

УДК 517.977.5

**О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ОБЪЕКТА  
В ПЛОТНЫХ СЛОЯХ АТМОСФЕРЫ****Д. А. Новиков, И. Н. Кандоба, И. В. Козьмин, А. Р. Плаксин**

В работе рассматриваются вопросы построения алгоритмов решения задачи оптимального управления нелинейной динамической системой при наличии фазовых ограничений. Рассматриваемая система описывает движение управляемого объекта как твердого тела в плотных слоях атмосферы под действием гравитационной и аэродинамической сил. Искомое управление должно доставлять минимальное значение терминальному критерию качества с выполнением ряда ограничений на управление и фазовое состояние динамической системы. Значение оптимизируемого критерия характеризует точность приведения центра масс объекта на заданное множество с требуемой ориентацией его вектора скорости. Управление осуществляется путем изменения пространственной ориентации подвижных управляющих элементов конструкции объекта. Для построения допустимых в исследуемой задаче управлений предлагается итерационная по времени процедура. Эта процедура основана на последовательном использовании момента действующей на управляющие элементы аэродинамической силы, который обеспечивает желательное направление вектора скорости центра масс объекта с учетом всех ограничений. Для определения требуемого момента предлагается использовать соотношение, которое связывает его с моментом аэродинамической силы, действующей на остальную поверхность объекта, при желаемом направлении вектора скорости. Для этого момента вычисляются реализующие его значения управляющих параметров. Работоспособность предлагаемого алгоритма построения допустимых управлений иллюстрируется на модельном примере прикладной задачи оптимального управления. В этой задаче динамическая система описывает движение ступени ракеты-носителя (возвращаемого блока) на атмосферном участке его траектории, на котором осуществляется движение блока в заданный район посадки. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, оптимальное управление, фазовые ограничения, допустимое управление, статическое равновесие.

**D. A. Novikov, I. N. Kandoba, I. V. Koz'min, A. R. Plaksin. On the solution of a control problem for the motion of an object in the dense layers of the atmosphere.**

The paper deals with the construction of algorithms for solving an optimal control problem for a nonlinear dynamic system in the presence of phase constraints. The system under consideration describes the motion of a controlled object as a rigid body in the dense layers of the atmosphere under the gravitational and aerodynamic forces. The desired control must minimize a terminal performance index under a number of constraints on the control and the phase state of the dynamic system. The performance index characterizes the accuracy of bringing the center of mass of the object to a given set with a required direction of its velocity. The control is carried out by changing the spatial orientation of movable control elements of the object structure. A time-iterative procedure is proposed for the construction of admissible controls. The procedure is based on the sequential use of the aerodynamic force acting on the controlling elements, which provides the desired direction of the velocity vector of the center of mass under all the constraints. To determine the required moment, it is proposed to use a relation that connects it with the moment of the aerodynamic force acting on the remaining surface of the object with the desired direction of the velocity vector. For this moment, the values of the control parameters that implement it are calculated. The efficiency of the proposed algorithm for constructing admissible controls is illustrated by a model example of an applied optimal control problem. In this problem, the dynamic system describes the motion of a stage of a launch vehicle (recoverable block) in the atmospheric section of its trajectory, where the block moves to a specified landing area. The results of numerical simulation are presented.

Keywords: nonlinear dynamic system, optimal control, phase constraints, admissible control, static equilibrium.

MSC: 49N90, 93C15

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-169-184

**Введение**

В работе исследуется задача оптимального управления движением объекта в плотных слоях атмосферы под действием гравитационной и аэродинамической сил. Рассматривается динамическая система, которая задается уравнениями поступательного движения центра масс

объекта и уравнениями, описывающими вращательное движение объекта как твердого тела. Управление осуществляется путем изменения пространственной ориентации подвижных управляющих элементов конструкции объекта. Искомое программное управление, действующее на некотором промежутке времени с незафиксированным правым концом, должно доставлять минимальное значение терминальному критерию качества с выполнением ограничений на управление и текущее фазовое состояние динамической системы. Значение оптимизируемого критерия характеризует точность приведения центра масс объекта на заданное множество с требуемой ориентацией его вектора скорости.

Такие задачи возникают в процессе разработки бюджетных технических решений, позволяющих создавать ракеты-носители с отдельными ступенями или блоками, которые могли бы быть успешно возвращены на Землю после выведения полезной нагрузки с целью их повторного использования. В настоящее время эти работы ведутся в целом ряде компаний по всему миру: SpaceX, Blue Origin, Virgin Galactic и United Launch Alliance (США), Rocket Lab (Новая Зеландия), I-space (КНР). Подобные разработки выполняются и в некоторых российских компаниях, например, в ракетно-космической корпорации “Энергия” им. С.П. Королева [1], Государственном ракетном центре им. В.П. Макеева [2] и др. Одним из ключевых моментов в процессе проектирования указанной техники является разработка методов построения управлений, с помощью которых осуществляется такое движение возвращаемого элемента конструкции ракеты-носителя (далее — блока), которое обеспечивает его успешную посадку в заданной точке на земной поверхности с требуемой точностью. Математическая формализация этой проблемы приводит к задачам управления динамическими системами, которые описывают движение блока на различных участках траектории его движения. При этом указанные требования к допустимым управлениям приводят к появлению в этих задачах и фазовых ограничений.

В работе на примере одной упрощенной модельной задачи оптимального управления апробируется подход к построению допустимых управлений. Для построения допустимых в этой задаче управлений предлагается итерационная по времени процедура. Эта процедура основана на использовании момента аэродинамической силы, действующей на управляющие элементы конструкции блока, который обеспечивает желательное направление вектора скорости центра масс блока с учетом всех ограничений. Для определения требуемого момента предлагается использовать соотношение, которое связывает его с моментом аэродинамической силы, действующей на остальную поверхность объекта, при желаемом направлении вектора скорости. После чего для этого момента вычисляются реализующие его значения управляющих параметров. Основное внимание уделяется построению допустимых управлений во вспомогательной задаче.

## 1. Задача приведения блока на посадочную вертикаль

Завершающим этапом полета возвращаемого блока является его приземление. В настоящее время этот заключительный маневр выполняется с использованием крылатой схемы или вертикальной посадки [1;3]. Последний вариант реализуется с помощью реактивных, парашютных и комбинированных средств посадки.

При использовании реактивной системы посадки осуществляется управляемое движение блока вдоль проходящей через заданную точку его приземления вертикальной прямой. Следовательно, в плотных слоях атмосферы должно быть осуществлено управляемое движение блока в заданный район его приземления, а на отдельном атмосферном участке блок должен быть приведен на указанную вертикальную прямую. Далее эту задачу будем называть задачей приведения блока на посадочную вертикаль. Из физических соображений в этой задаче возникают дополнительные терминальные фазовые ограничения. Должна быть обеспечена требуемая ориентация вектора скорости центра масс блока, а также высота точки приведения не должна быть меньше некоторой минимально допустимой. Требуется построить программное

управление, которое обеспечивает максимальное сближение блока с посадочной вертикалью до момента достижения им заданной высоты, а также минимальные абсолютные значения горизонтальных составляющих скоростей блока в точке пересечения его траектории с этой прямой. Учитывая, что движение блока осуществляется в плотных слоях атмосферы, в этой задаче при определенных начальных условиях допустимое управление может быть реализовано путем последовательного задания необходимой пространственной ориентации управляющим элементам конструкции блока — аэродинамическим рулям.

В работе исследуется упрощенная задача приведения блока на посадочную вертикаль. В этой задаче блок представляет собой твердое тело цилиндрической формы. Управление его движением осуществляется с помощью четырех аэродинамических рулей (далее — просто рулей), симметрично установленных на границе одного из оснований цилиндра. В качестве рулей используются одинаковые плоские пластины прямоугольной формы. Каждая из пластин может поворачиваться на некоторый угол вокруг своей жестко закрепленной оси, расположенной на срединной линии соответствующего ей прямоугольника. Прямые, проходящие через указанные оси, ортогональны оси симметрии цилиндра и пересекают ее в одной точке. В качестве управляющих параметров используются скорости поворотов рулей.

Движение блока моделируется при следующих предположениях:

- а) земная поверхность — касательная плоскость к земному эллипсоиду в точке приземления блока;
- б) поле тяготения Земли является однородным, в котором значение гравитационного ускорения зависит только от высоты;
- в) отсутствует систематический ветер, а другие термодинамические характеристики атмосферы (плотность, давление, температура) задаются известными детерминированными функциями [4; 5].

## 2. Математическая модель управляемого движения блока

Поступательное движение центра масс блока на промежутке времени  $[t_s, t_f]$  в некоторой неподвижной (посадочной) системе координат<sup>1</sup> описывается уравнениями [6, разд. 2]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{W}^a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}), \\ \dot{\boldsymbol{\delta}} &= \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вращательное движение блока вокруг осей связанной с ним подвижной системы координат<sup>2</sup> задается динамическими (2.2) и кинематическими (2.3) уравнениями Эйлера

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{G} \circ \mathbf{M}^a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}), \quad (2.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\omega}, \quad (2.3)$$

<sup>1</sup>Центр  $O$  посадочной системы координат  $Oxyz$  находится в точке приземления блока. Ось  $Oy$  направлена вверх ортогонально плоскости, касательной к земному эллипсоиду в точке  $O$ . Ортогональные оси  $Ox$  и  $Oz$  расположены в этой касательной плоскости и направлены так, что векторы  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  образуют правую тройку (см. рис. 1).

<sup>2</sup>Центр  $O_1$  связанной с блоком системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  находится в центре масс блока. Ось  $O_1x_1$  этой системы координат направлена по оси симметрии цилиндра, входящего в конструкцию блока (см. рис. 1). Ось  $O_1y_1$  лежит на прямой, проходящей через срединные линии прямоугольников, соответствующих первому и третьему рулям. Ось  $O_1z_1$  лежит на прямой, проходящей через срединные линии прямоугольников, соответствующих второму и четвертому рулям. Эти две оси ортогональны и направлены так, что векторы  $O_1x_1$ ,  $O_1y_1$  и  $O_1z_1$  образуют правую тройку (см. рис. 1).

где

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}) = \left( \frac{J_{y_1} - J_{z_1}}{J_{x_1}} \omega_{y_1} \omega_{z_1}, \frac{J_{z_1} - J_{x_1}}{J_{y_1}} \omega_{z_1} \omega_{x_1}, \frac{J_{x_1} - J_{y_1}}{J_{z_1}} \omega_{x_1} \omega_{y_1} \right)^\top,$$

$$\mathbf{G} = \left( \frac{1}{J_{x_1}}, \frac{1}{J_{y_1}}, \frac{1}{J_{z_1}} \right)^\top,$$

$$\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} 0 & \sin \varphi (\cos \psi)^{-1} & \cos \varphi (\cos \psi)^{-1} \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 1 & \sin \varphi \sin \psi (\cos \psi)^{-1} & \cos \varphi \sin \psi (\cos \psi)^{-1} \end{pmatrix},$$

а под произведением  $\mathbf{G} \circ \mathbf{M}$  вектора  $\mathbf{G}$  на вектор-функцию  $\mathbf{M}$  в правой части (2.2) понимается вектор-функция, компоненты которой определяются произведением соответствующих компонент вектор-сомножителей.

Здесь

$t_s$  — начальный момент времени;

$t_f$  — конечный момент времени;

$\mathbf{x} = (x, y, z)^\top, \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^\top \in \mathbb{R}^3$  — положение и скорость центра масс блока;

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1})^\top \in \mathbb{R}^3$  — угловая скорость вращения блока;

$\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^4$  — углы поворота рулей;

$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$  — гравитационное ускорение;

$\mathbf{W}^a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbb{R}^3$  — ускорение, которое порождается аэродинамической силой, действующей на поверхность блока;

$J_{x_1}, J_{y_1}, J_{z_1}$  — осевые моменты инерции блока (в силу осевой симметрии рассматриваемой конструкции блока  $J_{y_1} = J_{z_1}$ );

$\mathbf{M}^a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbb{R}^3$  — момент аэродинамической силы;

$\boldsymbol{\phi} = (\vartheta, \psi, \varphi)^\top \in \mathbb{R}^3$ , где  $\vartheta, \psi, \varphi$  — углы тангажа, рыскания и крена, определяющие пространственную ориентацию блока (см. рис. 1).

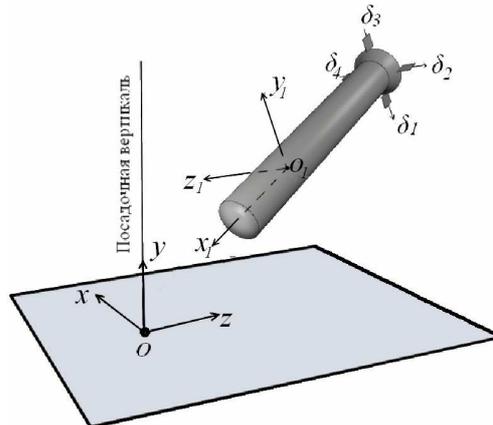


Рис. 1. Конструкция блока. Системы координат.

Управлениями  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$  служат скорости  $u_i = \dot{\delta}_i$  изменения углов  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) поворота рулей

$$|u_i(t)| \leq u_i^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.4)$$

В момент времени  $t_s$  для динамической системы (2.1)–(2.3) задаются начальные условия

$$\mathbf{X}(t_s) = \mathbf{X}^{(s)}, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta})^\top \in \mathbb{R}^{16}$  — вектор фазового состояния системы (2.1)–(2.3).

К управляемому движению блока предъявляется ряд дополнительных требований. Эти требования обуславливают наличие ограничений на текущее фазовое состояние системы (2.1)–(2.3). Во время движения блока значения компонент вектор-функции  $\boldsymbol{\delta}$  должны удовлетворять следующим условиям:

$$|\delta_i(t)| \leq \delta_i^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.6)$$

В конечный момент времени  $t_f$  должно быть выполнено ограничение по высоте

$$y(t_f) \geq h_f^{\min}, \quad (2.7)$$

где  $h_f^{\min}$  — положительная константа, определяющая минимально допустимую высоту<sup>3</sup>.

### 3. Основная и вспомогательная задачи оптимального управления

Задача приведения блока на посадочную вертикаль может быть сформулирована как следующая задача оптимального управления.

**З а д а ч а 1** (Основная задача). Пусть конечный момент времени  $t_f$  не зафиксирован. На промежутке времени  $[t_s, t_f]$  для управляемой системы (2.1), (2.2), (2.3) с заданными начальными условиями (2.5) найти программное управление  $\mathbf{u}$  (кусочно-непрерывную на  $[t_s, t_f]$  вектор-функцию), которое удовлетворяет условию (2.4) и обеспечивает минимальное значение функционалу

$$J_\mu[\mathbf{u}(\cdot)] = x^2(t_f) + z^2(t_f) + \mu ([v_x(t_f)]^2 + [v_z(t_f)]^2), \quad (3.1)$$

где  $\mu > 0$  — заданная константа. При этом должны быть выполнены фазовые ограничения (2.6) и (2.7).

Рассмотрим в задаче 1 частный способ управления. Пусть  $\delta_1(t) = \delta_3(t) = \delta_\psi(t)$ ,  $\delta_2(t) = \delta_4(t) = \delta_\vartheta(t)$ ,  $t \in [t_s, t_f]$ .

При таком способе управления в качестве управляющих параметров в основной задаче 1 могут рассматриваться скорости изменения двух углов  $\delta_\psi$  и  $\delta_\vartheta$ :

$$u_\psi(t) = \dot{\delta}_\psi(t), \quad u_\vartheta(t) = \dot{\delta}_\vartheta(t), \quad t \in [t_s, t_f]. \quad (3.2)$$

В этом случае на управление накладываются ограничения

$$|u_\psi(t)| \leq u_\psi^{\max}, \quad |u_\vartheta(t)| \leq u_\vartheta^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad (3.3)$$

а фазовые ограничения (2.6) могут быть записаны в виде

$$|\delta_\psi(t)| \leq \delta_\psi^{\max}, \quad |\delta_\vartheta(t)| \leq \delta_\vartheta^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f]. \quad (3.4)$$

Здесь  $u_\psi^{\max} = \min\{u_1^{\max}, u_3^{\max}\}$ ,  $u_\vartheta^{\max} = \min\{u_2^{\max}, u_4^{\max}\}$ ,  $\delta_\psi^{\max} = \min\{\delta_1^{\max}, \delta_3^{\max}\}$ ,  $\delta_\vartheta^{\max} = \min\{\delta_2^{\max}, \delta_4^{\max}\}$ .

<sup>3</sup>Предельно малая высота, с которой еще возможно успешное приземление блока с применением каких-либо аварийных систем посадки, например, парашютной системы.

Таким образом, наряду с основной задачей 1 может быть рассмотрена следующая вспомогательная задача оптимального управления.

**Задача 2** (Вспомогательная задача). Пусть конечный момент времени  $t_f$  не зафиксирован. На промежутке времени  $[t_s, t_f]$  для управляемой системы (2.1)–(2.3) с заданными начальными условиями (2.5) найти программное управление  $\mathbf{u}$  (кусочно-непрерывную на  $[t_s, t_f]$  вектор-функцию), которое удовлетворяет условию (3.3) и обеспечивает минимальное значение функционалу (3.1). При этом должны быть выполнены фазовые ограничения (2.7) и (3.4).

Управления, удовлетворяющие в основной задаче 1 и вспомогательной задаче 2 всем требованиям кроме условия оптимальности, будем называть допустимыми в этих задачах.

#### 4. Сила управления и управляющий момент во вспомогательной задаче оптимального управления

В уравнениях (2.1) ускорение  $\mathbf{W}^a$ , которое порождается действующей на поверхность блока аэродинамической силой  $\mathbf{F}^a$ , задается формулой

$$\mathbf{W}^a = \frac{1}{m} \mathbf{F}^a,$$

где  $m$  — масса блока.

Конкретизируем выражения для аэродинамической силы  $\mathbf{F}^a$  и ее момента  $\mathbf{M}^a$ .

Действующая на обдуваемую поверхность  $S$  движущегося в атмосфере блока аэродинамическая сила  $\mathbf{F}^a$  (сила сопротивления от давления набегающего потока) и ее момент  $\mathbf{M}^a$  в связанной системе координат задаются формулами [7, разд. 1.3; 8, разд. 1.4, 1.6, 7.8]

$$\mathbf{F}^a(\mathbf{X}) = \int_S \frac{\rho(\mathbf{x}(s)) \widehat{\mathbf{v}}^2(s)}{2} \bar{p}(s) \cos^2(\widehat{\mathbf{v}}(s), \mathbf{n}(s)) \mathbf{n}(s) ds, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{M}^a(\mathbf{X}) = \int_S \frac{\rho(\mathbf{x}(s)) \widehat{\mathbf{v}}^2(s)}{2} \bar{p}(s) \cos^2(\widehat{\mathbf{v}}(s), \mathbf{n}(s)) \mathbf{r}(s) \times \mathbf{n}(s) ds. \quad (4.2)$$

Здесь

$\widehat{\mathbf{v}}(s)$  — скорость набегающего потока на элемент поверхности  $ds$ ;

$\bar{p}(s)$  — давление торможения;

$\mathbf{n}(s)$  — единичный вектор нормали к элементу поверхности;

$\rho(\mathbf{x})$  — плотность воздуха [5];

$\mathbf{r}(s) = (r_{x_1}(s), r_{y_1}(s), r_{z_1}(s))^T \in \mathbb{R}^3$  — радиус-вектор, соединяющий центр масс тела и геометрический центр элемента поверхности.

Скорость  $\widehat{\mathbf{v}}$  набегающего потока на элемент поверхности и давление торможения  $\bar{p}$  определяются равенствами [9, §§ 7, 21, 37]

$$\widehat{\mathbf{v}}(s) = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(s), \quad (4.3)$$

$$\bar{p}(M) = \begin{cases} \frac{2}{kM^2} \left( \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{k/(k-1)} - 1 \right), & M \leq 1, \\ \frac{2}{kM^2} \left( \frac{166,7M^7}{(7M^2 - 1)^{5/2}} - 1 \right), & M > 1, \end{cases}$$

где  $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{D}\mathbf{v} = (\bar{v}_{x_1}, \bar{v}_{y_1}, \bar{v}_{z_1})^\top$  — скорость центра масс блока в связанной системе координат ( $\mathbf{D}$  — матрица перехода из посадочной системы координат в связанную);  $k = 1.405$  — отношение удельной теплоемкости воздуха при постоянном давлении к его удельной теплоемкости при постоянном объеме;  $M$  — число Маха.

В силу формулы (4.1) силу  $\mathbf{F}^a$  можно разделить на две составляющие — аэродинамические силы  $\mathbf{F}^b$  и  $\mathbf{F}^s$ , действующие на корпус блока и рули соответственно:

$$\mathbf{F}^a(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^b(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi}) + \mathbf{F}^s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}).$$

Согласно такому разложению силы  $\mathbf{F}^a$  и формуле (4.2) ее момент  $\mathbf{M}^a$  также может быть разделен на две составляющих:

$$\mathbf{M}^a(\mathbf{X}) = \mathbf{M}^b(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi}) + \mathbf{M}^s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}).$$

В сформулированных выше задачах оптимального управления особый интерес представляют аэродинамическая сила  $\mathbf{F}^s$ , которая действует на управляющие элементы конструкции блока, т. е. аэродинамические рули, и ее момент  $\mathbf{M}^s$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Действующую на рули аэродинамическую силу  $\mathbf{F}^s$  будем называть силой управления.

**О п р е д е л е н и е 2.** Момент  $\mathbf{M}^s$  силы управления будем называть управляющим моментом.

Сила управления  $\mathbf{F}^s$  и управляющий момент  $\mathbf{M}^s$  представимы в виде

$$\mathbf{F}^s = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}^{s(i)}, \quad \mathbf{M}^s = \sum_{i=1}^4 \mathbf{M}^{s(i)}, \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{F}^{s(i)}$  — составляющая силы управления, действующая на  $i$ -й руль, и ее момент  $\mathbf{M}^{s(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Для исследования свойств силы управления  $\mathbf{F}^s$  и управляющего момента  $\mathbf{M}^s$  во вспомогательной задаче 2 целесообразно построить для них на основе формул (4.1) и (4.2) приближенные аналитические выражения. Для достижения этой цели примем следующие допущения. *Во-первых*, поверхность каждого руля в (4.1) и (4.2) рассматривается как элементарный элемент. *Во-вторых*, точкой приложения к каждому рулю соответствующей составляющей силы управления является геометрический центр задающего форму руля прямоугольника. *В-третьих*, значения плотности  $\rho$  и температуры воздуха  $T$  не отличаются в различных точках поверхности руля. *В-четвертых*, скорость вращения руля не оказывает влияния на силу управления.

При таких допущениях силы  $\mathbf{F}^{s(i)}$  и их моменты  $\mathbf{M}^{s(i)}$  в связанной системе координат могут быть приближено заданы следующими формулами:

$$\mathbf{F}^{s(1)} \approx -a_1 \mathbf{A}^{(1)}, \quad \mathbf{F}^{s(2)} \approx -b_2 \mathbf{B}^{(2)}, \quad \mathbf{F}^{s(3)} \approx -a_3 \mathbf{A}^{(3)}, \quad \mathbf{F}^{s(4)} \approx -b_4 \mathbf{B}^{(4)}, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{s(1)} &\approx a_1 (p_1 \cos \delta_1, p_2 \cos \delta_1, p_1 \sin \delta_1)^\top, \\ \mathbf{M}^{s(2)} &\approx b_2 (-p_1 \cos \delta_2, p_1 \sin \delta_2, -p_2 \cos \delta_2)^\top, \\ \mathbf{M}^{s(3)} &\approx a_3 (-p_1 \cos \delta_3, p_2 \cos \delta_3, -p_1 \sin \delta_3)^\top, \\ \mathbf{M}^{s(4)} &\approx b_4 (p_1 \cos \delta_4, -p_1 \sin \delta_4, -p_2 \cos \delta_4)^\top. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}) &= q s_{x_1 z_1}^{(i)} \left( -\widehat{v}_{x_1}^{(i)} \sin \delta_i + \widehat{v}_{z_1}^{(i)} \cos \delta_i \right)^2 \in \mathbb{R}, \quad s_{x_1 z_1}^{(i)} = \text{sign} \left( -\widehat{v}_{x_1}^{(i)} \sin \delta_i + \widehat{v}_{z_1}^{(i)} \cos \delta_i \right), \\ \mathbf{A}^{(i)}(\boldsymbol{\delta}) &= (-\sin \delta_i, 0, \cos \delta_i)^\top \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 3; \\ b_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}) &= q s_{x_1 y_1}^{(j)} \left( \widehat{v}_{x_1}^{(j)} \sin \delta_j + \widehat{v}_{y_1}^{(j)} \cos \delta_j \right)^2 \in \mathbb{R}, \quad s_{x_1 y_1}^{(j)} = \text{sign} \left( \widehat{v}_{x_1}^{(j)} \sin \delta_j + \widehat{v}_{y_1}^{(j)} \cos \delta_j \right), \\ \mathbf{B}^{(j)}(\boldsymbol{\delta}) &= (\sin \delta_j, \cos \delta_j, 0)^\top \in \mathbb{R}^3, \quad j = 2, 4, \end{aligned}$$

где

$$q = \frac{1}{2} \rho \bar{p} s_r, \quad s_r \text{ — площадь поверхности руля;}$$

$\widehat{\mathbf{v}}^{(i)}$  — скорость набегающего потока на  $i$ -й руль, задаваемая формулой (4.3) ( $i = 1, 2, 3, 4$ );

$p_1 = (d_2 + w_r)/2$ ,  $d_r$  — большой диаметр входящего в конструкцию блока усеченного конуса,  $w_r$  — ширина руля;

$p_2 = l_m - (h_c + h_k)$ ,  $l_m$  — расстояние от центра масс блока до его носовой части,  $h_c, h_k$  — высоты цилиндра и усеченного конуса соответственно.

Допустим, *в-пятых*, что отличие скоростей  $\widehat{\mathbf{v}}$  набегающего потока на различные рули в каждой из пар незначительно. Обозначим через  $\widehat{\mathbf{v}}^{(\psi)}$ ,  $\widehat{\mathbf{v}}^{(\vartheta)}$  скорости набегающего потока на соответствующие пары рулей: 1-й, 3-й и 2-й, 4-й. В силу (4.3) эти скорости можно задать выражениями

$$\widehat{\mathbf{v}}^{(\psi)} = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^{(\psi)}, \quad \widehat{\mathbf{v}}^{(\vartheta)} = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^{(\vartheta)},$$

где  $\mathbf{r}^{(\psi)} = (\mathbf{r}^{(1)} + \mathbf{r}^{(3)})/2$ ,  $\mathbf{r}^{(\vartheta)} = (\mathbf{r}^{(2)} + \mathbf{r}^{(4)})/2$ .

Тогда, используя выражения (4.4)–(4.6), для частного способа управления (3.2) на  $[t_s, t_f]$  несложно получить приближенные аналитические выражения для силы управления  $\mathbf{F}^s$  и управляющего момента  $\mathbf{M}^s$  в связанной системе координат:

$$\mathbf{F}^s \approx A_\psi \cdot (-\sin \delta_\psi, 0, \cos \delta_\psi)^\top + A_\vartheta \cdot (\sin \delta_\vartheta, \cos \delta_\vartheta, 0)^\top,$$

$$\mathbf{M}^s \approx B_\psi \cdot (0, \cos \delta_\psi, 0)^\top + B_\vartheta \cdot (0, 0, \cos \delta_\vartheta)^\top.$$

Здесь  $A_\psi, A_\vartheta, B_\psi, B_\vartheta$  — определенные на  $[t_s, t_f]$  скалярные функции

$$A_\psi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \phi, \delta_\psi) = -c_F s_\psi \left( -\widehat{v}_{x_1}^{(\psi)} \sin \delta_\psi + \widehat{v}_{z_1}^{(\psi)} \cos \delta_\psi \right)^2,$$

$$A_\vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \phi, \delta_\vartheta) = -c_F s_\vartheta \left( \widehat{v}_{x_1}^{(\vartheta)} \sin \delta_\vartheta + \widehat{v}_{y_1}^{(\vartheta)} \cos \delta_\vartheta \right)^2,$$

$$B_\psi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \phi, \delta_\psi) = c_M s_\psi \left( -\widehat{v}_{x_1}^{(\psi)} \sin \delta_\psi + \widehat{v}_{z_1}^{(\psi)} \cos \delta_\psi \right)^2,$$

$$B_\vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \phi, \delta_\vartheta) = -c_M s_\vartheta \left( \widehat{v}_{x_1}^{(\vartheta)} \sin \delta_\vartheta + \widehat{v}_{y_1}^{(\vartheta)} \cos \delta_\vartheta \right)^2,$$

где  $c_F = 2q$ ,  $c_M = c_F p_2$ ,  $s_\psi = \text{sign} \left( -\widehat{v}_{x_1}^{(\psi)} \sin \delta_\psi + \widehat{v}_{z_1}^{(\psi)} \cos \delta_\psi \right)$ ,  $s_\vartheta = \text{sign} \left( \widehat{v}_{x_1}^{(\vartheta)} \sin \delta_\vartheta + \widehat{v}_{y_1}^{(\vartheta)} \cos \delta_\vartheta \right)$ .

Таким образом, при сформулированных выше допущениях справедливо следующее

**Утверждение.** В системе (2.1)–(2.3) приближенные значения  $\widetilde{M}_{x_1}^s$ ,  $\widetilde{M}_{y_1}^s$ ,  $\widetilde{M}_{z_1}^s$  соответствующих компонент управляющего момента  $\mathbf{M}^s$ , инициированного управлением (3.2), на промежутке  $[t_s, t_f]$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{x_1}^s &= 0, \\ \widetilde{M}_{y_1}^s &= c_M s_\psi \left( -\widehat{v}_{x_1}^{(\psi)} \sin \delta_\psi + \widehat{v}_{z_1}^{(\psi)} \cos \delta_\psi \right)^2 \cos \delta_\psi, \\ \widetilde{M}_{z_1}^s &= -c_M s_\vartheta \left( \widehat{v}_{x_1}^{(\vartheta)} \sin \delta_\vartheta + \widehat{v}_{y_1}^{(\vartheta)} \cos \delta_\vartheta \right)^2 \cos \delta_\vartheta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

С учетом фазовых ограничений (3.4) построим оценки для допустимых значений соответствующих компонент приближения  $\widetilde{M}^s$  управляющего момента  $\mathbf{M}^s$ , которое для управления (3.2) задается выражениями (4.7). В каждый момент времени  $\tau \in [t_s, t_f]$  будем рассматривать  $\widetilde{M}^s$  как вектор-функцию двух переменных  $\delta_\psi$  и  $\delta_\vartheta$ . Для этого зафиксируем значения всех

компонент фазового состояния  $\mathbf{X}(\tau)$  системы (2.1)–(2.3) за исключением  $\delta_\psi$  и  $\delta_\vartheta$ . В результате для каждого фиксированного момента времени  $\tau \in [t_s, t_f]$  определим вектор-функцию

$$\widetilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\delta_\psi, \delta_\vartheta) = \widetilde{\mathbf{M}}^s(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}(\tau), \boldsymbol{\omega}(\tau), \boldsymbol{\phi}(\tau), \delta_\psi, \delta_\vartheta).$$

В силу (4.7) первая компонента  $\widetilde{M}_{x_1}^{(\tau)}$  этой функции является нуль-функцией, а вторая  $\widetilde{M}_{y_1}^{(\tau)}$  и третья  $\widetilde{M}_{z_1}^{(\tau)}$  являются функциями одного аргумента  $\delta_\psi$  и  $\delta_\vartheta$  соответственно. При этом по построению указанные функции являются непрерывными и, следовательно, ограниченными на отрезках  $[-\delta_\psi^{\max}, \delta_\psi^{\max}]$  и  $[-\delta_\vartheta^{\max}, \delta_\vartheta^{\max}]$  соответственно.

Таким образом, в каждый момент времени  $\tau \in [t_s, t_f]$  допустимое во вспомогательной задаче 2 приближение  $\widetilde{\mathbf{M}}^s$  управляющего момента  $\mathbf{M}^s$ , инициированного управлением (3.2), которое обеспечивает в этой задаче выполнение фазовых ограничений (3.4), должно удовлетворять условиям

$$\widetilde{M}_{y_1}^{\min}(\tau) \leq \widetilde{M}_{y_1}^{(\tau)}(\delta_\psi) \leq \widetilde{M}_{y_1}^{\max}(\tau), \quad \widetilde{M}_{z_1}^{\min}(\tau) \leq \widetilde{M}_{z_1}^{(\tau)}(\delta_\vartheta) \leq \widetilde{M}_{z_1}^{\max}(\tau), \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{y_1}^{\min}(\tau) &= \min_{\delta_\psi \in [-\delta_\psi^{\max}, \delta_\psi^{\max}]} \widetilde{M}_{y_1}^{(\tau)}(\delta_\psi), & \widetilde{M}_{y_1}^{\max}(\tau) &= \max_{\delta_\psi \in [-\delta_\psi^{\max}, \delta_\psi^{\max}]} \widetilde{M}_{y_1}^{(t_i)}(\delta_\psi), \\ \widetilde{M}_{z_1}^{\min}(\tau) &= \min_{\delta_\vartheta \in [-\delta_\vartheta^{\max}, \delta_\vartheta^{\max}]} \widetilde{M}_{z_1}^{(\tau)}(\delta_\vartheta), & \widetilde{M}_{z_1}^{\max}(\tau) &= \max_{\delta_\vartheta \in [-\delta_\vartheta^{\max}, \delta_\vartheta^{\max}]} \widetilde{M}_{z_1}^{(t_i)}(\delta_\vartheta). \end{aligned}$$

Далее для краткости приближение  $\widetilde{\mathbf{M}}^s$  управляющего момента  $\mathbf{M}^s$ , которое определяется равенствами (4.7) и удовлетворяет условиям (4.8), будем называть допустимым управляющим моментом во вспомогательной задаче 2.

## 5. Построение допустимых управлений во вспомогательной задаче оптимального управления

Одним из способов реализации движения возвращаемого блока в сторону заданной посадочной вертикали является создание для этого аэродинамической силы, обеспечивающей требуемое движение. Эта сила может возникнуть благодаря приданию соответствующей ориентации корпуса возвращаемого блока относительно вектора скорости набегающего на него потока. Достигать желаемой ориентации корпуса блока предлагается благодаря управляющему моменту  $\widetilde{\mathbf{M}}^s$ , который определяется углами поворота аэродинамических рулей с помощью соотношений (4.7).

Содержательно основная идея предлагаемого алгоритма построения во вспомогательной задаче 2 допустимых управлений заключается в последовательном использовании такого допустимого управляющего момента  $\widetilde{\mathbf{M}}^s$ , который обеспечивает движение возвращаемого блока в сторону заданной посадочной вертикали. Эта идея реализуется путем последовательного выполнения в каждый текущий момент времени следующих операций.

- Задается “желательный” вектор скорости  $\mathbf{v}^*$  центра масс возвращаемого блока.
- С учетом всех ограничений определяется соответствующий этому “желательному” вектору скорости допустимый управляющий момент  $\widetilde{\mathbf{M}}^s$ .
- Вычисляются значения углов  $\delta_\psi$ ,  $\delta_\vartheta$  и строится соответствующее допустимое во вспомогательной задаче 2 управление, действующее на некотором элементарном промежутке времени.

Таким образом, для построения во вспомогательной задаче 2 допустимых управлений предлагается следующая **численная процедура**.

Будем считать, что момент времени  $t_f$  не зафиксирован, а искомое управление  $\mathbf{u}$  строится с помощью итерационной по времени процедуры. Текущий момент времени  $t_i$  ( $i = 0$ ) полагается равным  $t_s$ . Текущее фазовое состояние динамической системы (2.1)–(2.3) инициализируется начальными условиями (2.5). В каждый текущий момент времени  $t_i$  выполняются следующие операции.

1. Задается “желательный” вектор скорости

$$\mathbf{v}^*(t_i) = \|\mathbf{v}(t_i)\| \mathbf{v}_0^*(t_i), \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{v}_0^*(t_i)$  — единичный вектор, который в момент времени  $t_i$  направлен из центра масс блока в сторону посадочной вертикали по прямой, проходящей через центр масс блока и пересекающей посадочную вертикаль под углом  $\chi(t_i)$ . Величина этого угла определяется значением заданной монотонно убывающей функции  $\chi$ .

2. Соответствующий “желательному” вектору скорости  $\mathbf{v}^*(t_i)$  (5.1) допустимый управляющий момент  $\widetilde{\mathbf{M}}^s$  определяется с помощью соотношения

$$\widetilde{\mathbf{M}}^s = k \cdot \mathbf{M}^b(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{v}^*(t_i), \boldsymbol{\omega}(t_i), \boldsymbol{\phi}(t_i)). \quad (5.2)$$

Здесь  $\mathbf{M}^b(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{v}^*(t_i), \boldsymbol{\omega}(t_i), \boldsymbol{\phi}(t_i))$  — момент, возникающий при действии на корпус блока аэродинамической силы  $\mathbf{F}^b(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi})$ , которая вычисляется с помощью формулы (4.1) для текущих пространственного положения  $\mathbf{x}(t_i)$  центра масс блока, его угловой скорости вращения  $\boldsymbol{\omega}(t_i)$  и ориентации  $\boldsymbol{\phi}(t_i)$ , а также для “желательного” вектора скорости  $\mathbf{v}^*(t_i)$ . В (5.2) значение скалярного множителя  $k$ , максимально близкое к единице, определяется из требования, чтобы управляющий момент (5.2) удовлетворял ограничениям (4.8), т. е. был допустимым во вспомогательной задаче 2.

Математически строгое обоснование того, что способ (5.2) определения допустимого в задаче 2 управляющего момента  $\widetilde{\mathbf{M}}^s$  обеспечивает движение центра масс блока в направлении “желательного” вектора скорости  $\mathbf{v}^*(t_i)$ , является весьма нетривиальной задачей. Ее сложность обусловлена прежде всего структурой выражений (4.1), (4.2), которые определяют действующую на поверхность блока аэродинамическую силу  $\mathbf{F}^b$  и ее момент  $\mathbf{M}^b$ , а также нелинейностью уравнений Эйлера (2.2), (2.3).

Однако с учетом аэродинамической устойчивости конструкции блока (см. рис. 1) применимость такого подхода может быть пояснена на следующем примере (см. рис. 2, на котором для компактности используются обозначения  $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^*(t_i)$ ,  $\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{v}(t_i)$ ,  $\boldsymbol{\phi}^{(i)} = \boldsymbol{\phi}(t_i)$ ). Попытка осуществить требуемое движение центра масс блока при его текущей пространственной ориентации  $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$  порождала бы аэродинамическую силу  $\mathbf{F}^b(\boldsymbol{\phi}^{(i)}, \mathbf{v}^*)$ , действующую на корпус блока (рис. 2, левый фрагмент), если бы скорость центра масс была  $\mathbf{v}^*$ . При этом сила управления  $\widetilde{\mathbf{F}}^s$ , момент которой  $\widetilde{\mathbf{M}}^s$  задается выражением (5.2), к некоторому близкому к  $t_i$  моменту времени  $t_j$  способна создать пространственную ориентацию  $\boldsymbol{\phi}^{(j)}$  блока, указанную на рис. 2 (правый фрагмент). Как показывают результаты численного моделирования, такое изменение пространственной ориентации блока инициирует изменение направления вектора скорости его центра масс, которое приводит к значительному уменьшению угла между реализующимся вектором скорости  $\mathbf{v}^{(j)}$  и его “желательным” направлением  $\mathbf{v}^*$  (рис. 2, правый фрагмент).

3. Определяются “желательные” значения  $\delta_\psi^*$ ,  $\delta_\vartheta^*$  углов  $\delta_\psi$  и  $\delta_\vartheta$  соответственно в момент времени  $t_i$  как решение системы уравнений, которые возникают в результате приравнивания в (4.7) правых частей выражений для  $\widetilde{\mathbf{M}}_{y_1}^s$  и  $\widetilde{\mathbf{M}}_{z_1}^s$  к значениям соответствующих компонент допустимого управляющего момента (5.2).

4. Во вспомогательной задаче 2 строится допустимое управление  $\mathbf{u}^{(t_i)} = (u_\psi^{(t_i)}, u_\vartheta^{(t_i)})^\top$ , действующее на элементарном промежутке времени  $[t_i, t_{i+1})$ . Здесь  $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ , где  $\Delta t_i$  — параметр процедуры.

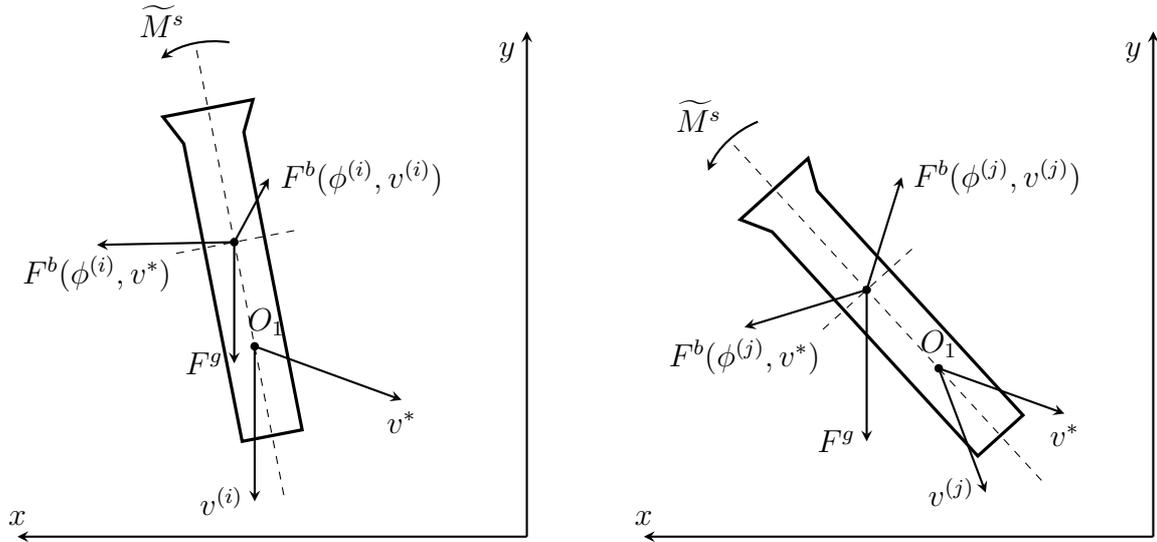


Рис. 2. Схема действующих на блок сил.

Пусть  $\bar{u}_\psi^{(t_i)} = (\delta_\psi^* - \delta_\psi(t_i))/\Delta t_i$ ,  $\bar{u}_\vartheta^{(t_i)} = (\delta_\vartheta^* - \delta_\vartheta(t_i))/\Delta t_i$ . Учитывая ограничения (3.3),

$$u_\psi^{(t_i)} = \begin{cases} \bar{u}_\psi^{(t_i)}, & |\bar{u}_\psi^{(t_i)}| \leq u_\psi^{\max}, \\ s_\psi^{(i)} u_\psi^{\max}, & |\bar{u}_\psi^{(t_i)}| > u_\psi^{\max}, \end{cases} \quad u_\vartheta^{(t_i)} = \begin{cases} \bar{u}_\vartheta^{(t_i)}, & |\bar{u}_\vartheta^{(t_i)}| \leq u_\vartheta^{\max}, \\ s_\vartheta^{(i)} u_\vartheta^{\max}, & |\bar{u}_\vartheta^{(t_i)}| > u_\vartheta^{\max}, \end{cases}$$

где  $s_\psi^{(i)} = \text{sign}(\bar{u}_\psi^{(t_i)})$ ,  $s_\vartheta^{(i)} = \text{sign}(\bar{u}_\vartheta^{(t_i)})$ .

5. Динамическая система (2.1), (2.2), (2.3) с помощью управления  $\mathbf{u}^{(t_i)}$  переводится из текущего фазового состояния в фазовое состояние в следующий момент времени  $t_{i+1}$ .

6. Проверяются условия окончания итерационной процедуры

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) &< h_f^{\min} + \varepsilon_h, \\ J_\mu[\cdot|t_{i+1}] &< \varepsilon_J, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $\varepsilon_h, \varepsilon_J$  — параметры процедуры.

Если выполнено хотя бы одно из указанных условий, итерационная процедура прерывается. Полагается, что  $t_f = t_N$ , где  $N = i + 1$ . Искомое допустимое во вспомогательной задаче 2 управление, действующее на промежутке  $[t_s, t_f]$ , определяется как кусочно-постоянная на этом промежутке вектор-функция

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}^{(t_i)} \mid t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1\}.$$

В случае, если при этом выполнено условие (5.3), то формулируется вывод о том, что построено не только допустимое, но и некоторое субоптимальное во вспомогательной задаче 2 управление.

Ниже приведены результаты численного моделирования во вспомогательной задаче 2 с использованием описанного выше алгоритма построения допустимых в этой задаче управлений.

## 6. Результаты численного моделирования

Численное моделирование управляемого движения возвращаемого блока на атмосферном участке его приведения на посадочную вертикаль проводилось при следующих значениях его основных конструктивных характеристик: масса блока — 12 000 кг; длина цилиндра — 15 м;

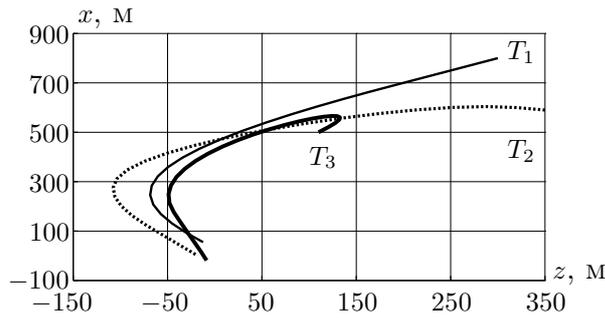


Рис. 3. Проекция траекторий движения блока на плоскость  $Oxz$  на всем промежутке  $[t_s, t_f]$ .

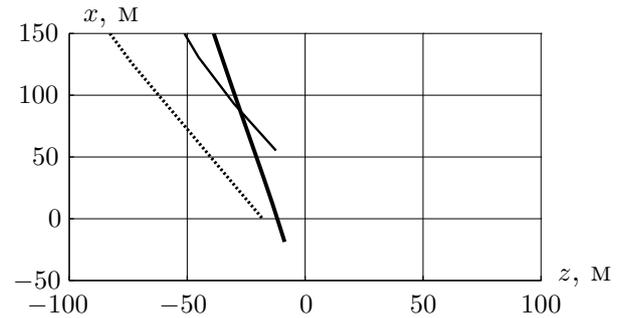


Рис. 4. Фрагменты проекций траекторий движения блока на плоскость  $Oxz$ .

диаметр цилиндра — 2.5 м; высота усеченного конуса — 0.5 м; диаметр внешнего основания усеченного конуса — 3.5 м; площадь аэродинамического руля — 5 кв.м; расстояние от центра масс блока до его носовой части — 5 м.

Ограничения на управление (2.4) и фазовые ограничения (2.6), (2.7) задавались следующими константами:  $u_i^{\max} = 15^\circ/\text{с}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ );  $\delta_i^{\max} = 30^\circ$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ );  $h_f^{\min} = 30$  м.

Во вспомогательной задаче 2 в минимизируемом функционале (3.1) значение параметра  $\mu$  было принято равным  $1 \text{ с}^2$ . В этой задаче численно исследовалось несколько траекторий движения возвращаемого блока, каждая из которых реализовалась в результате некоторого допустимого управления, построенного с помощью описанного выше алгоритма.

Во всех случаях, даже при направлении начальной скорости в противоположную от посадочной вертикали сторону, с помощью построенного допустимого управления обеспечивалось движение блока к этой вертикали.

На рис. 3–10 приведены данные о фазовых траекториях динамической системы (2.1)–(2.3), которые реализовались с помощью допустимых во вспомогательной задаче 2 управлений для трех начальных пространственных точек  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ . Начальные условия (2.5) в этих точках задавались следующим образом.

Для точки  $T_1$ :  $\mathbf{x}(t_s) = (800, 11000, 300)^\top$  (м),  $\|\mathbf{v}(t_s)\|_2 = 200$  (м/с),  $\boldsymbol{\phi}(t_s) = (0, 0, 0)^\top$  ( $^\circ$ ).

Для  $T_2$ :  $\mathbf{x}(t_s) = (590, 10000, 350)^\top$  (м),  $\|\mathbf{v}(t_s)\| = 300$  (м/с),  $\boldsymbol{\phi}(t_s) = (1, 3, 0)^\top$  ( $^\circ$ ).

Для  $T_3$ :  $\mathbf{x}(t_s) = (500, 13000, 110)^\top$  (м),  $\|\mathbf{v}(t_s)\| = 200$  (м/с),  $\boldsymbol{\phi}(t_s) = (3, -1.5, 0)^\top$  ( $^\circ$ ).

Во всех точках  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$   $\boldsymbol{\omega}(t_s) = (0, 0, 0)^\top$  (м/с),  $\boldsymbol{\delta}(t_s) = (0, 0, 0, 0)^\top$  ( $^\circ$ ), а также углы атаки и скольжения в момент времени  $t_s$  полагались равными нулю.

На рис. 3, 4 приведены проекции на горизонтальную плоскость  $Oxz$  (земную поверхность) пространственных траекторий движения возвращаемого блока. На рис. 3 отображены проекции траекторий на всем промежутке  $[t_s, t_f]$ , на рис. 4 — фрагменты этих проекций, соответствующие заключительным участкам движения блока по указанным траекториям. Как видно из рис. 4, во всех случаях построенные допустимые управления обеспечивают пересечение посадочной вертикали траекториями движения блока с точностью, соизмеримой с его геометрическими размерами.

На рис. 5 для фазовой траектории, соответствующей точке  $T_1$ , представлена динамика значений горизонтальных составляющих скорости центра масс блока ( $v_x$  — сплошная линия,  $v_z$  — пунктирная линия) на промежутке  $[t_s, t_f]$ . На рис. 6 для этой же траектории — графики функций  $\delta_\psi(t)$  (сплошная линия) и  $\delta_\vartheta(t)$  (пунктирная линия),  $t \in [t_s, t_f]$ . Аналогичные данные приведены для фазовых траекторий, которые соответствуют точкам  $T_2$  и  $T_3$ , на рис. 7, 8 и рис. 9, 10 соответственно.

Значение конечного момента времени  $t_f$  для точек  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  составило 55.9 с, 47.3 с и 61 с соответственно.

Было проведено исследование влияния значения шага  $\Delta t_i$  на точность приведения блока на посадочную вертикаль. Для  $\Delta t_i$ , равного 0.1 с, значения функционала (3.1) для построенных допустимых управлений составили 815.1 м<sup>2</sup>, 494.52 м<sup>2</sup> и 740.78 м<sup>2</sup> для точек  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$

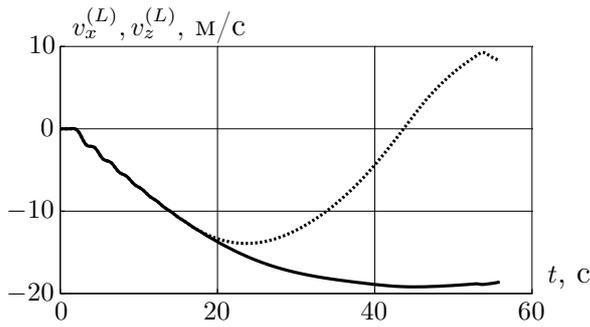


Рис. 5. Начальная точка  $T_1$ . Динамика значений горизонтальных составляющих скорости центра масс блока ( $v_x(t)$  — сплошная линия,  $v_z(t)$  — пунктирная линия),  $t \in [t_s, t_f]$ .

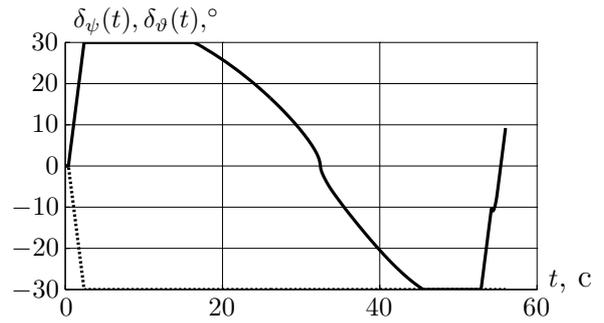


Рис. 6. Начальная точка  $T_1$ . Графики функций  $\delta_\psi(t)$  (сплошная линия) и  $\delta_\theta(t)$  (пунктирная линия),  $t \in [t_s, t_f]$ .

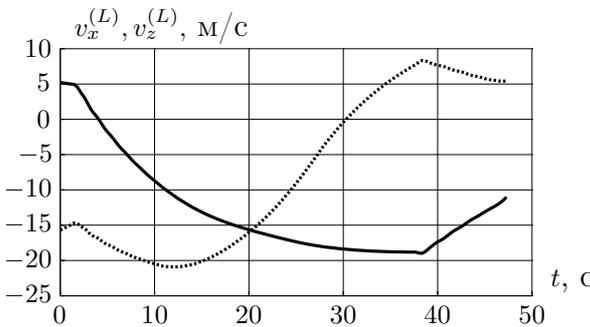


Рис. 7. Начальная точка  $T_2$ . Динамика значений горизонтальных составляющих скорости центра масс блока ( $v_x(t)$  — сплошная линия,  $v_z(t)$  — пунктирная линия),  $t \in [t_s, t_f]$ .

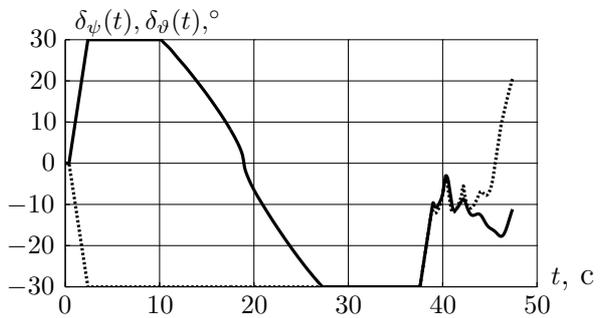


Рис. 8. Начальная точка  $T_2$ . Графики функций  $\delta_\psi(t)$  (сплошная линия) и  $\delta_\theta(t)$  (пунктирная линия),  $t \in [t_s, t_f]$ .

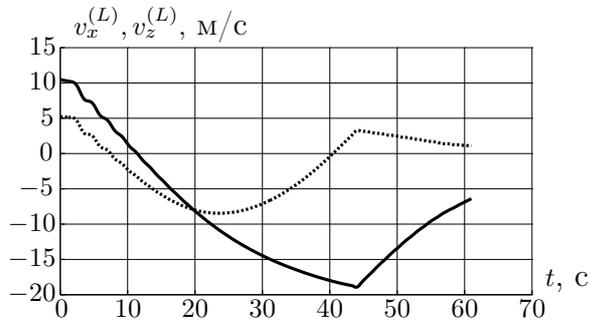


Рис. 9. Начальная точка  $T_3$ . Динамика значений горизонтальных составляющих скорости центра масс блока ( $v_x(t)$  — сплошная линия,  $v_z(t)$  — пунктирная линия),  $t \in [t_s, t_f]$ .

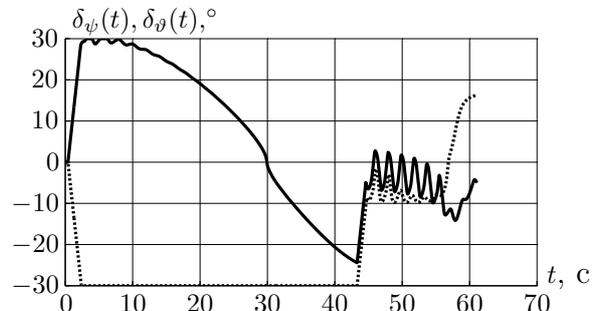


Рис. 10. Начальная точка  $T_3$ . Графики функций  $\delta_\psi(t)$  (сплошная линия) и  $\delta_\theta(t)$  (пунктирная линия),  $t \in [t_s, t_f]$ .

соответственно. Для  $\Delta t_i$ , равного 0.01 с, значения функционала составили 665.11 м<sup>2</sup>, 664.27 м<sup>2</sup> и 713.23 м<sup>2</sup>, а для  $\Delta t_i$ , равного 0.5 с, — 3250.28 м<sup>2</sup>, 702.22 м<sup>2</sup> и 1629.75 м<sup>2</sup>. Из этих данных следует, что уменьшение значения  $\Delta t_i$  в 10 раз приводит к незначительному выигрышу по точности приведения блока на посадочную вертикаль, а увеличение в 5 раз — к заметному ухудшению точности его приведения.

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что за счет задания функции  $\chi(t)$  ( $t \in [t_s, t_f]$ ) с помощью описанной выше процедуры удается построить допустимые во вспомогательной задаче 2 управления, позволяющие достаточно точно привести возвращаемый блок на посадочную вертикаль с малыми абсолютными значениями горизонтальных составляющих компонент вектора скорости его центра масс в посадочной системе координат.

В предложенном алгоритме построения допустимых во вспомогательной задаче 2 управлений функция  $\chi(t)$  ( $t \in [t_s, t_f]$ ) по существу также является управляющим параметром, от которого существенно зависят результаты минимизации значения функционала (3.1). Как представляется, с помощью этой функции возможно построить не только допустимое, но и достаточно близкое к оптимальному (субоптимальное) управление в исследуемой задаче.

### Заключение

В работе рассмотрен подход к построению допустимых управлений в задаче оптимального управления нелинейной динамической системой при наличии фазовых ограничений. На его основе разработан алгоритм построения допустимых управлений в модельной прикладной задаче оптимального управления — задаче приведения возвращаемого на Землю блока ракеты-носителя на посадочную вертикаль.

В работе при ряде упрощающих эту модельную задачу допущений исследован частный способ управления блоком (вспомогательная задача оптимального управления). Во вспомогательной задаче удастся получить приближенные аналитические выражения для компонент аэродинамической силы сопротивления подвижных элементов конструкции блока (аэродинамических рулей) и ее момента в терминах величин, определяющих значения управляющих параметров. В этой задаче для построения допустимого управления предложено, опираясь на аэродинамическую устойчивость конструкции блока, последовательно в каждый момент времени определять такой момент силы сопротивления аэродинамических рулей, который с учетом всех ограничений обеспечивает движение центра масс блока с вектором скорости близким к желаемому. Затем для такого момента могут быть вычислены приближенные значения управляющих параметров, с помощью которых реализуется требуемое движение блока.

Результаты численного моделирования свидетельствуют о работоспособности предложенного подхода для приближенного решения вспомогательной задачи оптимального управления. Как представляется, этот подход может быть применен и при решении более общих задач оптимального управления без учета ряда принятых во вспомогательной задаче допущений. В частности, при наличии ветровой помехи для решения сформулированной в работе основной задачи оптимального управления может быть задействован аппарат теории дифференциальных игр [10] и рассмотренный подход к построению допустимых управлений. Здесь, по всей видимости, для задания в каждый конкретный момент времени “желательного” вектора скорости должны использоваться более сложные правила, существенно учитывающие и текущую помеху. Определение этих правил является продолжением данной работы.

Также одним из направлений дальнейших исследований может быть определение оптимального способа задания функции  $\chi$ , которая является одним из основных ресурсов для оптимизации в рассматриваемой задаче управления, а также учет колебательных процессов при решении задачи управления движением объекта в атмосфере.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонова Н.П., Брюханов Н.А., Четкин С.В. Средства посадки пилотируемого транспортного корабля нового поколения // Космическая техника и технологии. 2014. №4 (7) С. 21–30.
2. Афанасьев В.А., Борзов В.С., Данилкин В.А. и др. Способ спасения ракето-носителей многоразового применения и устройств для его применения / ФГУП ГРЦ им. В.П. Макеева. Патент 2202500 Российская Федерация. 2003. Бюл. № 11.
3. Stappert S., Wilken J., Bussler L., Sippel M. A systematic assessment and comparison of reusable first stage return options // Proc. Internat. Astronautical Congress, IAC, (2017-October). Paper code: IAC-17,D2,4,4,x38027.
4. Параметры Земли 1990 года: справочник. Москва, 2020. 64 с.
5. ГОСТ4401–81. Атмосфера стандартная. Параметры. М.: Изд-во стандартов, 1981. 179 с.
6. Лебедев А.А., Герасюта Н.Ф. Баллистика ракет. М.: Машиностроение, 1970. 244 с.

7. Краснов Н.Ф. Аэродинамика, часть 1. М.: Высшая школа, 1976. Изв. №2. 384 с.
8. Калугин В.Т., Голубев А.Г., Епихин А.С. Аэродинамика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2017. 608 с.
9. Мельников А.П. Аэродинамика больших скоростей. М.: Воениздат, 1961. 424 с.
10. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

Поступила 8.04.2021

После доработки 20.04.2021

Принята к публикации 12.05.2021

Новиков Дмитрий Александрович  
математик первой категории  
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН  
г. Екатеринбург  
e-mail: ya.novikovdmitry@yandex.ru

Кандоба Игорь Николаевич  
канд. физ.-мат. наук,  
старший науч. сотрудник  
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;  
доцент  
Уральский федеральный университет  
г. Екатеринбург.  
e-mail: kandoba@imm.uran.ru

Козьмин Иван Викторович  
науч. сотрудник  
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН  
г. Екатеринбург  
e-mail: ikozmin@imm.uran.ru

Плаксин Антон Романович  
канд. физ.-мат. наук,  
старший науч. сотрудник  
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;  
ассистент  
Уральский федеральный университет  
г. Екатеринбург  
e-mail: a.r.plaksin@imm.uran.ru

## REFERENCES

1. Antonova N.P., Bryukhanov N.A., Chetkin S.V. Landing equipment of the new-generation manned transportation spacecraft. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii*, 2014, no. 4 (7), pp. 21–30 (in Russian).
2. Afanas'ev V.A., Borzov V.S., Danilkin V.A. et al. *Sposob spaseniya raketo-nositelei mnogorazovogo primeneniya i ustroystv dlya ego primeneniya* [A method for rescuing reusable launch vehicles and devices for its use]. Patent 2202500 Russia. 2003.
3. Stappert S., Wilken J., Bussler L., Sippel M. A systematic assessment and comparison of reusable first stage return options. *Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC, 2017-October*, Paper code: IAC-17,D2,4,4,x38027.
4. *Parametry Zemli 1990 goda. Spravochnik* [Parameters of the Earth 1990. Handbook]. Moscow, 2020, 64 p.
5. Russian Standard GOST 4401-81. *Atmosfera standartnaya. Parametry* [Standard atmosphere. Parameters]. Moscow: Izdatel'stvo standartov, 1981, 179 p.
6. Lebedev A.A., Gerasyuta N.F. *Ballistika raket* [Missile ballistics]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1970, 244 p.

7. Krasnov N.F. *Aerodynamics*, Part 1. Moscow: Mir Publ., 1985, 512 p. ISBN: 0121782530. Original Russian text published in Krasnov N.F. *Aerodinamika*, Chast' 1. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 1976, 384 p.
8. Kalugin V.T., Golubev A.G., Epikhin A.S. *Aerodinamika* [Aerodynamics]. Moscow: MGTU Publ., 2017, 608 p. ISBN: 978-5-7038-4428-1.
9. Mel'nikov A.P. *Aerodinamika bol'shikh skorostei* [High-speed aerodynamics]. Moscow: Voenizdat, 1961, 424 p.
10. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*. Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.

Received April 8, 2021

Revised April 20, 2021

Accepted May 12, 2021

*Novikov Dmitrii Aleksandrovich*, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ya.novikovdmitry@yandex.ru.

*Kandoba Igor Nicolaevich*, Cand. Phys.-Math. Sci., Senior Researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: kandoba@imm.uran.ru.

*Koz'min Ivan Victorovich*, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ikozmin@imm.uran.ru.

*Anton Romanovich Plaksin*, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: a.r.plaksin@gmail.com.

Cite this article as: D. A. Novikov, I. N. Kandoba, I. V. Koz'min, A. R. Plaksin. On the solution of a control problem for the motion of an object in the dense layers of the atmosphere, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 169–184.