ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

О СТРАТЕГИЯХ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО СДВИГА В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин

Рассматривается дифференциальная игра, в которой движение конфликтно-управляемой динамической системы описывается уравнением с запаздыванием, начальное условие определяется кусочно-непрерывной функцией, а оптимизируемый показатель качества оценивает историю движения, реализующуюся к терминальному моменту времени, и включает интегральную оценку реализаций управлений игроков. Обосновывается оптимальность позиционных стратегий игроков, построенных методом экстремального сдвига на сопутствующую точку. При этом главным результатом работы является то, что сопутствующая точка выбирается из конечномерной окрестности текущего состояния системы.

Ключевые слова: позиционная дифференциальная игра, система с запаздыванием, экстремальный сдвиг.

N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. On extremal shift strategies in delayed systems.

We consider a differential game in which the motion of a conflict-controlled dynamical system is described by an equation with delay, the initial condition is determined by a piecewise continuous function, and the performance index assesses the history of the motion realized by the terminal time and involves an integral estimate for the realizations of the players' controls. The optimality of the players' positional strategies constructed by the method of extremal shift to an accompanying point is proved. The main result of the paper states that the accompanying point is chosen from a finite-dimensional neighborhood of the current state of the system.

Keywords: positional differential game, delayed system, extremal shift.

MSC: 49J25, 49N70, 49N35

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-150-161

Введение

В теории позиционных дифференциальных игр (см. [1–3]) для систем обыкновенных дифференциальных уравнений одним из эффективных способов построения оптимальных позиционных стратегий игроков является процедура экстремального сдвига на сопутствующую точку. В случае дифференциальных игр сближения-уклонения сопутствующая точка определяется как точка из множества позиционного поглощения, ближайшая к текущему состоянию системы, а в случае дифференциальных игр на минимакс-максимин заданного показателя качества — как точка, в которой достигается минимум (максимум) функции цены в окрестности текущего состояния системы.

Для систем с запаздыванием решения позиционных дифференциальных игр на основе процедуры экстремального сдвига исследовались, например, в работах [4–7]. При этом для дифференциальных игр сближения-уклонения в работах [4; 5] была предложена модифицированная процедура экстремального сдвига, в которой сопутствующая точка выбиралась по экстремальной функциональной последовательности из множества позиционного поглощения. Такая модификация связана с тем, что множество позиционного поглощения в системах с запаздыванием состоит из историй движений системы, т. е. является функциональным. Подобная модификация экстремального сдвига применялась в системах с запаздыванием и при решении дифференциальных игр на минимакс-максимин показателя качества (см. [6; 7]). В этом случае сопутствующая точка выбиралась по экстремальной функциональной последовательности из функциональной окрестности текущей истории движения системы. В продолжение исследований [6; 7] в настоящей статье показано, что при достаточно общих условиях сопутствующую точку достаточно искать лишь в конечномерной окрестности текущего состояния системы. Тогда процедура экстремального сдвига существенно упрощается как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения численной реализации. Выбор подходящих условий следует работе [8] и по своей сути является таким, чтобы обеспечить определенную интегральную липшицевость функционала цены.

1. Дифференциальная игра

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $\|\cdot\|$. Функцию $x(\cdot)\colon [a,b)\mapsto\mathbb{R}^n$ будем называть *кусочно-непрерывной*, если существуют $a=\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_l=b$ такие, что для каждого $i\in\overline{1,l-1}$ функция $x(\cdot)$ непрерывна на $[\xi_i,\xi_{i+1})$ и существует конечный предел $x(\xi)$ при $\xi\to\xi_{i+1}-0$. Обозначим через $\mathrm{PC}([a,b),\mathbb{R}^n)$ линейное пространство кусочно-непрерывных функций $x(\cdot)\colon [a,b)\mapsto\mathbb{R}^n$.

Пусть $t_0<\vartheta$ и $h>0$. Обозначим

$$\mathrm{PC}=\mathrm{PC}([-h,0),\mathbb{R}^n),\quad \mathbb{G}=[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\times\mathrm{PC}.$$

Определим на пространстве PC следующие нормы:

$$\|w(\cdot)\|_1=\int\limits_{-h}^{0}\|w(\xi)\|\,\mathrm{d}\xi,\quad \|w(\cdot)\|_\infty=\sup_{\xi\in[-h,0)}\|w(\xi)\|,\quad w(\cdot)\in\mathrm{PC}.$$

Кроме того, всюду ниже будем использовать обозначения

$$\begin{gathered}B(\alpha)=\big\{x\in\mathbb{R}^n\colon \|x\|\le\alpha\big\},\quad B^1(\alpha)=\big\{x\in\mathbb{R}\colon |x|\le\alpha\big\},\\ P(\alpha)=\big\{(x,r(\cdot))\in B(\alpha)\times\mathrm{PC}\colon \|r(\cdot)\|_\infty\le\alpha\big\},\end{gathered}\qquad \alpha>0. \tag{1.1}$$

Пусть $(\tau,z,w(\cdot))\in\mathbb{G}$. Рассмотрим дифференциальную игру, в которой движение конфликтно-управляемой динамической системы описывается уравнением с запаздыванием

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-h),u(t),v(t)),\quad t\in[\tau,\vartheta],\quad x(t)\in\mathbb{R}^n,\quad u(t)\in\mathbb{U},\quad v(t)\in\mathbb{V}, \tag{1.2}$$

при начальном условии

$$x(\tau)=z,\quad x(t)=w(t-\tau),\quad t\in[\tau-h,\tau), \tag{1.3}$$

а оптимизируемый показатель качества имеет вид

$$\gamma=\sigma(x(\vartheta),x_\vartheta(\cdot))+\int\limits_{\tau}^{\vartheta}f^0(t,x(t),x(t-h),u(t),v(t))\,\mathrm{d}t. \tag{1.4}$$

Здесь t — время; $x(t)$ — вектор состояния в момент времени t; $\dot{x}(t)=\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$; $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{V}\subset\mathbb{R}^l$ — компактные множества; $u(t)$ и $v(t)$ — управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно. Для любого $t\in[\tau,\vartheta]$ через $x_t(\cdot)$ обозначаем функцию из PC такую, что $x_t(\xi)=x(t+\xi)$, $\xi\in[-h,0)$.

Цель первого игрока — минимизировать показатель качества γ, цель второго — максимизировать этот показатель.

Предполагаем, что для функций $f(t,x,y,u,v) \in \mathbb{R}^n$, $f^0(t,x,y,u,v) \in \mathbb{R}$, $(t,x,y,u,v) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ и функционала $\sigma(x,r(\cdot)) \in \mathbb{R}$, $(x,r(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{PC}$, выполнены следующие условия:

(f_1) Функции f и f^0 непрерывны.

(f_2) Существует такая константа $c_f > 0$, что справедливо неравенство

$$\big\|f(t,x,y,u,v)\big\| + \big|f^0(t,x,y,u,v)\big| \leq c_f\big(1+\|x\|+\|y\|\big), \quad (t,x,y,u,v) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \times \mathbb{V}.$$

(f_3) Для любого $\alpha > 0$ существует такое $\lambda_f = \lambda_f(\alpha) > 0$, что имеет место оценка

$$\big\|f(t,x,y,u,v) - f(t,x',y',u,v)\big\| + \big|f^0(t,x,y,u,v) - f^0(t,x',y',u,v)\big| \leq \lambda_f\big(\|x-x'\|+\|y-y'\|\big),$$

$$t \in [t_0,\vartheta], \quad x,x',y,y' \in B(\alpha), \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}.$$

(f_4) Для любых $t \in [t_0,\vartheta]$, $x,y,s \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\min_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}} g(t,x,y,s,\eta,u,v) = \max_{v\in\mathbb{V}}\min_{u\in\mathbb{U}} g(t,x,y,s,\eta,u,v),$$

где

$$g(t,x,y,s,\eta,u,v) = \langle f(t,x,y,u,v), s\rangle + f^0(t,x,y,u,v)\eta. \tag{1.5}$$

(σ) Для любого $\alpha > 0$ найдется такое $\lambda_\sigma = \lambda_\sigma(\alpha) > 0$, что имеет место оценка

$$\big|\sigma(x,r(\cdot)) - \sigma(x',r'(\cdot))\big| \leq \lambda_\sigma\big(\|x-x'\|+\|r(\cdot)-r'(\cdot)\|_1\big), \quad (x,r(\cdot)),(x',r'(\cdot)) \in P(\alpha).$$

Через $\Lambda(\tau,z,w(\cdot))$ обозначим множество функций $x(\cdot)\colon [\tau-h,\vartheta] \mapsto \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию (1.3) и липшицевых на отрезке $[\tau,\vartheta]$. Под допустимыми реализациями управлений первого и второго игроков понимаем измеримые (по Лебегу) функции $u(\cdot)\colon [\tau,\vartheta] \mapsto \mathbb{U}$ и $v(\cdot)\colon [\tau,\vartheta] \mapsto \mathbb{V}$ соответственно. Через $\mathcal{U}_\tau$ и $\mathcal{V}_\tau$ обозначим множества допустимых реализаций управлений первого и второго игроков. При условиях (f_1)–(f_3) каждая пара реализаций $(u(\cdot),v(\cdot)) \in \mathcal{U}_\tau \times \mathcal{V}_\tau$ порождает единственное движение $x(\cdot) = x(\cdot \mid \tau,z,w(\cdot),u(\cdot),v(\cdot))$ системы (1.2), (1.3) — функцию из $\Lambda(\tau,z,w(\cdot))$, удовлетворяющую уравнению (1.2) почти всюду. Данный факт может быть доказан на основе метода шагов (см., например, [9, §1, разд. 2]), учитывающего разрывы функции $w(\cdot)$, и теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [10, §1]).

Дифференциальную игру (1.2)–(1.4) будем рассматривать в классе квазистратегий (см., например, [2, гл. III, §3]) или, в другой терминологии, неупреждающих стратегий игроков (см., например, [11, Ch. VIII, Sect. 1]).

Под квазистратегией первого игрока понимаем такое отображение $Q^u_\tau\colon \mathcal{V}_\tau \mapsto \mathcal{U}_\tau$, что для любых $v(\cdot),v'(\cdot) \in \mathcal{V}_\tau$ и $t \in [\tau,\vartheta]$, удовлетворяющих равенству $v(\xi) = v'(\xi)$ при почти всех $\xi \in [\tau,t]$, будет выполнено равенство $Q^u_\tau[v(\cdot)](\xi) = Q^u_\tau[v'(\cdot)](\xi)$ при почти всех $\xi \in [\tau,t]$.

Квазистратегия первого игрока Q^u_τ вместе с реализацией управления второго игрока $v(\cdot) \in \mathcal{V}_\tau$ определяют реализацию управления первого игрока $u(\cdot) = Q^u_\tau[v(\cdot)](\cdot)$, движение $x(\cdot) = x(\cdot \mid \tau,z,w(\cdot),u(\cdot),v(\cdot))$ системы (1.2), (1.3) и значение $\gamma = \gamma(\tau,z,w(\cdot),Q^u_\tau,v(\cdot))$ показателя качества (1.4). Оптимальным гарантированным результатом первого игрока называем величину

$$\rho^u(\tau,z,w(\cdot)) = \inf_{Q^u_\tau}\sup_{v(\cdot)\in\mathcal{V}_\tau} \gamma(\tau,z,w(\cdot),Q^u_\tau,v(\cdot)).$$

Аналогичным образом, под квазистратегией второго игрока понимаем такое отображение $Q^v_\tau\colon \mathcal{U}_\tau \mapsto \mathcal{V}_\tau$, что для любых $u(\cdot),u'(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ и $t \in [\tau,\vartheta]$, удовлетворяющих равенству $u(\xi) = u'(\xi)$ при почти всех $\xi \in [\tau,t]$, справедливо равенство $Q^v_\tau[u(\cdot)](\xi) = Q^v_\tau[u'(\cdot)](\xi)$ при почти всех $\xi \in [\tau,t]$. Такая квазистратегия вместе с реализацией управления первого игрока $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ определяет реализацию управления второго игрока $v(\cdot) = Q^v_\tau[u(\cdot)](\cdot)$, движение $x(\cdot) =$

$x(\cdot\,|\,\tau, z, w(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ системы (1.2), (1.3) и значение $\gamma = \gamma(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot), Q^v_\tau)$. Оптимальным гарантированным результатом второго игрока называем величину

$$\rho^v(\tau, z, w(\cdot)) = \sup_{Q^v_\tau} \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_\tau} \gamma(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot), Q^v_\tau).$$

Из [12, теорема 2.16] вытекает, что при любых $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ дифференциальная игра (1.2)–(1.4) имеет цену, т. е. справедливо равенство $\rho^u(\tau, z, w(\cdot)) = \rho^v(\tau, z, w(\cdot))$. Функционал

$$\rho = \rho(\tau, z, w(\cdot)) = \rho^u(\tau, z, w(\cdot)) = \rho^v(\tau, z, w(\cdot)), \quad (\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G},$$

называем *функционалом цены дифференциальной игры* (1.2)–(1.4). Кроме того, из [12, леммы 5.2, 5.3] вытекает, что для функционала цены ρ выполняются следующие условия:

(ρ_1) Справедливо равенство $\rho(\vartheta, z, w(\cdot)) = \sigma(z, w(\cdot))$, $(z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{PC}$.

(ρ_2) Для любого $\alpha > 0$ существует такое $\lambda_\rho = \lambda_\rho(\alpha) > 0$, что имеет место оценка

$$\big\|\rho(t, x, r(\cdot)) - \rho(t, x', r'(\cdot))\big\| \le \lambda_\rho\big(\|x - x'\| + \|r(\cdot) - r'(\cdot)\|_1\big),$$
$$t \in [t_0, \vartheta], \quad (x, r(\cdot)), (x', r'(\cdot)) \in P(\alpha).$$

(ρ_3) Для любых $(t, x, r(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $t' \in [t, \vartheta]$, $\zeta > 0$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}_t$ найдется такое $u'(\cdot) \in \mathcal{U}_t$, что для движения $y(\cdot) = x(\cdot\,|\,t, x, r(\cdot), u'(\cdot), v(\cdot))$ будет справедливо неравенство

$$\rho(t', y(t'), y_{t'}(\cdot)) + \int_t^{t'} f^0(\xi, y(\xi), y(\xi - h), u'(\xi), v(\xi))\,\mathrm{d}\xi \le \rho(t, x, r(\cdot)) + \zeta.$$

(ρ_4) Для любых $(t, x, r(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $t' \in [t, \vartheta]$, $\zeta > 0$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}_t$ найдется такое $v'(\cdot) \in \mathcal{V}_t$, что для движения $y(\cdot) = x(\cdot\,|\,t, x, r(\cdot), u(\cdot), v'(\cdot))$ будет справедливо неравенство

$$\rho(t', y(t'), y_{t'}(\cdot)) + \int_t^{t'} f^0(\xi, y(\xi), y(\xi - h), u(\xi), v'(\xi))\,\mathrm{d}\xi \ge \rho(t, x, r(\cdot)) - \zeta.$$

2. Оптимальные позиционные стратегии игроков

Пусть зафиксировано число $\alpha_0 > 0$. Определим множество

$$\mathbb{G}_* = \big\{(t, x, r(\cdot)) \in \mathbb{G}\colon (x, r(\cdot)) \in P(\alpha(t))\big\}, \quad \alpha(t) = \frac{1}{2}\big((1 + 2\alpha_0)e^{2c_f(t - t_0)} - 1\big), \tag{2.1}$$

где константа c_f взята из условия (f_2), а множество $P(\alpha(t))$ определяется в согласии с (1.1).

Пусть $\varepsilon > 0$. По числу $\alpha_* = \alpha(\vartheta)$ в согласии с условием (f_3) выберем число $\lambda_f = \lambda_f(\alpha_*)$. Определим функцию

$$\mu(t, s, \eta) = \big(\|s\|^2 + |\eta|^2\big)e^{-4\lambda_f(t - t_0)}, \quad (t, s, \eta) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

и множество

$$\Omega(t, x, \varepsilon) = \big\{(y, \eta) \in B(\alpha(t)) \times B^1(2\alpha(t))\colon \mu(t, x - y, \eta) \le (1 + t - t_0)\varepsilon^2\big\}. \tag{2.3}$$

По функционалу цены ρ определим позиционные стратегии первого и второго игроков

$$\begin{aligned} U^\circ(t, x, r(\cdot), \varepsilon) &\in \operatorname*{argmin}_{u\in\mathbb{U}} \max_{v\in\mathbb{V}} g(t, x, r(-h), s_u, \eta_u, u, v),\\ V^\circ(t, x, r(\cdot), \varepsilon) &\in \operatorname*{argmax}_{v\in\mathbb{V}} \min_{u\in\mathbb{U}} g(t, x, r(-h), s_v, \eta_v, u, v), \end{aligned} \quad (t, x, r(\cdot)) \in \mathbb{G}, \tag{2.4}$$

где функция g определена в (1.5), $s_u = x - y_u$, $s_v = y_v - x$ и сопутствующие точки (y_u, η_u) и (y_v, η_v) определяются по правилу

$$(y_u, \eta_u) \in \underset{(y,\eta)\in\Omega(t,x,\varepsilon)}{\operatorname{argmin}} \big(\rho(t, y, r(\cdot)) - \eta\big), \quad (y_v, \eta_v) \in \underset{(y,\eta)\in\Omega(t,x,\varepsilon)}{\operatorname{argmax}} \big(\rho(t, y, r(\cdot)) + \eta\big). \tag{2.5}$$

Пусть заданы позиция $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*$, число $\delta > 0$ и разбиение отрезка $[\tau, \vartheta]$:

$$\Delta_\delta = \big\{t_i \colon 0 < t_{i+1} - t_i < \delta,\ i \in \overline{1,k},\ t_1 = \tau,\ t_{k+1} = \vartheta\big\}. \tag{2.6}$$

Тройка $\{U^\circ, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ определяет закон управления первого игрока, который в цепи обратной связи последовательно по шагам разбиения Δ_δ формирует кусочно-постоянную реализацию $u^\circ(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ по правилу

$$u^\circ(t) = U^\circ(t_i, x(t_i), x_{t_i}(\cdot), \varepsilon), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i \in \overline{1,k}. \tag{2.7}$$

Таким образом, в паре с реализацией $v(\cdot) \in \mathcal{V}_\tau$ закон $\{U^\circ, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ однозначно порождает движение $x(\cdot) = x(\cdot \,|\, \tau, z, w(\cdot), u^\circ(\cdot), v(\cdot))$ системы (1.2). Реализовавшееся при этом значение показателя качества (1.4) обозначим через $\gamma = \gamma(\tau, z, w(\cdot); U^\circ, \varepsilon, \Delta_\delta; v(\cdot))$.

Аналогично, тройка $\{V^\circ, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ определяет закон управления второго игрока, который формирует реализацию $v^\circ(\cdot) \in \mathcal{V}_\tau$ по правилу

$$v^\circ(t) = V^\circ(t_i, x(t_i), x_{t_i}(\cdot), \varepsilon), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i \in \overline{1,k}.$$

В паре с реализацией $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ закон $\{V^\circ, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ однозначно порождает движение $x(\cdot) = x(\cdot \,|\, \tau, z, w(\cdot), u(\cdot), v^\circ(\cdot))$ системы (1.2). Реализовавшееся при этом значение показателя качества (1.4) обозначим через $\gamma = \gamma(\tau, z, w(\cdot); u(\cdot); V^\circ, \varepsilon, \Delta_\delta)$.

Теорема. *Пусть $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*$ и $\zeta > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует такое число $\varepsilon_* > 0$, что каково бы ни было число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$, найдется такое число $\delta > 0$, при котором для любого разбиения Δ_δ (2.6) и любой реализации $v(\cdot) \in \mathcal{V}_\tau$ будет справедливо неравенство*

$$\gamma(\tau, z, w(\cdot); U^\circ, \varepsilon, \Delta_\delta; v(\cdot)) \le \rho(\tau, z, w(\cdot)) + \zeta. \tag{2.8}$$

2. *Существует такое число $\varepsilon_* > 0$, что каково бы ни было число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$, найдется такое число $\delta > 0$, при котором для любого разбиения Δ_δ (2.6) и любой реализации $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ будет справедливо неравенство*

$$\gamma(\tau, z, w(\cdot); u(\cdot); V^\circ, \varepsilon, \Delta_\delta) \ge \rho(\tau, z, w(\cdot)) - \zeta.$$

В согласии с теорией позиционных дифференциальных игр (см. [1–3]) теорема говорит, что позиционные стратегии U° и V° являются оптимальными.

3. Доказательство теоремы

Лемма 1. *Пусть $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}_\tau$. Тогда для движения $x(\cdot) = x(\cdot \,|\, \tau, z, w(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ системы (1.2), (1.3) справедливо включение $(t, x(t), x_t(\cdot)) \in \mathbb{G}_*$, $t \in [\tau, \vartheta]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (2.1) в силу включения $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*$ имеем

$$\|x(\tau)\| = \|z\| \le \alpha(\tau), \quad \|x(t)\| = \|w(t - \tau)\| \le \alpha(\tau), \quad t \in [\tau - h, \tau). \tag{3.1}$$

Пользуясь первым неравенством в (3.1) и условием (f_2), для движения $x(\cdot)$ выводим

$$\|x(t)\| \le \|z\| + \int\limits_\tau^t \big\|f(\xi, x(\xi), x(\xi - h), u(\xi), v(\xi))\big\| \,\mathrm{d}\xi \le \alpha(\tau) + c_f \int\limits_\tau^t \big(1 + 2 \sup_{\zeta\in[\tau-h,\xi]} \|x(\zeta)\|\big) \,\mathrm{d}\xi.$$

Далее, принимая во внимание монотонность по t правой части этого неравенства и вторую оценку в (3.1), для функции $\varphi(t) = 1 + 2 \sup\limits_{\zeta\in[\tau-h,t]} \|x(\zeta)\|$, $t \in [\tau,\vartheta]$ получаем

$$\varphi(t) \leq 1 + 2\alpha(\tau) + 2c_f \int\limits_{\tau}^{t} \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad t \in [\tau,\vartheta].$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла — Беллмана (см., например, [13, с. 43]) выводим оценку $\varphi(t) \leq (1+2\alpha(\tau))e^{2c_f(t-\tau)}$, $t \in [\tau,\vartheta]$. Из нее, учитывая определение (2.1) функции α, получаем неравенство $\sup\limits_{\zeta\in[\tau-h,t]} \|x(\zeta)\| \leq \alpha(t)$, из которого заключаем, что $(t, x(t), x_t(\cdot)) \in \mathbb{G}_*$.

Лемма доказана.

Пусть $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}_\tau$. Посредством $x^0(\cdot) = x^0(\cdot \,|\, \tau, z, w(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ будем обозначать функцию

$$x^0(t) = \int\limits_{\tau}^{t} f^0(\xi, x(\xi), x(\xi-h), u(\xi), v(\xi))\,\mathrm{d}\xi, \quad t \in [\tau,\vartheta], \tag{3.2}$$

где $x(\cdot) = x(\cdot \,|\, \tau, z, w(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ — движение системы (1.2), (1.3).

Лемма 2. *При любых* $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ *и* $v(\cdot) \in \mathcal{V}_\tau$ *для движения* $x(\cdot) = x(\cdot \,|\, \tau, z, w(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ *системы* (1.2), (1.3) *и функции* $x^0(\cdot) = x^0(\cdot \,|\, \tau, z, w(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ *будет справедливо неравенство*

$$\max\big\{\|x(t) - x(t')\|, |x^0(t) - x^0(t')|\big\} \leq |\alpha(t) - \alpha(t')|, \quad t, t' \in [\tau,\vartheta].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1, учитывая определение (2.1) множества $\mathbb{G}_*$, вытекает оценка $\max\{\|x(t)\|, \|x(t-h)\|\} \leq \alpha(t)$, $t \in [\tau,\vartheta]$. Пользуясь этой оценкой вместе с условием (f_2) и определением (2.1) функции α, для движения $x(\cdot)$ при всех $t, t' \in [\tau,\vartheta]$ выводим

$$\|x(t) - x(t')\| \leq c_f \Big| \int\limits_{t}^{t'} \big(1 + \|x(\xi)\| + \|x(\xi-h)\|\big)\,\mathrm{d}\xi \Big| \leq c_f \Big| \int\limits_{t}^{t'} \big(1 + 2\alpha(\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi \Big| = |\alpha(t) - \alpha(t')|.$$

Аналогично можно доказать, что $|x^0(t) - x^0(t')| \leq |\alpha(t) - \alpha(t')|$, $t, t' \in [\tau,\vartheta]$.

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Пусть $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}_*$ и $\zeta > 0$. Будем доказывать первое утверждение теоремы. Второе утверждение может быть доказано аналогично.

По функции α, определенной в (2.1), и константе c_f из условия (f_2) определим числа

$$\alpha_* = \alpha(\vartheta), \quad \lambda_* = c_f\,(1 + 2\alpha_*). \tag{3.3}$$

По условиям (f_3), (σ) и (ρ_2) определим числа $\lambda_f = \lambda_f(\alpha_*)$, $\lambda_\sigma = \lambda_\sigma(\alpha_*)$ и $\lambda_\rho = \lambda_\rho(\alpha_*)$. Обозначим через $-h = \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_l = 0$ точки разрыва функции $w(\cdot)$. Положим

$$\zeta_* = \frac{\zeta}{(\lambda_\sigma + 1) + (1 + 3\lambda_\rho)(\vartheta - t_0) + (4 + 6\lambda_\rho)l}, \quad \varepsilon_* = \frac{\zeta_* e^{-2\lambda_f(\vartheta - t_0)}}{\sqrt{1 + \vartheta - t_0}}. \tag{3.4}$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$. Отметим, что тогда в силу определения (2.3) множества Ω имеем

$$\|y - x\| \leq \zeta_*, \quad |\eta| \leq \zeta_*, \quad (y,\eta) \in \Omega(t, x, \varepsilon), \quad (t,x) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

В силу условия (f_1) функция g, определенная в (1.5), непрерывна. Поэтому найдется такое

$\delta_* > 0$, что для любых $t, t' \in [t_0, \vartheta]$, $x, x', y, y' \in B(\alpha_*)$, $s, s' \in B(2\alpha_*)$, $\eta, \eta' \in B^1(2\alpha_*)$, $u \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$ при условии $\max\big\{|t-t'|, \|x-x'\|, \|y-y'\|, \|s-s'\|, |\eta-\eta'|\big\} \leq \delta_*$ будет справедливо неравенство

$$|g(t,x,y,s,\eta,u,v) - g(t',x',y',s',\eta',u,v)| \leq \varepsilon^2/4. \tag{3.6}$$

С учетом определения выше точек ξ_j, $j \in \overline{1,l}$, найдется такое $\delta_w > 0$, что для любых $j \in \overline{1,l-1}$ и $\xi, \xi' \in [\xi_j, \xi_{j+1})$ при условии $|\xi - \xi'| \leq \delta_w$ имеет место оценка

$$\|w(\xi) - w(\xi')\| \leq \delta_*. \tag{3.7}$$

Положим

$$\delta = \min\{\delta_*, \delta_w, \delta_*/(2\lambda_*),\ h, \zeta_*/\lambda_*, 1\}. \tag{3.8}$$

Пусть зафиксированы разбиение Δ_δ (см. (2.6)) и реализация $v(\cdot) \in \mathcal{V}_\tau$. Закон $\{U^\circ, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ в паре с $v(\cdot)$ определяет кусочно-постоянную реализацию $u^\circ(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ и соответствующее движение $x(\cdot) = x(\cdot\,|\,\tau, z, w(\cdot), u^\circ(\cdot), v(\cdot))$ системы (1.2). При этом в соответствии с правилом (2.7) формирования реализации $u^\circ(\cdot)$ по реализующимся значениям $(t_i, x(t_i), x_{t_i}(\cdot))$ определяются сопутствующие точки $(y_u^{(i)}, \eta_u^{(i)})$, $i \in \overline{1,k}$. В согласии с (3.2) определим также функцию $x^0(\cdot) = x^0(\cdot\,|\,\tau, z, w(\cdot), u^\circ(\cdot), v(\cdot))$. Рассмотрим величины

$$\varphi^{(i)} = \min_{(y,\eta)\in\Omega(t_i, x(t_i), \varepsilon)} \big(\rho(t_i, y, x_{t_i}(\cdot)) + x^0(t_i) - \eta\big), \quad i \in \overline{1,k+1}, \tag{3.9}$$

и докажем, что для любого $i \in \overline{1,k}$, если $\xi_j + \tau + h \notin [t_i, t_{i+1})$ при всех $j \in \overline{1,l}$, то

$$\varphi^{(i+1)} \leq \varphi^{(i)} + (1 + 3\lambda_\rho)(t_{i+1} - t_i)\zeta_*, \tag{3.10}$$

а если $\xi_j + \tau + h \in [t_i, t_{i+1})$ при каком-то $j \in \overline{1,l}$, то

$$\varphi^{(i+1)} \leq \varphi^{(i)} + (4 + 6\lambda_\rho)\zeta_*. \tag{3.11}$$

Пусть $i \in \overline{1,k}$. Рассмотрим случай, когда $\xi_j + \tau + h \notin [t_i, t_{i+1})$ при всех $j \in \overline{1,l}$. В согласии с (2.5) и (3.9) имеем

$$(y_u^{(i)}, \eta_u^{(i)}) \in \Omega(t_i, x(t_i), \varepsilon), \quad \varphi^{(i)} = \rho(t_i, y_u^{(i)}, x_{t_i}(\cdot)) + x^0(t_i) - \eta_u^{(i)}. \tag{3.12}$$

Определим значение $s_u^{(i)} = x(t_i) - y_u^{(i)}$ и реализацию $v^{(i)}(\cdot) \in \mathcal{V}_{t_i}$ по правилу

$$v^{(i)}(t) = v^{(i)} \in \operatorname*{argmax}_{v\in\mathbb{V}} \min_{u\in\mathbb{U}} g(t_i, x(t_i), x(t_i - h), s_u^{(i)}, \eta_u^{(i)}, u, v), \quad t \in [t_i, \vartheta], \tag{3.13}$$

где g определяется по (1.5). В силу условия (ρ_3) найдется такая реализация $u^{(i)}(\cdot) \in \mathcal{U}_{t_i}$, что для движения $y^{(i)}(\cdot) = x(\cdot\,|\,t_i, y_u^{(i)}, x_{t_i}(\cdot), u^{(i)}(\cdot), v^{(i)}(\cdot))$ системы (1.2) и функции $y^{0(i)}(\cdot) = x^0(\cdot\,|\,t_i, y_u^{(i)}, x_{t_i}(\cdot), u^{(i)}(\cdot), v^{(i)}(\cdot))$ будет справедливо неравенство

$$\rho(t_{i+1}, y^{(i)}(t_{i+1}), y^{(i)}_{t_{i+1}}(\cdot)) + y^{0(i)}(t_{i+1}) \leq \rho(t_i, y_u^{(i)}, x_{t_i}(\cdot)) + (t_{i+1} - t_i)\zeta_*. \tag{3.14}$$

Отметим, что по лемме 1 справедливо включение $(t_i, x(t_i), x_{t_i}(\cdot)) \in \mathbb{G}_*$. Тогда, принимая во внимание определение (2.1) множества $\mathbb{G}_*$, включение $(y_u^{(i)}, \eta_u^{(i)}) \in \Omega(t_i, x(t_i), \varepsilon)$ и определение (2.3) множества Ω, имеем

$$(t_i, y_u^{(i)}, x_{t_i}(\cdot)) \in \mathbb{G}_*, \quad \eta_u^{(i)} \in B^1(2\alpha(t_i)). \tag{3.15}$$

Учитывая первое включение в (3.15), выбор (3.3) чисел α_*, λ_* и определение (2.1) функции α, в силу лемм 1 и 2 для движений $x(\cdot)$, $y^{(i)}(\cdot)$ и функций $x^0(\cdot)$, $y^{0(i)}(\cdot)$ при всех $t,t'\in[t_i,t_{i+1}]$ получаем

$$\begin{gathered}(x(t),x_t(\cdot)),(y^{(i)}(t),y_t^{(i)}(\cdot))\in P(\alpha(t))\subset P(\alpha_*),\\ x(t),x(t-h),y^{(i)}(t),y^{(i)}(t-h)\in B(\alpha_*),\\ \max\left\{\|x(t)-x(t')\|,\|y^{(i)}(t)-y^{(i)}(t')\|,|x^0(t)-x^0(t')|,|y^{0(i)}(t)-y^{0(i)}(t')|\right\}\le\lambda_*|t-t'|.\end{gathered}\tag{3.16}$$

Рассмотрим функции

$$\begin{gathered}s^{(i)}(t)=x(t)-y^{(i)}(t),\quad \eta^{(i)}(t)=x^0(t)-x^0(t_i)+\eta_u^{(i)}-y^{0(i)}(t),\\ W^{(i)}(t)=\mu\,(t,s^{(i)}(t),\eta^{(i)}(t)),\quad t\in[t_i,t_{i+1}],\end{gathered}\tag{3.17}$$

где μ определена в (2.2). Тогда, пользуясь неравенством в (3.16), можно показать липшицевость этих функций. Принимая во внимание определения движений $x(\cdot)$, $y^{(i)}(\cdot)$ и функций $x^0(\cdot)$, $y^{0(i)}(\cdot)$, а также определение (1.5) функции g, при почти всех $t\in[t_i,t_{i+1}]$ имеем

$$\begin{gathered}\dot W^{(i)}(t)=2\,e^{-4\lambda_f(t-t_0)}\Big(g\left(t,x(t),x(t-h),s^{(i)}(t),\eta^{(i)}(t),u^\circ(t),v(t)\right)\\ -\,g\left(t,y^{(i)}(t),y^{(i)}(t-h),s^{(i)}(t),\eta^{(i)}(t),u^{(i)}(t),v^{(i)}(t)\right)-2\,\lambda_f\|s^{(i)}(t)\|^2-2\,\lambda_f|\eta^{(i)}(t)|^2\Big).\end{gathered}$$

Далее, учитывая выбор числа λ_f, второе включение в (3.16), равенство $x(t-h)=y^{(i)}(t-h)$, $t\in[t_i,t_i+h)$, неравенство $t_{i+1}<t_i+\delta\le t_i+h$ (см. (2.6) и (3.8)), выводим

$$\begin{gathered}g(t,x(t),x(t-h),s^{(i)}(t),\eta^{(i)}(t),u^{(i)}(t),v^{(i)}(t))\\ -\,g(t,y^{(i)}(t),y^{(i)}(t-h),s^{(i)}(t),\eta^{(i)}(t),u^{(i)}(t),v^{(i)}(t))\\ \le\lambda_f\|s^{(i)}(t)\|\big(\|s^{(i)}(t)\|+|\eta^{(i)}(t)|\big)\le 2\,\lambda_f\|s^{(i)}(t)\|^2+2\,\lambda_f|\eta^{(i)}(t)|^2,\end{gathered}$$

откуда получаем

$$\begin{gathered}\dot W^{(i)}(t)\le 2\,e^{-4\lambda_f(t-t_0)}\Big(g(t,x(t),x(t-h),s^{(i)}(t),\eta^{(i)}(t),u^\circ(t),v(t))\\ -\,g(t,x(t),x(t-h),s^{(i)}(t),\eta^{(i)}(t),u^{(i)}(t),v^{(i)}(t))\Big)\quad\text{при п. в.}\quad t\in[t_i,t_{i+1}].\end{gathered}\tag{3.18}$$

Из оценок (3.16), учитывая выбор δ в (3.8) и разбиения Δ_δ в (2.6), при всех $t\in[t_i,t_{i+1}]$, во-первых, имеем

$$\begin{gathered}s^{(i)}(t)\in B\,(2\alpha_*),\quad \|x(t)-x(t_i)\|\le\lambda_*\delta\le\delta_*\\ |t-t_i|\le\delta\le\delta_*,\quad \max\left\{\|s^{(i)}(t)-s^{(i)}(t_i)\|,\ |\eta^{(i)}(t)-\eta^{(i)}(t_i)|\right\}\le 2\,\lambda_*\delta\le\delta_*,\end{gathered}\tag{3.19}$$

а во-вторых, в случае, если $t\ge\tau+h$, выводим

$$\|x(t-h)-x(t_i-h)\|\le\lambda_*\delta\le\delta_*.\tag{3.20}$$

В случае $t<\tau+h$ это неравенство также будет справедливо, поскольку имеют место равенства $x(t-h)=w(t-h-\tau)$ и $x(t_i-h)=w(t_i-h-\tau)$, оценка (3.7) и неравенство $\delta\le\delta_w$, вытекающее из (3.8). Кроме того, здесь также следует учесть, что рассматривается случай, когда $\xi_j+\tau+h\notin[t_i,t_{i+1})$ при всех $j\in\overline{1,l}$. Далее, из определения (3.17) функции $\eta^{(i)}$, второго включения в (3.15) и леммы 2 имеем

$$\eta^{(i)}(t)\in B^1(2\alpha(t))\subset B^1(2\alpha_*),\quad t\in[t_i,t_{i+1}].\tag{3.21}$$

Таким образом, из неравенства (3.18), учитывая второе включение в (3.16), соотношения (3.19)–(3.21) и выбор δ_* (см. (3.6)), получаем

$$\dot{W}^{(i)}(t) \leq 2\, e^{-4\,\lambda_f(t-t_0)}\Big(g(t_i, x(t_i), x(t_i-h), s^{(i)}(t_i), \eta^{(i)}(t_i), u^\circ(t), v(t))$$

$$- g(t_i, x(t_i), x(t_i-h), s^{(i)}(t_i), \eta^{(i)}(t_i), u^{(i)}(t), v^{(i)}(t))\Big) + \varepsilon^2 \quad \text{при п. в.} \quad t\in[t_i, t_{i+1}].$$

Из определений значения $s_u^{(i)}$ в (3.13), а также движения $y^{(i)}(\cdot)$ и функции $y^{0(i)}(\cdot)$ в (3.14), с учетом соотношений (3.17) имеем

$$y^{(i)}(t_i) = y_u^{(i)}, \quad s^{(i)}(t_i) = s_u^{(i)}, \quad \eta^{(i)}(t_i) = \eta_u^{(i)}. \tag{3.22}$$

Тогда, учитывая сначала соотношения (2.4), (2.7) и (3.13), а затем условие (f_4), выводим

$$\begin{aligned}\dot{W}^{(i)}(t) &\leq 2\, e^{-4\,\lambda_f(t-t_0)}\Big(\max_{v\in\mathbb{V}} g(t_i, x(t_i), x(t_i-h), s_u^{(i)}, \eta_u^{(i)}, U^\circ(t_i, x(t_i), x_{t_i}(\cdot), \varepsilon), v)\\ &\quad - \min_{u\in\mathbb{U}} g(t_i, x(t_i), x(t_i-h), s_u^{(i)}, \eta_u^{(i)}, u, v^{(i)})\Big) + \varepsilon^2\\ &= 2\, e^{-4\,\lambda_f(t-t_0)}\Big(\min_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}} g(t_i, x(t_i), x(t_i-h), s_u^{(i)}, \eta_u^{(i)}, u, v)\\ &\quad - \max_{v\in\mathbb{V}}\min_{u\in\mathbb{U}} g(t_i, x(t_i), x(t_i-h), s_u^{(i)}, \eta_u^{(i)}, u, v)\Big) + \varepsilon^2 = \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание определение функций $s^{(i)}$ и $W^{(i)}$ в (3.17), равенства (3.22), включение $(y_u^{(i)}, \eta_u^{(i)}) \in \Omega(t_i, x(t_i), \varepsilon)$ (см. (3.12)) и определение (2.3) множества Ω, имеем

$$\mu\,(t_{i+1}, x(t_{i+1}) - y^{(i)}(t_{i+1}), \eta^{(i)}(t_{i+1})) = W^{(i)}(t_{i+1}) \leq W^{(i)}(t_i) + (t_{i+1}-t_i)\varepsilon^2$$

$$= \mu\,(t_i, x(t_i) - y_u^{(i)}, \eta_u^{(i)}) + (t_{i+1}-t_i)\varepsilon^2 \leq (1 + t_{i+1} - t_0)\varepsilon^2.$$

Это неравенство вместе с первым включением в (3.16) и включением (3.21) означает, что $(y^{(i)}(t_{i+1}), \eta^{(i)}(t_{i+1})) \in \Omega(t_{i+1}, x(t_{i+1}), \varepsilon)$. Тогда, пользуясь определениями (3.9) величины $\varphi^{(i+1)}$ и (3.17) функции $\eta^{(i)}$, а также выбором числа λ_ρ с учетом первого соотношения в (3.16), выводим

$$\varphi^{(i+1)} \leq \rho(t_{i+1}, y^{(i)}(t_{i+1}), x_{t_{i+1}}(\cdot)) + y^{0(i)}(t_{i+1}) + x^0(t_i) - \eta_u^{(i)}$$

$$\leq \lambda_\rho \|x_{t_{i+1}}(\cdot) - y_{t_{i+1}}^{(i)}(\cdot)\|_1 + \rho(t_{i+1}, y^{(i)}(t_{i+1}), y_{t_{i+1}}^{(i)}(\cdot)) + y^{0(i)}(t_{i+1}) + x^0(t_i) - \eta_u^{(i)}. \tag{3.23}$$

По определению движения $y^{(i)}(\cdot)$ справедливо равенство $y^{(i)}(t) = x(t)$, $t\in[\tau-h,\tau)$. Тогда в силу неравенств в (3.5) и (3.16) и выбора δ в (3.8) получаем

$$\|x_{t_{i+1}}(\cdot) - y_{t_{i+1}}^{(i)}(\cdot)\|_1 = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|x(\xi) - y^{(i)}(\xi)\|\,\mathrm{d}\xi$$

$$\leq \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \big(\|x(\xi) - x(t_i)\| + \|y^{(i)}(\xi) - y_u^{(i)}\|\big)\,\mathrm{d}\xi + \|x(t_i) - y_u^{(i)}\|(t_{i+1}-t_i)$$

$$\leq 2\,\lambda_*(t_{i+1}-t_i)^2 + (t_{i+1}-t_i)\zeta_* \leq 3\,(t_{i+1}-t_i)\zeta_*. \tag{3.24}$$

Таким образом, из неравенств (3.12), (3.14), (3.23) и (3.24) имеем (3.10).

Рассмотрим случай, когда при некотором j выполнено включение $\xi_j + \tau + h \in [t_i, t_{i+1})$. Как и выше, посредством $(y_u^{(i)}, \eta_u^{(i)})$ обозначаем сопутствующую точку, сформировавшуюся по значениям $(t_i, x(t_i), x_{t_i}(\cdot))$ в соответствии с правилом (2.7). Пусть $v^{(i)}(\cdot) \in \mathcal{V}_{t_i}$. По условию (ρ_3) найдется такое $u^{(i)}(\cdot) \in \mathcal{U}_{t_i}$, что для движения $y^{(i)}(\cdot) = x(\cdot \,|\, t_i, y_u^{(i)}, x_{t_i}(\cdot), u^{(i)}(\cdot), v^{(i)}(\cdot))$ будет справедливо неравенство (3.14). Тогда, пользуясь сначала соотношением (3.9) с учетом равенства (3.12) и включения $(x(t_{i+1}), 0) \in \Omega(t_{i+1}, x(t_{i+1}), \varepsilon)$, а затем неравенством (3.14) вместе с определением (3.17) функции $\eta^{(i)}$, выводим

$$\varphi^{(i+1)} - \varphi^{(i)} \le \Big(\rho(t_{i+1}, x(t_{i+1}), x_{t_{i+1}}(\cdot)) + x^0(t_{i+1})\Big) - \Big(\rho(t_i, y_u^{(i)}, x_{t_i}(\cdot)) + x^0(t_i) - \eta_u^{(i)}\Big)$$
$$\le \rho(t_{i+1}, x(t_{i+1}), x_{t_{i+1}}(\cdot)) - \rho(t_{i+1}, y^{(i)}(t_{i+1}), y^{(i)}_{t_{i+1}}(\cdot)) + \eta^{(i)}(t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)\zeta_*.$$

Отсюда, принимая во внимание сначала выбор числа λ_ρ вместе с первым включением из (3.16), а затем неравенства (3.5), (3.16), (3.19) и (3.24) вместе с оценками $\lambda_* |t_{i+1} - t_i| \le \lambda_* \delta \le \zeta_*$, $|t_{i+1} - t_i| \le \delta \le 1$ и $2\,\lambda_* \delta \le 2\zeta_*$ (см. (2.6) и (3.8)), получаем

$$\varphi^{(i+1)} - \varphi^{(i)} \le \lambda_\rho\big(\|x(t_{i+1}) - y^{(i)}(t_{i+1})\| + \|x_{t_{i+1}}(\cdot) - y^{(i)}_{t_{i+1}}(\cdot)\|_1\big) + |\eta^{(i)}(t_{i+1})| + (t_{i+1} - t_i)\zeta_*$$
$$\le \lambda_\rho\big(\|x(t_{i+1}) - x(t_i)\| + \|y^{(i)}(t_{i+1}) - y^{(i)}(t_i)\| + \|x(t_i) - y_u^{(i)}\| + \|x_{t_{i+1}}(\cdot) - y^{(i)}_{t_{i+1}}(\cdot)\|_1\big)$$
$$+ |\eta^{(i)}(t_{i+1}) - \eta^{(i)}(t_i)| + |\eta_u^{(i)}| + (t_{i+1} - t_i)\zeta_* \le (4 + 6\,\lambda_\rho)\zeta_*.$$

Таким образом, неравенство (3.11) доказано.

Отметим, что количество i, для которых $\xi_j + \tau + h \in [t_i, t_{i+1})$ при каком-то $j \in \overline{1, l}$, не превосходит l. Поэтому из неравенств (3.10) и (3.11) получаем

$$\varphi^{(k+1)} \le \varphi^{(1)} + (1 + 3\,\lambda_\rho)(\vartheta - t_0)\zeta_* + (4 + 6\,\lambda_\rho) l \zeta_*. \tag{3.25}$$

Учитывая определение (3.9) величины $\varphi^{(k+1)}$ и условие (ρ_1), выберем значения $(y_u^{(k+1)}, \eta_u^{(k+1)}) \in \Omega(\vartheta, x(\vartheta), \varepsilon)$ так, что $\varphi^{(k+1)} = \sigma(y_u^{(k+1)}, x_\vartheta(\cdot)) + x^0(\vartheta) - \eta_u^{(k+1)}$. Тогда в силу определения (2.3) множества Ω, определения (3.3) числа α_* и неравенств (3.5) имеем соотношения $y_u^{(k+1)} \in B^1(\alpha_*)$, $\|x(\vartheta) - y_u^{(k+1)}\| \le \zeta_*$ и $|\eta_u^{(k+1)}| \le \zeta_*$, из которых, опираясь на равенство (1.4) и выбор числа λ_σ, выводим

$$\gamma = \sigma(x(\vartheta), x_\vartheta(\cdot)) + x^0(\vartheta) = \varphi^{(k+1)} + \sigma(x(\vartheta), x_\vartheta(\cdot)) - \sigma(y_u^{(k+1)}, x_\vartheta(\cdot)) + \eta_u^{(k+1)}$$
$$\le \varphi^{(k+1)} + \lambda_\sigma \|x(\vartheta) - y_u^{(k+1)}\| + |\eta_u^{(k+1)}| \le \varphi^{(k+1)} + (1 + \lambda_\sigma)\zeta_*. \tag{3.26}$$

Пользуясь соотношениями (3.25) и (3.26), с учетом выбора (3.4) числа ζ_* получаем $\gamma \le \varphi^{(1)} + \zeta$. Отсюда, принимая во внимание определение (3.9) величины $\varphi^{(1)}$ и включение $(z, 0) \in \Omega(\tau, z, \varepsilon)$, заключаем, что справедливо неравенство (2.8).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
3. **Красовский Н. Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
4. **Осипов Ю. С.** К теории дифференциальных игр систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 2. С. 300–311.
5. **Осипов Ю. С.** Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.

6. **Lukoyanov N. Yu.** Hamilton–Jacobi type equation for problems of control of functional differential systems // IFAC Proceedings Volumes. 2000. Vol. 33, № 16. P. 591–596.
7. **Лукоянов Н. Ю.** Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2011. 243 с.
8. **Лукоянов Н. Ю.** On Hamilton — Jacobi formalism in time-delay control systems // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 269–277.
9. **Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э.** Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, № 2(104). С. 77–164.
10. **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
11. **Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.** Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhäuser, 1997. 570 p.
12. **Plaksin A.** Viscosity solutions of HJBI equations for time-delay systems. ArXiv: 2001.07905. 2020. 22 p.
13. **Беллман Р., Кук К. Л.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

Поступила 3.03.2021
После доработки 29.03.2021
Принята к публикации 5.04.2021

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, член-корр. РАН
директор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: nyul@imm.uran.ru

Плаксин Антон Романович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 288 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
4. Osipov Yu.S. On the theory of differential games of systems with aftereffect. *J. Appl. Math. Mech.*, 1971, vol. 35, no. 2, pp. 262–272. doi: 10.1016/0021-8928(71)90032-3 .
5. Osipov Yu.S. Differential games of systems with aftereffect. *Sov. Math., Dokl.*, 1971, vol. 12, pp. 262–266.
6. Lukoyanov N.Yu. Hamilton–Jacobi type equation for problems of control of functional differential systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 2000, vol. 33, no. 16, pp. 591–596. doi: 10.1016/S1474-6670(17)39700-8 .
7. Lukoyanov N.Yu. *Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona–Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoi informatsiei* [Functional Hamilton–Jacobi equations and control problems with hereditary information]. Ekaterinburg: Ural Federal University Publ., 2011, 243 p. ISBN: 978-5-321-01877-4 .
8. Lukoyanov N.Yu. On Hamilton–Jacobi formalism in time-delay control systems. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 269–277.
9. Zverkin A.M., Kemenskii G.A., Norkin S.B., El'sgol'ts L.E. Differential equations with a perturbed argument. *Russian Mathematical Surveys*, 1962, vol. 17, no. 2, pp. 61–146. doi: 10.1070/RM1962v017n02ABEH001128 .
10. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous right-hand sides.* Mathematics and Its Applications: Soviet Series, vol. 18. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Pub., 1988, 304 p. doi: 10.1007/978-94-015-7793-9 .

11. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Boston: Birkhäuser, 1997, 570 p. ISBN: 978-0-8176-4755-1 .
12. Plaksin A. Viscosity solutions of HJBI equations for time-delay systems. *ArXiv*:2001.07905. 2020. 22 p.
13. Bellman R., Cooke K.L. *Differential-difference equations*. N Y: Acad. Press, 1963, 462 p. ISBN: 9780080955148 . Translated to Russian under the title *Differentsial'no-raznostnye uravneniya*. Moscow: Mir Publ., 1967, 548 p.

Received March 3, 2021
Revised March 29, 2021
Accepted March 5, 2021

Anton Romanovich Plaksin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: a.r.plaksin@gmail.com .

Nikolai Yur'evich Lukoyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: nyul@imm.uran.ru .

Cite this article as: N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. On extremal shift strategies in delayed systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 150–161 .