка для третьего слагаемого из правой части (6.1) аналогична (5.12):

$$
2\beta_k^+\langle \nabla_\pm l_k(v_{*k}^+) - \nabla_\pm L_k(v_{*k}^+), v_{*k}^+ - v_{k+1}^+\rangle_{V^+} \leqslant K_{3k}^+\left(\beta_k^+\right)^2\|v_{k+1}^+ - v_{*k}^+\|_{V^+}^2 + h_k^+ + \sigma_k^+ + \sigma_k, \tag{6.3}
$$

где

$$
\begin{aligned}
K_{3k}^+ = h_k^+\Big[(K_{\mathcal{A}k}^+ + K_{\mathcal{A}}^+ + 2)\|v_{*k}^+\|_{V^+} + \left(2\|f\|_{F^+}^2 + 2\|w\|_{W^+}^2\right)^{1/2} + 4\mu_{1*k}^+\|\psi_{*k}^+\|_F + 4\mu_{2*k}^+\|\varphi_{*k}^+\|_W\Big]^2 \\
+ \sigma_k^+\Big[K_{\mathcal{A}k}^+ + 2\mu_{1*k}^+ + 2\mu_{2*k}^+ + 1 + \|v_{*k}^+\|_{V^+} + R_k + R\Big]^2 + \sigma_k(R_k + R)^2,
\end{aligned}
$$

$$
K_{\mathcal{A}}^+ = 2\max{}^{1/2}\left\{\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H\to F^+)}^2 + \|\mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H\to W^+)}^2,\ \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{L}(F\to F^+)}^2,\ \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{L}(W\to W^+)}^2\right\}.
$$

Заметим, что значения $K_{3k}^+$ являются ограниченными в силу леммы 2 и условий (1.5), (1.7). Используя (6.2), (6.3), извлечем из (6.1) следствие

$$
\begin{aligned}
\big(1 + 2\alpha_k^+\beta_k^+ - K_{3k}^+\left(\beta_k^+\right)^2\big)\|v_{*k}^+ - v_{k+1}^+\|_{V^+}^2 \\
+ \big(0.5 - 2\alpha_k^+\beta_k^+ - K_{1k}^+\left(\beta_k^+\right)^{\gamma^+} - \beta_k^+ K_{\mathcal{A}k}^+\big)\|v_k^+ - v_{k+1}^+\|_{V^+}^2 \\
\leqslant \big(1 - 2\alpha_k^+\beta_k^+ + K_{2k}^+\left(\beta_k^+\right)^{2-\gamma^+}\big)\|v_{*k}^+ - v_k^+\|_{V^+}^2 + \left(\beta_k^+\sigma_k^+\right)^2 + h_k^+ + \sigma_k^+ + \sigma_k.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Наложим на параметры $\beta_k^+$ ограничения

$$
K_{3k}^+\beta_k^+ \leqslant 2\alpha_k^+, \quad \beta_k^+\left(2\alpha_k^+ + K_{\mathcal{A}k}^+\right) \leqslant 1/4, \quad K_{1k}^+\left(\beta_k^+\right)^{\gamma^+} \leqslant 1/4, \quad K_{2k}^+\left(\beta_k^+\right)^{1-\gamma^+} \leqslant \alpha_k^+, \tag{6.5}
$$

которые заведомо будут выполнены, если в условии A5 взять

$$
\begin{gathered}
C_{1k}^{+}=\max \left\{\left(K_{2k}^{+}\right)^{1/(1-\gamma^{+})}, 0.5\, K_{3k}^{+}(\alpha_{k}^{+})^{\gamma^{+}/(1-\gamma^{+})}\right\}, \\
C_{2k}^{+}=\max \left\{4K_{1k}^{+}, \left(8\alpha_{k}^{+}+4K_{\mathcal{A}k}^{+}\right)^{\gamma^{+}}, 1\right\}.
\end{gathered} \tag{6.6}
$$

Из (6.4) с учетом требований (6.5) выводим неравенство

$$
\|v_{*k}^{+}-v_{k+1}^{+}\|_{V^{+}}^{2} \leqslant \left(1-\alpha_{k}^{+}\beta_{k}^{+}\right)\|v_{*k}^{+}-v_{k}^{+}\|_{V^{+}}^{2}+\left(\beta_{k}^{+}\sigma_{k}^{+}\right)^{2}+h_{k}^{+}+\sigma_{k}^{+}+\sigma_{k}\,.
$$

Для оценки норм $\|v_{*k}^{+}-v_{*k+1}^{+}\|_{V^{+}}$ используются соотношения, подобные (5.15), (5.16):

$$
\langle\nabla_{\pm}T_{k}^{+}(v_{*k}^{+}), v_{*k+1}^{+}-v_{*k}^{+}\rangle_{V^{+}} \geqslant 0, \quad \langle\nabla_{\pm}T_{k+1}^{+}(v_{*k+1}^{+}), v_{*k}^{+}-v_{*k+1}^{+}\rangle_{V^{+}} \geqslant 0, \tag{6.7}
$$

$$
\langle\nabla_{\pm}T_{k}^{+}(v_{*k+1}^{+})-\nabla_{\pm}T_{k}^{+}(v_{*k}^{+}), v_{*k+1}^{+}-v_{*k}^{+}\rangle_{V^{+}} \geqslant 2\alpha_{k}^{+}\|v_{*k}^{+}-v_{*k+1}^{+}\|_{V^{+}}^{2}\,. \tag{6.8}
$$

Складывая (6.7) с (6.8), имеем

$$
2\alpha_{k}^{+}\|v_{*k}^{+}-v_{*k+1}^{+}\|_{V^{+}}^{2} \leqslant \langle\nabla_{\pm}T_{k}^{+}(v_{*k+1}^{+})-\nabla_{\pm}T_{k+1}^{+}(v_{*k+1}^{+}), v_{*k+1}^{+}-v_{*k}^{+}\rangle_{V^{+}}\,. \tag{6.9}
$$

После подстановки в (6.9) выражения для $T_{k}^{+}(v)$ из (4.8) получим неравенство, в правой части которого появляется дополнительное по сравнению с (5.17) слагаемое:

$$
\begin{aligned}
&\langle\nabla_{\pm}T_{k}^{+}(v_{*k+1}^{+})-\nabla_{\pm}T_{k+1}^{+}(v_{*k+1}^{+}), v_{*k+1}^{+}-v_{*k}^{+}\rangle_{V^{+}} \\
&=2\langle\alpha_{k}^{+}v_{*k+1}^{+}-\alpha_{k+1}^{+}v_{*k+1}^{+}, v_{*k+1}^{+}-v_{*k}^{+}\rangle_{V^{+}}+\left(d_{k}^{2}-d_{k+1}^{2}\right)\left(\mu_{1*k+1}^{+}-\mu_{1*k}^{+}\right) \\
&\leqslant 2|\alpha_{k+1}^{+}-\alpha_{k}^{+}|\|v_{*k+1}^{+}\|_{V^{+}}\|v_{*k+1}^{+}-v_{*k}^{+}\|_{V^{+}}+\varepsilon_{k}\|v_{*k+1}^{+}-v_{*k}^{+}\|_{V^{+}}\,.
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

Из (6.9), (6.10) и (4.11) получаем нужную нам оценку для норм:

$$
\|v_{*k}^{+}-v_{*k+1}^{+}\|_{V^{+}} \leqslant \frac{|\alpha_{k+1}^{+}-\alpha_{k}^{+}|}{\alpha_{k}^{+}}\|v_{*}^{+}\|_{V^{+}}+\frac{\varepsilon_{k}}{2\alpha_{k}^{+}}\,. \tag{6.11}
$$

Используя (6.6), (6.11), а также вспомогательные неравенства $\alpha_{k}^{+}\beta_{k}^{+} \leqslant 1/8$ и

$$
\|v_{*k+1}^{+}-v_{k+1}^{+}\|_{V^{+}}^{2} \leqslant \left(1+2\alpha_{k}^{+}\beta_{k}^{+}\right)\|v_{*k}^{+}-v_{k+1}^{+}\|_{V^{+}}^{2}+\left(1+\frac{1}{2\alpha_{k}^{+}\beta_{k}^{+}}\right)\|v_{*k+1}^{+}-v_{*k}^{+}\|_{V^{+}}^{2}\,,
$$

придем к итоговой оценке

$$
\|v_{*k+1}^{+}-v_{k+1}^{+}\|_{V^{+}}^{2} \leqslant (1-\xi_{k}^{+})\|v_{*k+1}^{+}-v_{k+1}^{+}\|_{V^{+}}^{2}+\zeta_{k}^{+}\,,
$$

в которой

$$
\xi_{k}^{+}=\alpha_{k}^{+}\beta_{k}^{+}\,, \quad \zeta_{k}^{+}=\frac{17}{4}\left(\left(\beta_{k}^{+}\sigma_{k}^{+}\right)^{2}+h_{k}^{+}+\sigma_{k}^{+}+\sigma_{k}+\frac{(\alpha_{k+1}^{+}-\alpha_{k}^{+})^{2}}{\left(\alpha_{k}^{+}\right)^{3}\beta_{k}^{+}}\|v_{*}^{+}\|_{V^{+}}^{2}+\frac{\varepsilon_{k}^{2}}{4\left(\alpha_{k}^{+}\right)^{3}\beta_{k}^{+}}\right).
$$

Применяя лемму 2.6.6 из [8, с. 107], получаем заявленную сходимость $\|v_{k}^{+}-v_{*k}^{+}\|_{V^{+}} \to 0$, которая вместе с установленным в лемме 4 свойством $\|v_{*k}^{+}-v_{*}^{+}\|_{V^{+}} \to 0$ означает наличие сходимости

$$
\|v_{k}^{+}-v_{*}^{+}\|_{V^{+}} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,
$$

из которой, в частности, следует и предельное соотношение (3.7).

Теорема 1 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
2. **Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
3. **Бакушинский А.Б.** Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанные на принципе итеративной регуляризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1977. Т. 17, № 6. С. 1350–1362.
4. **Васильев Ф.П., Ячимович М.Д.** Об итеративной регуляризации метода условного градиента и метода Ньютона при неточно заданных исходных данных // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250, № 2. С. 265–269.
5. **Сумин М.И.** Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 4. С. 602–625.
6. **Васильев Ф.П., Потапов М.М., Артемьева Л.А.** Регуляризованный экстраградиентный метод в многокритериальных задачах управления с неточными данными // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 11. С. 1555–1567. doi: 10.1134/S037406411611011X .
7. **Дряженков А.А.** Модифицированный обобщенный метод невязки для задач минимизации с погрешностями известного уровня в ослабленных нормах // Вычисл. методы и программирование. 2015. Т. 16. С. 456–463. doi: 10.26089/NumMet.v16r443 .
8. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: в 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011. 1053 с.
9. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.


Поступила 19.02.2021
После доработки 3.03.2021
Принята к публикации 15.03.2021

Артемьева Людмила Анатольевна
канд. физ.-мат. наук, ассистент
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: artemieva.luda@gmail.com

Дряженков Андрей Александрович
канд. физ.-мат. наук, младший науч. сотрудник
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: andrja@yandex.ru

Потапов Михаил Михайлович
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: mmpotapovrus@gmail.com

## REFERENCES


1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1986, 288 p.
2. Bakushinskii A.B., Goncharskii A.V. *Iterativnye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Iterative methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1989, 128 p. ISBN: 5-02-013960-2 .
3. Bakushinskii A.B. Methods for solving monotonic variational inequalities, based on the principle of iterative regularization. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1977, vol. 17, no. 6, pp. 12–24. doi: 10.1016/0041-5553(77)90167-7 .
4. Vasil'ev F.P., Jaćimović M.D. On iterative regularization of the conditional gradient method and Newton's method for imprecisely assigned initial data. *Sov. Math., Dokl.*, 1980, vol. 21, pp. 43–47.

5. Sumin M.I. Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 4, pp. 579–600. doi: 10.1134/S0965542507040045 .
6. Vasil'ev F.P., Potapov M.M., Artem'eva L.A. Regularized extragradient method in multicriteria control problems with inaccurate data. *Diff. Eq.*, 2016, vol. 52, no. 11, pp. 1504–1516. doi: 10.1134/S0012266116110112 .
7. Dryazhenkov A.A. A modified generalized residual method for minimization problems with errors of a known level in weakened norms. *Num. Meth. Prog.*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 456–463 (in Russian). doi: 10.26089/NumMet.v16r443 .
8. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: MTsNMO Publ., 2011. Vol. 1: 620 p., ISBN: 978-5-94057-707-2 ; Vol. 2: 433 p., ISBN: 978-5-94057-708-9 .
9. Ekeland I., Temam R. *Convex analysis and variational problems.* N Y: Elsevier publishing company, 1976, 399 p. ISBN: 9780080875224 . Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz i variatsionnye problemy.* Moscow: Mir Publ., 1979, 400 p.

Received February 19, 2021
Revised March 3, 2021
Accepted March 15, 2021

**Funding Agency:** This work was supported by the Russian President's grant no. MK-3566.2019.1.

*Liudmila Anatolievna Artemieva,* Cand. Phys.-Math. Sci., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: artemieva.luda@gmail.com .

*Andrey Alexandrovich Dryazhenkov,* Cand. Phys.-Math. Sci., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: andrja@yandex.ru .

*Mikhail Mikhailovich Potapov,* Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: mmpotapovrus@gmail.com .

Cite this article as: L. A. Artem'eva, A. A. Dryazhenkov, M. M. Potapov. On a quadratic minimization problem with nonuniform perturbations in the criteria and constraints, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 19–34 .