ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

К ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ВОЗМУЩЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Л. Розенберг

Задача реконструкции неизвестного возмущения в системе обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида исследуется с позиций подхода теории динамического обращения. Рассматривается постановка, в которой реконструкция возмущения проводится синхронно с развитием процесса на основе неточной дискретной информации о части координат фазовой траектории. Предлагается конечношаговый программно реализуемый алгоритм решения, основанный на методе вспомогательных позиционно управляемых моделей, выписана оценка его точности. Приведен иллюстрирующий пример. Новизна статьи состоит в рассмотрении обратной задачи для частично наблюдаемой системы с нелинейным по возмущению уравнением, описывающим динамику неизмеряемой координаты.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейность по возмущению, дефицит информации, динамическое восстановление, управляемая модель.

V. L. Rozenberg. On a problem of dynamic disturbance reconstruction in a nonlinear system of differential equations.

The problem of reconstructing an unknown disturbance in a system of ordinary differential equations of a special kind is investigated on the basis of the approach of the theory of dynamic inversion. A statement is considered in which the disturbance is reconstructed synchronously with the process from incomplete discrete information on a part of coordinates of the phase trajectory. A finite-step software-oriented solution algorithm based on the method of auxiliary closed-loop models is proposed, and its error is estimated. The novelty of the paper is that we consider the inverse problem for a partially observed system with a nonlinear with respect to disturbance equation describing the dynamics of the unmeasured coordinate.

Keywords: system of ordinary differential equations, nonlinearity with respect to disturbance, lack of information, dynamic reconstruction, controlled model.

MSC: 9K15, 93C41

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-197-207

Введение

Рассматриваемая задача реконструкции неизвестного возмущения в системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) специального вида на основе неполной и неточной информации о фазовом состоянии вкладывается в проблематику обратных задач динамики управляемых систем. Это направление интенсивно развивается в рамках общей теории идентификации благодаря многочисленным приложениям. Первые публикации относятся к 60-м годам прошлого века [1; 2], когда были получены некоторые критерии однозначной разрешимости обратных задач и непрерывной зависимости “вход/выход” для линейных систем ОДУ. Обратные задачи динамики, как правило, являются некорректными и требуют применения регуляризирующих процедур. Большое количество работ посвящено апостериорным подходам к построению регуляризирующих алгоритмов решения различных задач оценивания параметров динамической системы на основе всей предыстории измерений ее выхода. Отметим некоторые источники. Классическая монография [3] фактически содержит введение в теорию идентификации. В работе [4] основное внимание уделяется теоретическому анализу и практическому применению различных методов идентификации нестационарных объектов. Алгоритмы для оценивания переменных входов линейных систем обсуждаются в [5]. Монографии [6; 7] посвящены ключевым аспектам теории обратных и некорректных задач. Решение задачи с помощью аппроксимации по методу наименьших квадратов обсуждается в [8], идеи стохастической оптимизации используются в [9].

В настоящей работе для решения изучаемой задачи используется ставший классическим подход, предложенный и развитый в работах А. В. Кряжимского, Ю. С. Осипова и их коллег (см. [10–12] и библиографию в [12]) и получивший название метода динамического обращения. Он основан на сочетании принципов теории позиционного управления, в первую очередь принципа экстремального прицеливания Н. Н. Красовского [13], и идей теории некорректных задач [6]. Суть подхода состоит в сведении задачи реконструкции к задаче управления по принципу обратной связи вспомогательной динамической системой (моделью), причем адаптация модельного управления к результатам текущих наблюдений обеспечивает требуемую аппроксимацию неизвестного входа синхронно с развитием процесса. Метод динамического обращения многократно применялся для решения задач реконструкции, управления, наведения в различных постановках в системах, описываемых ОДУ, дифференциально-функциональными уравнениями, уравнениями и вариационными неравенствами с распределенными параметрами, стохастическими дифференциальными уравнениями и др. Были созданы устойчивые алгоритмы, работающие для некоторых классов частично наблюдаемых систем [12; 14–16], в которых роль входного сигнала могли играть, к примеру, измерения части координат фазового вектора детерминированного или стохастического уравнения или значения решения на некоторых подмножествах области определения в бесконечномерной задаче. В качестве общей черты рассмотренных систем следует отметить их линейность по управлению/возмущению.

Отличительной особенностью задачи динамической реконструкции в условиях дефицита информации, рассматриваемой в настоящей статье, является нелинейность по возмущению уравнения, описывающего динамику неизмеряемой координаты системы ОДУ третьего порядка. Представляется, что полученные результаты в перспективе будут полезны для исследования разрешимости нелинейных задач в различных постановках.

1. Постановка задачи

Рассматривается нелинейная система ОДУ следующего вида:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1(t) = f_1(t, x(t)) + g_1(t, x(t))u_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = f_2(t, x(t)) + g_2(t, x(t))u_2(t),\\&\dot{x}_3(t) = f_3(t, x(t)) + g_3(t, x(t))u_1(t)u_2(t), \quad x_1(t_0) = x_{10},\ x_2(t_0) = x_{20},\ x_3(t_0) = x_{30}.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $t \in T = [t_0, \vartheta]$, $x(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot), x_3(\cdot)) \in \mathbb{R}^3$ — фазовая траектория системы; $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ — скалярные возмущения, принимающие значения из заданного выпуклого компакта $P \in \mathbb{R}$ и имеющие ограниченную на T вариацию, т. е. $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in U$, $U = \{u(\cdot) \in V(T; \mathbb{R})\colon u(t) \in P \quad \forall t \in T\}$; функции f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2, g_3 являются липшицевыми по совокупности переменных. Дополнительно полагаем, что производные $\dot{x}_1(\cdot)$, $\dot{x}_2(\cdot)$ имеют ограниченную на T вариацию, а функции g_1, g_2 нигде не обращаются в ноль. Решение задачи Коши понимается в смысле Каратеодори.

Обсуждаемая задача состоит в следующем. В дискретные, достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = t_0 + i\delta$, $\delta = (\vartheta - t_0)/l$, $i \in [1 : (l-1)]$, поступает неточная информация о первых двух координатах движения. Полагаем, что начальное состояние системы известно. Результаты измерений, величины $\xi_{1i}, \xi_{2i} \in \mathbb{R}$, удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_{1i} - x_1(\tau_i)| \le h, \quad |\xi_{2i} - x_2(\tau_i)| \le h, \tag{1.2}$$

где $h \in (0, 1)$ — величина погрешности измерений.

Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестных возмущений $u_1(t)$ и $u_2(t)$ по информации ξ_{1i}, ξ_{2i}, $i \in [1\colon (l-1)]$, причем отклонение приближений от реальных входов в метрике пространства $L_2(T)$ должно быть сколь угодно мало при достаточно малом h и специальным образом согласованном с ним шаге временной дискретизации $\delta = \delta(h)$.

Конечношаговый программно реализуемый разрешающий алгоритм основан на идеях работ [10; 14]. В связи с неполнотой информации (в моменты τ_i измеряется не весь фазовый вектор) в модель вводится блок динамической аппроксимации неизвестной координаты $x_3(t)$, который играет роль поставщика информации о текущем полном фазовом состоянии системы. Эта информация оперативно передается на блок, формирующий по закону обратной связи модельное управление, приближающее реальное возмущение. Как было сказано выше, новизна работы состоит в рассмотрении обратной задачи для динамической системы (1.1), в которой возмущение, подлежащее реконструкции и стесненное известными геометрическими ограничениями, нелинейно входит в неизмеряемую компоненту. Именно вид возмущения в уравнении для $x_3(t)$ определяет специфику задачи восстановления.

2. Алгоритм решения

Алгоритм, приведенный ниже, разработан на основе вычислительной процедуры из [14] с учетом специфики системы (1.1). В начальный момент $\tau_0 = t_0$ фиксируется значение h, определяются параметры алгоритма, в том числе величина $l = l(h)$, и строится равномерное разбиение промежутка T с шагом $\delta(h) = (\vartheta - t_0)/l(h)$: $\tau_i \in T$, $\tau_i = t_0 + i\delta(h)$, $i \in [0 : l(h)]$.

Вводится управляемая система-модель, фактически содержащая два блока. Первый блок, идентификатор, используя неточные измерения вида (1.2), аппроксимирует неизмеряемую координату $x_3(t)$ в непрерывной метрике. Второй блок, контроллер, на основе полученной информации о полном фазовом состоянии системы (1.1) вычисляет управления, приближающие искомые возмущения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в метрике пространства $L_2(T)$. Управления, подающиеся на вход модели, вырабатываются в соответствии с законами обратной связи на основе регуляризованного принципа экстремального прицеливания Н. Н. Красовского [13].

В силу сделанных предположений первые два уравнения (1.1) формально могут быть разрешены относительно $u_1(t)$, $u_2(t)$:

$$u_1(t) = \frac{\dot{x}_1(t) - f_1(t, x(t))}{g_1(t, x(t))}, \quad u_2(t) = \frac{\dot{x}_2(t) - f_2(t, x(t))}{g_2(t, x(t))}. \tag{2.1}$$

Фазовый вектор модели обозначим через $w(t)$; он состоит из двух компонент, определяемых их функциями:

(i) три координаты идентификатора $w_{y1}(t)$, $w_{y2}(t)$, $w_z(t)$;

(ii) две координаты контроллера $w_{v1}(t)$, $w_{v2}(t)$.

Динамика модели и ее начальное состояние задаются соотношениями

$$\dot{w}_{y1}(t) = \bar{u}_{1i}, \quad \dot{w}_{y2}(t) = \bar{u}_{2i},$$

$$\dot{w}_z(t) = f_3(\tau_i, \bar{w}(\tau_i)) + G(\tau_i, \bar{w}(\tau_i))\big(\bar{u}_{1i} - f_1(\tau_i, \bar{w}(\tau_i))\big)\big(\bar{u}_{2i} - f_2(\tau_i, \bar{w}(\tau_i))\big),$$

$$\dot{w}_{v1}(t) = f_1(\tau_i, \bar{w}(\tau_i)) + g_1(\tau_i, \bar{w}(\tau_i))v_{1i}, \quad \dot{w}_{v2}(t) = f_2(\tau_i, \bar{w}(\tau_i)) + g_2(\tau_i, \bar{w}(\tau_i))v_{2i},$$

$$w_{y1}(t_0) = x_{10},\ w_{y2}(t_0) = x_{20},\ w_z(t_0) = x_{30},\ w_{v1}(t_0) = x_{10},\ w_{v2}(t_0) = x_{20}. \tag{2.2}$$

Здесь $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i \in [0\colon (l(h) - 1)]$, $\bar{w}(\tau_i) = (\xi_{1i}, \xi_{2i}, w_z(\tau_i))$, $G(\cdot, \cdot) = g_3(\cdot, \cdot)/(g_1(\cdot, \cdot)g_2(\cdot, \cdot))$, $G(t, x(t)) = G(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $G(\tau_i, \bar{w}(\tau_i)) = G(\tau_i, \xi_{1i}, \xi_{2i}, w_z(\tau_i))$. Управляющие воздействия $\bar{u}_{1i}$, $\bar{u}_{2i}$, v_{1i}, v_{2i} вычисляются позиционно в момент τ_i.

Предполагая ограниченность модулей правых частей уравнений системы (1.1) константой $\bar{K}$ (ее существование очевидно), находим величины $\bar{u}_{1i}$ и $\bar{u}_{2i}$ из соотношений

$$\bar{u}_{1i} = \arg\min\left\{2(w_{y1}(\tau_i) - \xi_{1i})u + \bar{\alpha}|u|^2\colon |u| \le \bar{K}\right\},$$

$$\bar{u}_{2i} = \arg\min\left\{2(w_{y2}(\tau_i) - \xi_{2i})u + \bar{\alpha}|u|^2\colon |u| \le \bar{K}\right\}. \tag{2.3}$$

Вторая пара модельных управлений v_{1i} и v_{2i} определяется следующим образом:

$$v_{1i} = \arg\min\left\{2(w_{v1}(\tau_i) - \xi_{1i})g_1(\tau_i, \bar{w}(\tau_i))v + \alpha|v|^2 \colon v \in P\right\},$$

$$v_{2i} = \arg\min\left\{2(w_{v2}(\tau_i) - \xi_{2i})g_2(\tau_i, \bar{w}(\tau_i))v + \alpha|v|^2 \colon v \in P\right\}. \tag{2.4}$$

Здесь $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(h)$ и $\alpha = \alpha(h)$ — параметры регуляризации. Очевидно, из формул (2.3) и (2.4) модельные управления могут быть найдены явно.

Динамика (2.2) выбирается из следующих соображений. Движение компонент $w_{y1}(t)$ и $w_{y2}(t)$ при выборе модельных управлений (2.3) обеспечивает аппроксимацию последними производных $\dot{x}_1(t)$ и $\dot{x}_2(t)$ в метрике пространства $L_2(T)$ (тем самым обрабатывается некорректность задачи численного дифференцирования). Тогда, пользуясь оценкой (1.2) и формальным выражением (2.1) возмущений $u_1(t)$ и $u_2(t)$ из первых двух уравнений исходной системы с заменой $\dot{x}_1(t)$ и $\dot{x}_2(t)$ на $\bar{u}_{1i}$ и $\bar{u}_{2i}$ соответственно, ожидаем близость $w_z(t)$ к $x_3(t)$, что в свою очередь сделает возможным отслеживание компонентами $w_{v1}(t)$ и $w_{v2}(t)$ координат $x_1(t)$ и $x_2(t)$, а также аппроксимацию модельными управлениями (2.4) искомых возмущений.

Выберем функции-регуляризаторы $\bar{\alpha}(h)$, $\alpha(h) : (0,1) \to \mathbb{R}^+$ и семейство разбиений с шагом $\delta(h)$, $h \in (0,1)$, отрезка T со свойствами

$$\delta(h) \to 0, \quad \bar{\alpha}(h) \to 0, \quad \alpha(h) \to 0,$$

$$\bar{\rho}(h) = \Big(\frac{(h+\delta(h))^2}{\bar{\alpha}^2(h)} + \bar{\alpha}(h)\Big)^{1/2}, \quad \bar{\rho}(h) \to 0.$$

$$\rho(h) = \Big(\frac{(h+\delta(h)+\bar{\alpha}(h)+\bar{\rho}(h))^2}{\alpha^2(h)} + \alpha(h)\Big)^{1/2}, \quad \rho(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{2.5}$$

Процесс управления моделью организуем следующим образом. В начальный момент времени t_0 фиксируем h, $\delta(h)$, $\bar{\alpha}(h)$ и $\alpha(h)$. Работа алгоритма разбивается на $l(h)$ однотипных шагов. На i-м шаге, который выполняется на интервале $(\tau_i,\, \tau_{i+1}]$, исходными данными для вычислений служат измерения ξ_{1i}, ξ_{2i} и сформированное к этому моменту состояние модели $w(\tau_i)$. Выполняются следующие операции. Сначала блок-идентификатор вычисляет модельные управления (2.3), блок-контроллер — управления (2.4), после чего пересчитывается состояние модели $w(\tau_{i+1})$. Фактически в течение промежутка времени $(\tau_i,\, \tau_{i+1}]$ на вход системы (2.2) подаются постоянные управления

$$\bar{u}_1(t) = \bar{u}_{1i}, \quad \bar{u}_2(t) = \bar{u}_{2i}, \quad v_1(t) = v_{1i}, \quad v_2(t) = v_{2i}, \tag{2.6}$$

тем самым формируются кусочно-постоянные функции $\bar{u}_1(t)$, $\bar{u}_2(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, $t \in T$. На следующем, $(i+1)$-м, шаге выполняются аналогичные действия. Работа алгоритма заканчивается в конечный момент времени $t = \vartheta$. Сформулируем основной результат статьи.

Теорема. *Пусть выполняются условия согласования параметров* (2.5). *Тогда для модельных управлений* (2.4), (2.6) *имеет место следующая оценка качества аппроксимации:*

$$\max\{\, \|v_1(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T)}, \|v_2(\cdot) - u_2(\cdot)\|_{L_2(T)}\} \le C\rho(h), \tag{2.7}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от оцениваемых величин.

Доказательство. Воспользуемся результатами, полученными ранее в задаче динамического восстановления производной функции [17] и в задаче реконструкции управления для системы ОДУ при измерении всего фазового вектора состояния [12;18]. Именно, повторяя за вычетом некоторых технических деталей доказательство оценки из [17], можно показать, что правило вычисления модельных управлений (2.3) обеспечивает выполнение неравенств

$$|w_{y1}(\tau_i) - x_1(\tau_i)| \le C_1(h+\delta(h)+\bar{\alpha}(h)), \quad |w_{y2}(\tau_i) - x_2(\tau_i)| \le C_1(h+\delta(h)+\bar{\alpha}(h)) \quad \forall i \in [0 : l(h)]. \tag{2.8}$$

Далее, в предположении об ограниченности вариации производных $\dot{x}_1(\cdot)$, $\dot{x}_2(\cdot)$ по общей схеме из [18] получаем оценки

$$\|\bar{u}_1(\cdot) - \dot{x}_1(\cdot)\|_{L_2(T)} \le C_2\bar{\rho}(h), \quad \|\bar{u}_2(\cdot) - \dot{x}_2(\cdot)\|_{L_2(T)} \le C_2\bar{\rho}(h). \tag{2.9}$$

Здесь и ниже через C_i будем обозначать вспомогательные константы, которые не зависят от оцениваемых величин и могут быть выписаны явно.

Используя оценки (2.8), (2.9), покажем, что модельная переменная $w_z(\cdot)$ аппроксимирует неизмеряемую компоненту $x_3(\cdot)$:

$$|w_z(\tau_i) - x_3(\tau_i)| \le C_3(h + \delta(h) + \bar{\alpha}(h) + \bar{\rho}(h)) \quad \forall i \in [0 : l(h)]. \tag{2.10}$$

Завершением доказательства будет повторное применение оценок типа (2.9) для второй компоненты модели (2.2).

Рассмотрим $t \in (\tau_i,\, \tau_{i+1}]$. Используя соотношения (2.1), запишем равенство, справедливое для почти всех t:

$$\begin{aligned}\dot{x}_3(t) &= f_3(t, x(t)) + G(t, x(t))(\dot{x}_1(t) - f_1(t, x(t))(\dot{x}_2(t) - f_2(t, x(t))\\ &= f_3(t, x(t)) + G(t, x(t))\Big(\dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t) f_2(t, x(t)) - \dot{x}_2(t) f_1(t, x(t)) + F(t, x(t))\Big).\end{aligned}$$

Здесь $F(\cdot,\cdot) = f_1(\cdot,\cdot) f_2(\cdot,\cdot)$. Переписывая в аналогичном виде уравнение модели для координаты $w_z(t)$, получаем

$$\dot{x}_3(t) - \dot{w}_z(t) = \sum_{i=1}^{6} c_i(t), \tag{2.11}$$

где

$$\begin{aligned}c_1(t) &= f_3(t, x(t)) - f_3(\tau_i, \bar{w}(\tau_i)),\\ c_2(t) &= G(t, x(t))F(t, x(t)) - G(\tau_i, \bar{w}(\tau_i))F(\tau_i, \bar{w}(\tau_i)),\\ c_3(t) &= \big(G(\tau_i, \bar{w}(\tau_i)) f_2(\tau_i, \bar{w}(\tau_i)) - G(t, x(t)) f_2(t, x(t))\big)\bar{u}_{1i}\\ &\quad + \big(G(\tau_i, \bar{w}(\tau_i)) f_1(\tau_i, \bar{w}(\tau_i)) - G(t, x(t)) f_1(t, x(t))\big)\bar{u}_{2i},\\ c_4(t) &= (G(t, x(t)) - G(\tau_i, \bar{w}(\tau_i)))\bar{u}_{1i}\bar{u}_{2i},\\ c_5(t) &= G(t, x(t)) f_2(t, x(t))(\bar{u}_{1i} - \dot{x}_1(t)) + G(t, x(t)) f_1(t, x(t))(\bar{u}_{2i} - \dot{x}_2(t)),\\ c_6(t) &= G(t, x(t))(\dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \bar{u}_{1i}\bar{u}_{2i}).\end{aligned}$$

Из липшицевости и ограниченности функций f_i, g_i, $i = 1, 2, 3$, а также того, что g_1, g_2 нигде не обращаются в ноль, следует липшицевость и ограниченность функций F, G (липшицевость последней показана, например, в [14]). Воспользуемся этим и ограниченностью модельных управлений для получения оценок величин, входящих в (2.11). Очевидно, имеем

$$|c_i(t)| \le C_4(\delta(h) + h + |x_3(t) - w_z(\tau_i)|), \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Поскольку $|w_z(t) - w_z(\tau_i)| \le C_5\delta(h)$, то для суммы $c(t) = \sum\limits_{i=1}^{4} c_i(t)$ выполняется оценка

$$|c(t)| \le C_6(\delta(h) + h + |x_3(t) - w_z(t)|). \tag{2.12}$$

Соотношение (2.11) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_3(t) - \dot{w}_z(t) &= c(t) + G(t, x(t)) f_2(t, x(t))(\bar{u}_1(t) - \dot{x}_1(t))\\ &+ G(t, x(t)) f_1(t, x(t))(\bar{u}_2(t) - \dot{x}_2(t)) + G(t, x(t))(\dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \bar{u}_1(t)\bar{u}_2(t)),\end{aligned} \tag{2.13}$$

причем в силу произвольности индекса i оно выполняется при почти всех $t \in T$.

Учитывая, что $w_z(t_0) = x_{30}$, интегрируя (2.13) и затем применяя (2.12), получаем

$$|x_3(t) - w_z(t)| = \Big| \int\limits_{t_0}^{t} (c(\tau) + G(\tau, x(\tau)) f_2(\tau, x(\tau))(\bar{u}_1(\tau) - \dot{x}_1(\tau)) +$$

$$+ G(\tau, x(\tau)) f_1(\tau, x(\tau))(\bar{u}_2(\tau) - \dot{x}_2(\tau)) + G(\tau, x(\tau))(\dot{x}_1(\tau)\dot{x}_2(\tau) - \bar{u}_1(\tau)\bar{u}_2(\tau))\, d\tau \Big|$$

$$\leq C_6 \int\limits_{t_0}^{t} |x_3(\tau) - w_z(\tau)|\, d\tau + C_6(\delta(h) + h)(\vartheta - t_0) + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_3, \tag{2.14}$$

где

$$\bar{\beta}_1 = \max_{t \in T} |\beta_1(t)|, \quad \beta_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} G(\tau, x(\tau)) f_2(\tau, x(\tau))(\dot{x}_1(\tau) - \bar{u}_1(\tau))\, d\tau, \tag{2.15}$$

$$\bar{\beta}_2 = \max_{t \in T} |\beta_2(t)|, \quad \beta_2(t) = \int\limits_{t_0}^{t} G(\tau, x(\tau)) f_1(\tau, x(\tau))(\dot{x}_2(\tau) - \bar{u}_2(\tau))\, d\tau,$$

$$\bar{\beta}_3 = \max_{t \in T} |\beta_3(t)|, \quad \beta_3(t) = \int\limits_{t_0}^{t} G(\tau, x(\tau))(\dot{x}_1(\tau)\dot{x}_2(\tau) - \bar{u}_1(\tau)\bar{u}_2(\tau))\, d\tau. \tag{2.16}$$

Оценим $\bar{\beta}_1$ и $\bar{\beta}_2$. Очевидно, можно ограничиться $\bar{\beta}_1$. Фиксируем $t > t_0$ и рассмотрим величину (2.15). Зададим произвольное $\epsilon > 0$ и разобьем отрезок $[t_0, t]$ конечным числом точек s_j, $t_0 = s_0 < \ldots < s_k = t$ так, что $\delta_j = s_{j+1} - s_j \leq \epsilon$. Запишем

$$\beta_1(t) = \sum_{j=0}^{k-1} G(s_j, x(s_j)) f_2(s_j, x(s_j)) \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} (\dot{x}_1(s) - \bar{u}_1(s))\, ds + \sum_{j=0}^{k-1} b_{1j}, \tag{2.17}$$

где

$$b_{1j} = \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} \Big(G(s, x(s)) f_2(s, x(s)) - G(s_j, x(s_j)) f_2(s_j, x(s_j)) \Big) \big(\dot{x}_1(s) - \bar{u}_1(s) \big)\, ds.$$

Из ограниченности и липшицевости функций, входящих в b_{1j}, следует

$$|b_{1j}| \leq C_7 (\delta_j)^2 \leq C_7 \delta_j \epsilon. \tag{2.18}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (2.17). Обозначим

$$\gamma_1(s_j) = \int\limits_{t_0}^{s_j} (\dot{x}_1(s) - \bar{u}_1(s))\, ds = x_1(s_j) - w_{y1}(s_j), \quad \gamma_1(s_0) = 0.$$

Из (2.8) имеем $|\gamma_1(s_j)| \leq C_1(h + \delta(h) + \bar{\alpha}(h))$. Запишем

$$\sum_{j=0}^{k-1} G(s_j, x(s_j)) f_2(s_j, x(s_j)) \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} (\dot{x}_1(s) - \bar{u}_1(s))\, ds$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} G(s_j, x(s_j)) f_2(s_j, x(s_j))(\gamma_1(s_{j+1}) - \gamma_1(s_j))$$

$$= -\sum_{j=0}^{k-2} \Big(G(s_{j+1}, x(s_{j+1})) f_2(s_{j+1}, x(s_{j+1})) - G(s_j, x(s_j)) f_2(s_j, x(s_j))\Big)\gamma_1(s_{j+1})$$

$$+ G(s_{k-1}, x(s_{k-1})) f_2(s_{k-1}, x(s_{k-1}))\gamma_1(s_k),$$

откуда выводим

$$\Big|\sum_{j=0}^{k-1} G(s_j, x(s_j)) f_2(s_j, x(s_j)) \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} (\dot{x}_1(s) - \bar{u}_1(s))\, ds\Big| \le C_8(h + \delta(h) + \bar{\alpha}(h)). \qquad (2.19)$$

Применяя в равенстве (2.17) оценки (2.18) и (2.19), получаем $|\beta_1(t)| \le C_8(h + \delta(h) + \bar{\alpha}(h)) + C_7(\vartheta - t_0)\epsilon$. Поскольку $\epsilon > 0$ выбрано произвольно, то $|\beta_1(t)| \le C_8(h+\delta(h)+\bar{\alpha}(h))$. Аналогично доказывается неравенство $|\beta_2(t)| \le C_9(h + \delta(h) + \bar{\alpha}(h))$. Отсюда

$$\bar{\beta}_1 \le C_8(h + \delta(h) + \bar{\alpha}(h)), \quad \bar{\beta}_2 \le C_9(h + \delta(h) + \bar{\alpha}(h)). \qquad (2.20)$$

Теперь оценим величину $\beta_3(t)$ (см. (2.16)). Запишем

$$\beta_3(t) = \sum_{j=0}^{k-1} G(s_j, x(s_j)) \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} (\dot{x}_1(s)\dot{x}_2(s) - \bar{u}_1(s)\bar{u}_2(s))\, ds + \sum_{j=0}^{k-1} b_{3j}, \qquad (2.21)$$

где

$$b_{3j} = \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} \big(G(s, x(s)) - G(s_j, x(s_j))\big)(\dot{x}_1(s)\dot{x}_2(s) - \bar{u}_1(s)\bar{u}_2(s))\, ds.$$

Из ограниченности и липшицевости функций, входящих в b_{3j}, следует

$$|b_{3j}| \le C_{10}(\delta_j)^2 \le C_{10}\delta_j\epsilon. \qquad (2.22)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (2.21). Введем обозначение

$$\gamma_3(s_j) = \int\limits_{t_0}^{s_j} (\dot{x}_1(s)\dot{x}_2(s) - \bar{u}_1(s)\bar{u}_2(s))\, ds, \quad \gamma_3(s_0) = 0.$$

Используя (2.9), выводим

$$|\gamma_3(s_j)| = \Big|\int\limits_{t_0}^{s_j} \dot{x}_1(s)(\dot{x}_2(s) - \bar{u}_2(s))\, ds + \int\limits_{t_0}^{s_j} (\dot{x}_1(s) - \bar{u}_1(s))\bar{u}_2(s)\, ds\Big| \le C_{11}\bar{\rho}(h).$$

Запишем

$$\sum_{j=0}^{k-1} G(s_j, x(s_j)) \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} (\dot{x}_1(s)\dot{x}_2(s) - \bar{u}_1(s)\bar{u}_2(s))\, ds = \sum_{j=0}^{k-1} G(s_j, x(s_j))(\gamma_3(s_{j+1}) - \gamma_3(s_j))$$

$$= -\sum_{j=0}^{k-2} \big(G(s_{j+1}, x(s_{j+1})) - G(s_j, x(s_j))\big)\gamma_3(s_{j+1}) + G(s_{k-1}, x(s_{k-1}))\gamma_3(s_k),$$

откуда выводим

$$\Big|\sum_{j=0}^{k-1} G(s_j, x(s_j)) \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} (\dot{x}_1(s)\dot{x}_2(s) - \bar{u}_1(s)\bar{u}_2(s))\, ds\Big| \le C_{12}\bar{\rho}(h). \qquad (2.23)$$

Применяя в равенстве (2.21) оценки (2.22) и (2.23), получаем $|\beta_3(t)| \le C_{12}\bar{\rho}(h) + C_{10}(\vartheta - t_0)\epsilon$. Поскольку $\epsilon > 0$ выбрано произвольно, то $|\beta_3(t)| \le C_{12}\bar{\rho}(h)$. Отсюда

$$\bar{\beta}_3 \le C_{12}\bar{\rho}(h). \qquad (2.24)$$

Объединяя полученные соотношения (2.14), (2.20) и (2.24), имеем

$$|x_3(t) - w_z(t)| \le C_6 \int\limits_{t_0}^{t} |x_3(\tau) - w_z(\tau)|\, d\tau + C_{13}(h + \delta(h) + \bar{\alpha}(h) + \bar{\rho}(h)).$$

Применение леммы Гронуолла приводит к оценке (2.10).

Теперь можно считать, что вторая компонента модели решает задачу реконструкции возмущений $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основе измерений фазового состояния точности (2.10). Снова воспользуемся результатом [18], т. е. оценкой типа (2.9), где роль точности измерений играет правая часть (2.10). Таким образом, итоговая оценка качества аппроксимации (2.7) из утверждения теоремы доказана:

$$\max\{\, \|v_1(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T)},\, \|v_2(\cdot) - u_2(\cdot)\|_{L_2(T)}\} \le C\Big(\frac{(h + \delta(h) + \bar{\alpha}(h) + \bar{\rho}(h))^2}{\alpha^2(h)} + \alpha(h)\Big)^{1/2}.$$

Положив $\delta(h) = h$, $\bar{\alpha}(h) = h^{2/3}$, $\alpha(h) = h^{2/9}$, легко проверить, что оценка имеет порядок малости $O(h^{1/9})$. Отметим, что оптимальность по порядку не исследуется; важен сам факт сходимости последовательности модельных управлений к реальным возмущениям при $h \to 0$.

3. Численный пример

В качестве модельного примера рассмотрим задачу для следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + (x_3^2(t) + 1)u_1(t),\\
&\dot{x}_2(t) = t^2 + (x_1^2(t) - e^{-2t} + 2)u_2(t),\\
&\dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) + 1 - e^{-t} - t + u_1(t)u_2(t),\\
&t \in T = [0, 1],\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0,\ u_1, u_2 \in [0, 1.5].
\end{aligned}$$

Измерению (с погрешностью) в дискретные моменты времени доступны координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Возмущения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ подлежат восстановлению. В вычислительном эксперименте были выбраны реализации неизвестных функций $u_1(t) = t$, $u_2(t) = t^2$ и, соответственно, точные решения $x_1(t) = e^{-t}$, $x_2(t) = t^3$, $x_3(t) = t$.

Результаты восстановления $u_1(t)$ и $u_2(t)$, полученные для различных наборов параметров алгоритма, приведены на рис. 1, 2, где реальные функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ изображены пунктирной линией, а результаты их восстановления — сплошной. Они соответствуют основному утверждению статьи, демонстрируя сходимость (2.7) при выполнении условий согласования параметров типа (2.5).

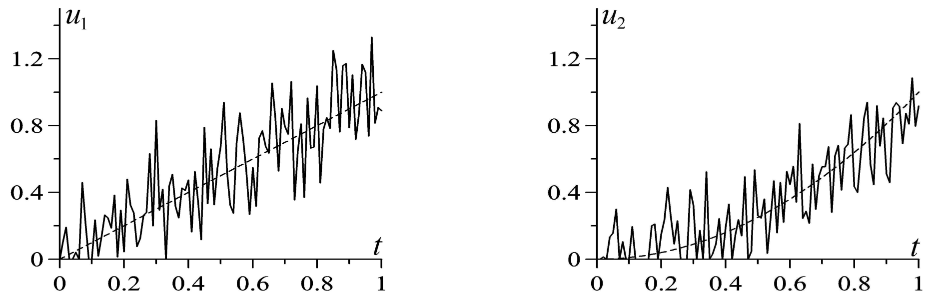

Рис. 1. Параметры: $h = 0.01$, $\delta = 0.01$, $\bar{\alpha} = 0.047$, $\alpha = 0.36$; погрешности: $\|v_1(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T)} = 0.188$, $\|v_2(\cdot) - u_2(\cdot)\|_{L_2(T)} = 0.136$.

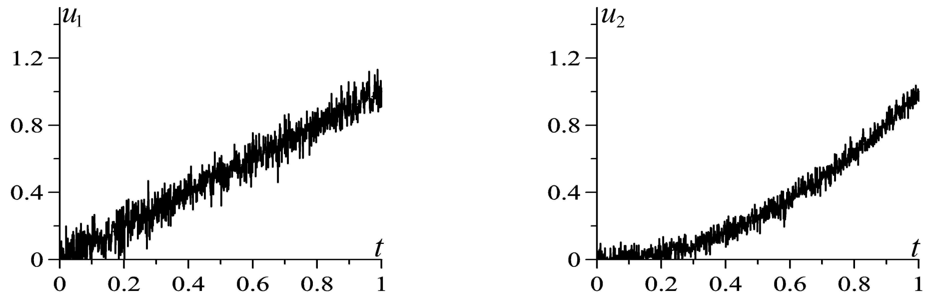

Рис. 2. Параметры: $h = 0.0001$, $\delta = 0.0001$, $\bar{\alpha} = 0.002$, $\alpha = 0.125$; погрешности: $\|v_1(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T)} = 0.073$, $\|v_2(\cdot) - u_2(\cdot)\|_{L_2(T)} = 0.027$.

Заключение

В работе рассмотрена задача динамической реконструкции возмущения в частично наблюдаемой системе ОДУ третьего порядка с нелинейным по возмущению уравнением, описывающим динамику неизмеряемой координаты. Разработан конечношаговый программно реализуемый алгоритм решения, основанный на методе вспомогательных позиционно управляемых моделей, выписана оценка его точности.

В качестве одного из направлений развития тематики планируется использовать полученные результаты для решения на базе метода моментов задачи реконструкции возмущений в квазилинейном стохастическом уравнении в предположении о возможности измерения некоторого количества реализаций части его координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brockett R.W., Mesarovich M.P.** The reproducivility of multivariable control systems // J. Math. Anal. and Appl. 1965. Vol. 11, no. 1–3. P. 548–563.
2. **Sain M.K., Massey J.L.** Invertibility of linear time-invariant dynamical systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1969. Vol. AC-14. P. 141–149. doi: 10.1109/TAC.1969.1099133 .
3. **Norton J.P.** An introduction to identification. London: Academic Press, 1986. 310 p.
4. **Ljung L., Söderström T.** Theory and practice of recursive identification. Cambridge: M.I.T. Press, 1983. 528 p.
5. **Bar-Shalom Y., Li X.R.** Estimation and tracking: principles, techniques, and software. Boston: Artech House, 1993. 511 p.
6. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978. 142 с.
7. **Kabanikhin S.I.** Inverse and ill-posed problems. Berlin: De Gruyter, 2011. 459 p.

8. **Papadimitriou T., Diamantaras K.I., Strintzis M.G., and Roumeliotis M.** Robust estimation of rigid-body 3-D motion parameters based on point correspondences // IEEE Trans. Circuits Syst. Video Techn. 2000. Vol. 106, no. 4. P. 541–549. doi: 10.1109/76.844999 .
9. **Keller J.Y., Sauter D.** Kalman filter for discrete-time stochactic linear systems subject to intermittent unknown inputs // IEEE Trans. Autom. Contr. 2013. Vol. 104, no. 7. P. 1882–1887. doi: 10.1109/TAC.2013.2264739 .
10. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
11. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
12. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
13. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984. 456 с.
14. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Об устойчивом позиционном восстановлении управления по измерениям части координат // Некоторые задачи управления и устойчивости / УрО АН СССР. Свердловск, 1989. С. 33–47.
15. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 305 с.
16. **Rozenberg V.L.** On a problem of dynamical input reconstruction for a system of special type under conditions of uncertainty // AIMS Mathematics. 2020. Vol. 5, no. 5. P. 4108–4120.
17. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О наилучшем приближении оператора дифференцирования в классе неупреждающих операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 2. С. 192–199.
18. **Вдовин А.Ю.** К задаче восстановления возмущения в динамической системе: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1989. 117 с.

Поступила 16.03.2021
После доработки 20.04.2021
Принята к публикации 26.04.2021

Розенберг Валерий Львович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский государственный университет путей сообщения
г. Екатеринбург
e-mail: rozen@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Brockett R.W., Mesarovich M.P. The reproducivility of multivariable control systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1965, vol. 11, no. 1–3, pp. 548–563.
2. Sain M.K., Massey J.L. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1969, vol. AC-14, pp. 141–149. doi: 10.1109/TAC.1969.1099133 .
3. Norton J.P. *An introduction to identification.* London: Acad. Press, 1986, 310 p.
4. Ljung L., Söderström T. *Theory and practice of recursive identification.* Cambridge: M.I.T. Press, 1983, 528 p.
5. Bar-Shalom Y., Li X.R. *Estimation and tracking: principles, techniques, and software.* Boston: Artech House, 1993, 511 p.
6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for Solutions of Ill-Posed Problems.* N Y: Wiley, 1977, 258 p. ISBN: 0470991240 . Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1979, 285 p.
7. Kabanikhin S.I. *Inverse and ill-posed problems.* Berlin: De Gruyter, 2011, 459 p.
8. Papadimitriou T., Diamantaras K.I., Strintzis M.G., and Roumeliotis M. Robust estimation of rigid-body 3-D motion parameters based on point correspondences. *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Techn.*, 2000, vol. 106, no. 4, pp. 541–549. doi: 10.1109/76.844999 .

9. Keller J.Y., Sauter D. Kalman filter for discrete-time stochactic linear systems subject to intermittent unknown inputs. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 2013, vol. 104, no. 7, pp. 1882–1887. doi: 10.1109/TAC.2013.2264739 .
10. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Modelling of a control in a dynamic system. *Engrg. Cybernetics*, 1983, vol. 21, no. 2, pp. 38–47.
11. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* Basel: Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 9782881249440 .
12. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem* [Methods of dynamic reconstruction of inputs of controlled systems]. Ekaterinburg: Izd-vo UrO RAN, 2011, 292 p.
13. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1984, 456 p.
14. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Stable positional reconstruction of a control from measurements of some of the coordinates. In: A.V. Kim and V.I. Maksimov (eds.) *Some control and stability problems.* Sverdlovsk: Akad. Nauk SSSR Ural. Otdel., 1989. pp. 33–47 (in Russian).
15. Maksimov V.I. *Zadachi dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov beskonechnomernykh sistem* [Problems of dynamic reconstruction of the inputs of infinite-dimensional systems]. Ekaterinburg: Ross. Akad. Nauk Publ., 2000, 305 p. ISBN: 5-7691-1082-1 .
16. Rozenberg V.L. On a problem of dynamical input reconstruction for a system of special type under conditions of uncertainty. *AIMS Mathematics*, 2020, vol. 5, no. 5, pp. 4108–4120. doi: 10.3934/math.2020263 .
17. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Best approximation of the differentiation operator in the class of nonanticipatory operators. *Math. Notes*, 1985, vol. 37, no. 2, pp. 109–114. doi: 10.1007/BF01156754 .
18. Vdovin A.Yu. *K zadache vosstanovleniya vozmushcheniya v dinamicheskoi sisteme* [On the problem of reconstruction of perturbation in a dynamical system]. Candidate Sci. (Phys.–Math.) Dissertation. Sverdlovsk: UrO AN SSSR, 1989, 117 p.

Received March 16, 2021
Revised April 20, 2021
Accepted April 26, 2021

Valeriy Lvovich Rozenberg, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, 620034 Russia,
e-mail: rozen@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. L. Rozenberg. On a problem of dynamic disturbance reconstruction in a nonlinear system of differential equations, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 197–207 .