ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

ЛИНЕЙНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ ОБЪЕКТЫ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ

М. С. Никольский

Линейные управляемые объекты интенсивно изучаются в современной теории управления. Важной динамической характеристикой таких объектов являются их множества достижимости. Например с помощью этих множеств в теории оптимального управления ставятся интересные для приложений задачи. Зная множества достижимости в различные моменты времени, можно грубо оценить динамические возможности изучаемого управляемого объекта. Отметим, что при отсутствии фазовых ограничений для вычисления этих множеств эффективным является аппарат опорных функций. При наличии же фазовых ограничений все становится сложнее. В статье развивается метод приближенного вычисления множеств достижимости для линейных управляемых объектов при наличии фазовых ограничений. Обосновывается сходимость этих приближений к искомому множеству достижимости в смысле метрики Хаусдорфа. Предполагается выпуклость и компактность фазового ограничения и множества, ограничивающего управления. Для построения приближений используются известная формула Коши и разбиения отрезка $[0, T]$, на котором происходит движение, с равномерным шагом. При некотором усилении требований получена оценка скорости сходимости приближений к искомому множеству.

Ключевые слова: линейные управляемые объекты, фазовые ограничения, множества достижимости, формула Коши.

M. S. Nikol'skii. Linear controlled objects with state constraints. Approximate calculation of reachable sets.

Linear controlled objects are intensively studied in modern control theory. An important dynamic characteristic of such objects is their reachable sets. For example, these sets are used in optimal control theory to formulate problems that are interesting for applications. Knowing reachable sets at different times, one can roughly estimate the dynamic capabilities of the controlled object under study. Note that in the absence of state constraints, the techniques of support functions are effective for calculating these sets. Under state constraints, the calculation becomes more complicated. We develop a method for the approximate calculation of reachable sets for linear controlled objects under constraints. The convergence of these approximations to the desired reachable set in the sense of the Hausdorff metric is proved. It is assumed that the state constraint and the set constraining the control are convex and compact. To construct approximations, we use the Cauchy formula and a uniform partition of the interval $[0, T]$ on which the motion occurs. An estimate for the rate of convergence of approximations to the required set is obtained under some additional assumptions.

Keywords: linear controlled objects, phase constraints, reachable sets, Cauchy formula.

MSC: 42C10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-162-168

1. Введение

Управляемые процессы при наличии фазовых ограничений являются важным объектом изучения в математической теории оптимального управления (см., например, [1–4] и др.). Наличие фазовых ограничений существенно усложняет изучение соответствующих оптимизационных задач. Отметим, что важной характеристикой управляемого процесса являются его множества достижимости (см., например, [3; 4]). Для линейных управляемых объектов при отсутствии фазовых ограничений была развита теория, позволяющая эффективно вычислять множества достижимости с помощью аппарата опорных функций (см., например, [4]). Для линейных управляемых объектов при наличии фазовых ограничений конструктивное вычисление множеств достижимости представляет значительные трудности.

Настоящая работа посвящена приближенному вычислению множеств достижимости для линейных управляемых объектов при наличии выпуклого фазового ограничения и выпуклости компакта P, ограничивающего векторное управление u.

2. Основная часть

Рассмотрим линейный управляемый объект вида (см. [1–4])

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, $u \in \mathbb{R}^p$ $(p \geqslant 1)$, A, B — матрицы размерности $n \times n$, $n \times p$ соответственно, причем $u \in P$ — выпуклому компакту из $\mathbb{R}^p$. Символом $\mathbb{R}^k$, где $k \geqslant 1$, условимся обозначать евклидово арифметическое пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы из k чисел, записываемые в виде столбцов. Скалярное произведение векторов x, y из $\mathbb{R}^k$ $\langle x, y\rangle$ и длина вектора $x \in \mathbb{R}^k$: $|x|$ в $\mathbb{R}^k$ вводятся стандартным образом.

Для управляемого объекта (1) фиксированы фазовое ограничение $G \subset \mathbb{R}^n$, начальное условие $x(0) = x_0 \in G$ и момент времени $T > 0$, причем G — непустой выпуклый компакт. Рассматриваются всевозможные измеримые по Лебегу функции $u(t) \in P$, $t \in \Delta = [0, T]$, называемые допустимыми управлениями. Обозначим через U множество таких функций. Каждому допустимому управлению $u(\cdot)$ и начальному условию $x(0) = x_0$ отвечает абсолютно непрерывное решение $x(t, u(\cdot), x_0)$, $t \in \Delta$, уравнения (1). Нас будут интересовать только такие $u(\cdot) \in U$, для которых $x(t, u(\cdot), x_0) \in G$ при всех $t \in \Delta$. Множество таких управлений обозначим W. В общем случае множество W может оказаться пустым. В дальнейшем предполагается, что $W \neq \varnothing$. Множество достижимости $D(T, x_0)$ для рассматриваемого управляемого объекта определим формулой

$$D(T, x_0) = \bigcup_{u(\cdot)\in W} x(T, u(\cdot), x_0). \tag{2}$$

Напомним, что при $u(\cdot) \in U$ для соответствующего решения $x(t) = x(t, u(\cdot), x_0)$, $t \in \Delta$, справедлива формула Коши вида

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\, ds, \tag{3}$$

где e^{tA} — экспоненциал матрицы tA, а интеграл понимается в смысле Лебега. С помощью этой формулы, используя выпуклость множеств P, G, нетрудно обосновать выпуклость множества $D(T, x_0)$ (см. (2)). Используя слабую компактность множества U в гильбертовом пространстве $L_2^p[0, T]$ (см. [2]), замкнутость множества G и формулу (3), можно обосновать, что множество достижимости $D(T, x_0)$ — выпуклый компакт. Мы будем заниматься проблемой приближенного в смысле метрики Хаусдорфа вычисления выпуклого компакта $D(T, x_0)$.

Разобьем отрезок Δ на N равных частей $(N \geqslant 1)$ точками

$$t_i = ih,$$

где $i = 0, \ldots, N$, $h = T/N$. Обозначим

$$E(h, K) = \bigcup_{u(\cdot)\in U_h, y\in K} x(h, u(\cdot), y), \tag{4}$$

где $h > 0$, K — произвольный непустой компакт из $\mathbb{R}^n$, символом U_h обозначено множество измеримых функций $u(t) \in P$ при $t \in [0, h]$, символом $x(t, u(\cdot), y)$ обозначается решение уравнения (1), соответствующее управлению $u(\cdot) \in U_h$ и начальному условию $x(0) = y$. Для множества $E(h, K)$ (см. (4)) с помощью формулы (3) можно обосновать формулу

$$E(h, K) = e^{hA}K + \int_0^h e^{rA}BP\,dr, \tag{5}$$

где "+" означает алгебраическое сложение множеств, а интеграл от многозначного отображения $e^{rA}BP$ по отрезку $[0, h]$ понимается в смысле теории многозначных отображений (см. [4]). Отметим, что в случае выпуклости компакта K множество $E(h, K)$ (см. (5)) является выпуклым компактом. Для дальнейшего нам будет полезна следующая цепочка множеств F_i:

$$\begin{gathered} F_0 = \{x_0\}, \\ F_{i+1} = E(h, F_i) \cap G, \end{gathered} \tag{6}$$

где $h = T/N$, $i = 0, \ldots, N-1$. Можно показать с помощью формулы Коши (3), что при сделанных выше предположениях все множества F_i, $i = 0, \ldots, N$, являются непустыми выпуклыми компактами. Нас будет интересовать множество F_N как некоторая аппроксимация исследуемого множества $D(T, x_0)$ при $N \to +\infty$.

Рассмотрим произвольное управление $\tilde{u}(\cdot) \in W$. Тогда для решения $\tilde{x}(t) = x(t, \tilde{u}(\cdot), x_0)$ при $t \in \Delta$ выполняются включения

$$\tilde{x}(t) \in G.$$

Можно показать с помощью формулы Коши (3), что при $i = 0, \ldots, N$ также будут выполняться включения

$$\tilde{x}(t_i) \in F_i,$$

$i = 0, \ldots, N$, и, в частности, $\tilde{x}(T) \in F_N$. Из определения множества $D(T, x_0)$ (см. (2)) и из включения $\tilde{x}(T) \in F_N$ вытекает включение

$$D(T, x_0) \subset F_N. \tag{7}$$

В дальнейшем нам будут полезны следующие определения.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть X, Y — непустые компакты из $\mathbb{R}^n$. Хаусдорфово расстояние $h(X, Y)$ определяется как наименьшее из $\varepsilon \geqslant 0$, при которых одновременно выполняются включения

$$X \subset Y + S_\varepsilon, \quad Y \subset X + S_\varepsilon, \tag{8}$$

где $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant \varepsilon\}$.

О п р е д е л е н и е 2. Опорная функция $c(X, \psi)$ непустого компакта $X \subset \mathbb{R}^n$ при $\psi \in \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$c(X, \psi) = \max_{x \in X} \langle x, \psi \rangle.$$

Отметим, что свойства опорных функций обстоятельно изложены в [4].

Целью настоящего исследования — обоснование сходимости выпуклых компактов F_N к выпуклому компакту $D(T, x_0)$ при $N \to +\infty$ в метрике Хаусдорфа и получение некоторой оценки сверху скорости этой сходимости при некотором добавочном предположении относительно управляемого объекта (1), вектора x_0 и множества G.

Обозначим через U_N множество таких $\hat{u}(\cdot) \in U$, для которых выполняются включения

$$x(t_i, \hat{u}(\cdot), x_0) \in F_i,$$

где $i = 0, \ldots, N$. Отметим, что из формул (6) при $i = 0, \ldots, N$ и включения $\hat{u}(\cdot) \in U_N$ следуют соотношения

$$x(t_i, \hat{u}(\cdot), x_0) \in G, \tag{9}$$

где $i = 0, \dots, N$. Можно обосновать с помощью формул (3)–(6), что для множества F_N справедлива формула

$$F_N = \bigcup_{\hat{u}(\cdot) \in U_N} x(T, \hat{u}(\cdot), x_0)). \tag{10}$$

Используя компактность множества G и формулы (3), (9), можно доказать, что при $t \in \Delta$ для произвольного $\hat{u}(\cdot) \in U_N$ выполняется неравенство

$$\rho(x(t, \hat{u}(\cdot), x_0), G) \leqslant ch, \tag{11}$$

где константа $c \geqslant 0$, $h = T/N$; величина $\rho(y, G)$ при $y \in \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\rho(y, G) = \min_{z \in G} |y - z|,$$

причем константа c не зависит от N. Из соотношения (11) вытекает при $t \in \Delta$ включение

$$x(t, \hat{u}(\cdot), x_0) \in G + S_{ch},$$

где "+" означает алгебраическое сложение множеств,

$$S_{ch} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant ch\},$$
$$c \geqslant 0, \quad h = T/N.$$

Отметим, что справедливо включение

$$W \subset U_N.$$

Теорема 1. *При $N \to +\infty$ последовательность выпуклых компактов F_N (см.(6), (10)) стремится к выпуклому компакту $D(T, x_0)$ в смысле метрики Хаусдорфа.*

Доказательство. Фиксируем некоторое положительное ε. С учетом соотношений (7), (8) для наших целей достаточно убедиться, что при достаточно больших N будет выполняться включение

$$F_N \subset D(T, x_0) + S_\varepsilon.$$

Допустим, что это обстоятельство не имеет места. Тогда существует такая бесконечная подпоследовательность $N_k \to +\infty$, что

$$F_{N_k} \not\subset D(T, x_0) + S_\varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что для некоторой последовательности управлений $\hat{u}_{N_k} \in U_{N_k}$ выполняется соотношение

$$x(T, \hat{u}_{N_k}(\cdot), x_0) \notin D(T, x_0) + S_\varepsilon. \tag{12}$$

Используем теперь слабую компактность множества U в гильбертовом пространстве $L_2^p[0, T]$ (см. [2]). Переходя, если надо, к подпоследовательности, и производя соответствующую перенумерацию, можем считать, что последовательность $\hat{u}_{N_k}(\cdot)$ при $N_k \to +\infty$ слабо сходится в смысле указанного гильбертова пространства к некоторому управлению $u_0(\cdot)$, которое принадлежит множеству U, и при этом последовательность функций $x(t, \hat{u}_{N_k}(\cdot), x_0)$ стремится равномерно на отрезке $[0, T]$ к функции $x(t, u_0(\cdot), x_0)$. Используя соотношения (11), можно показать, что $x(T, u_0(\cdot), x_0) \in D(T, x_0)$. Но это включение, на основании сказанного, вступает в противоречие с соотношением (12). Мы пришли к противоречию со сделанным предположением.

Теорема доказана.

Для приложений полезно иметь оценку скорости сходимости последовательности F_N, $N = 1, 2, \dots$, к $D(T, x_0)$ в метрике Хаусдорфа. Такого рода оценку удается получить, если выполнено следующее

Предположение. *Существуют такое управление $\overline{u}(\cdot) \in W$ и такая константа $\alpha > 0$, что при $t \in \Delta$ выполняется включение*

$$x(t, \overline{u}(\cdot), x_0) + S_\alpha \subset G.$$

Теорема 2. *При этом предположении при $N \to +\infty$ хаусдорфово расстояние между выпуклыми компактами F_N и $D(T, x_0)$ можно оценить сверху величиной c_1/N, где c_1 — некоторая положительная константа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом соотношений (7), (8) для наших целей достаточно убедиться, что при $N \geqslant 1$ будет выполняться включение

$$F_N \subset D(T, x_0) + (c_2/N)S_1,$$

где c_2 — некоторая неотрицательная константа, не зависящая от N. Тогда в качестве константы c_1 можно будет взять константу c_2. Фиксируем некоторое $N \geqslant 1$ и рассмотрим некоторое управление $\hat{u}(\cdot)$ из множества U_N. Этому управлению соответствует решение $\hat{x}(t) = x(t, \hat{u}(\cdot), x_0)$, а управлению $\overline{u}(\cdot)$ — решение $\overline{x}(t) = x(t, \overline{u}(\cdot), x_0)$. Рассмотрим также управление

$$u_\beta(t) = \beta\overline{u}(t) + (1 - \beta)\hat{u}(t) \tag{13}$$

на Δ, где число $\beta \in [0, 1]$. Из выпуклости множества P следует, что $u_\beta(\cdot) \in U$. Управлению $u_\beta(t)$ соответствует решение $x_\beta(t, x_0)$, причем в силу формулы Коши (см. (3)) при $t \in \Delta$ имеет место равенство

$$x_\beta(t) = \beta\overline{x}(t) + (1 - \beta)\hat{x}(t). \tag{14}$$

Так как управление $\hat{u}(\cdot)$ принадлежит множеству U_N, то при $t \in \Delta$ имеет место неравенство (11). Прибавим алгебраически шар βS_α к обеим частям равенства (14). С помощью предположения и соотношения (11) получаем при $t \in \Delta$ включение

$$x_\beta(t) + \beta S_\alpha \subset \beta G + (1 - \beta)(G + S_{ch}). \tag{15}$$

Учитывая, что $\beta G + (1 - \beta)G = G$, из (15) при $t \in \Delta$ имеем

$$x_\beta(t) + \beta S_\alpha \subset G + (1 - \beta)S_{ch}, \tag{16}$$

где $h = T/N$. С помощью аппарата опорных функций (см. [4]) из включения (16) при $t \in \Delta$ получаем неравенство

$$\langle x_\beta(t), \psi\rangle + \beta\alpha|\psi| \leqslant c(G, \psi) + (1 - \beta)ch|\psi|,$$

где ψ — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$.

До сих пор число β было произвольным числом из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим следующее уравнение относительно величины β:

$$\beta\alpha = (1 - \beta)ch. \tag{17}$$

Его решением является величина

$$\beta_h = ch/(\alpha + ch). \tag{18}$$

Отметим, что величина $\beta_h \in [0, 1]$. Из соотношений (14)–(18) при $t \in \Delta$ и $\psi \in \mathbb{R}^n$ получаем неравенство

$$\langle x_{\beta_h}(t), \psi\rangle \leqslant c(G, \psi).$$

Отсюда, используя выпуклость компакта G, с помощью аппарата опорных функций (см. [4]) имеем, что при $t \in \Delta$
$$x_{\beta_h}(t) \in G. \tag{19}$$
Из формулы (14) мы выводим следующее соотношение:
$$x_{\beta_h}(T) - \hat{x}(T) = \beta_h(\overline{x}(T) - \hat{x}(T)). \tag{20}$$

С помощью формулы Коши (3) при произвольном $u(\cdot) \in U$ нетрудно обосновать неравенство
$$|x(T, u(\cdot), x_0)| \leqslant c_3, \tag{21}$$
где c_3 — некоторая положительная конструктивно вычислимая константа. С помощью неравенства (21) из соотношения (20) получаем важное неравенство
$$|x_{\beta_h}(T) - \hat{x}(T)| \leqslant 2c_3\beta_h. \tag{22}$$
Отметим, что в силу произвольности выбора управления $\hat{u}(\cdot)$ из U_N в (22) векторы $\hat{x}(T)$ заметают все множество F_N. Отсюда и из соотношений (11), (18), (19), $h = T/N$ получаем включения
$$F_N \subset D(T, x_0) + 2c_3\beta_h S_1 \subset D(T, x_0) + (2cc_3T/N\alpha)S_1.$$
Теперь, полагая $c_2 = 2cc_3T/\alpha$, мы получаем искомое включение при $N \geqslant 1$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Отметим, что управление вида (13) ранее использовалось в [2, с. 927–930] при доказательстве теоремы 1, которая посвящена численному методу приближенного решения линейных задач управления с терминальным функционалом при наличии фазового ограничения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
2. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. Кн. 2. М.: МЦНМО, 2011.
3. **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. **Благодатских В. И.** Введение в оптимальное управление. Линейная теория. М.: Высшая школа, 2001.

Поступила 2.02.2021
После доработки 15.02.2021
Принята к публикации 22.02.2021

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
г. Москва
e-mail: mni@mi-ras.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishechenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes.* N Y; London: John Wiley & Sons, 1962, 360 p. doi: 10.1002/zamm.19630431023. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov.* Moscow: Nauka Publ., 1976, 392 p.
2. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Vol. 2. Moscow: MTsNMO Publ., 2011, 433 p. ISBN: 978-5-94057-708-9.

3. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* N Y; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya.* Moscow: Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
4. Blagodatskikh V.I. *Vvedenie v optimal'noe upravlenie* (*lineinaya teoriya*) [Introduction to optimal control (linear theory)]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 2001. ISBN: 5-06-003983-8 .

Received February 2, 2021
Revised February 15, 2021
Accepted February 22, 2021

Mikhail Sergeevich Nikolskii, Dr. Phys.-Math. Sci, Prof., Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Science, Moscow, 119991 Russia, e-mail: mni@mi-ras.ru .

Cite this article as: M. S. Nikol'skii. Linear controlled objects with state constraints. Approximate calculation of reachable sets, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 162–168 .