ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА РАСПРЕДЕЛЕННОГО И ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЙ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. Керимбеков

В статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма. Функции внешнего и граничного воздействий нелинейны относительно управлений. Для функционала Беллмана получено интегро-дифференциальное уравнение специфического вида и найдена структура его решения, которая позволяет это уравнение представить в виде системы двух уравнений, имеющих более простой вид. Описан алгоритм построения решения задачи синтеза распределенного и граничного управлений, изложена процедура определения управлений как функции (функционала) от состояния управляемого процесса.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, оператор Фредгольма, обобщенное решение, функционал Беллмана, дифференциал Фреше, синтез оптимального управления.

A. Kerimbekov. On the solvability of the problem of synthesizing distributed and boundary controls in the optimization of oscillation processes.

We study the solvability of the problem of synthesis of distributed and boundary controls in the optimization of oscillation processes described by partial integro-differential equations with the Fredholm integral operator. Functions of external and boundary actions are nonlinear with respect to the controls. For the Bellman functional, an integro-differential equation of a specific form is obtained and the structure of its solution is found, which allows this equation to be represented as a system of two equations of a simpler form. An algorithm for constructing a solution to the problem of synthesizing distributed and boundary controls is described, and a procedure for finding the controls as a function (functional) of the state of the process is described.

Keywords: integro-differential equation, Fredholm operator, generalized solution, Bellman functional, Fréchet differential, optimal control synthesis.

MSC: 49K20

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-128-140

Введение

Методы теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, в частности, методы построения управления в виде программы или синтеза, все более проникают в различные области науки и отрасли производства. Об этом свидетельствует большой поток исследований задач оптимального управления в частных производных [1–8]. Математическая модель многих прикладных задач предполагает исследование интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с интегральным оператором Фредгольма или Вольтерра [9–11]. Исследования задач управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического или параболического типов, проводились в работах [12–18], где были разработаны методы и алгоритмы построения оптимального управления в виде программы. Разработан алгоритм построения полного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана сходимость его приближений по оптимальному управлению, оптимальному процессу и функционалу. Установлено, что наличие интегрального оператора существенно влияет на процедуру построения приближения полного решения, в частности, приводит к необходимости исследования сходимости приближений по “резольвенте” как для оптимального процесса, так и для функционала.

Решение задачи синтеза для управляемых систем с распределенными параметрами стало возможным после появления работы А. И. Егорова [4], где была изложена процедура вывода функционального уравнения типа Беллмана на примере управления тепловыми процессами. При этом им были использованы определение обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса и дифференциал Фреше для функционала Беллмана.

Для управляемых процессов, описываемых уравнениями в частных производных, первые исследования начались в работах [5; 6] и получили дальнейшее развитие, например, в работах [7; 8]. Однако изучение задачи синтеза по схеме Беллмана — Егорова для управляемых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных, почти не проводилось. По-видимому, это было связано с интегральным оператором, присутствие которого усложняло вопросы разрешимости уравнения типа Беллмана. В работе [19] была предложена структура решения уравнения типа Беллмана, согласно которой это уравнение распадается на два.

В данной статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при оптимизации колебательных процессов, описываемых линейными интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма в случае, когда функции внешнего и граничного воздействий нелинейны относительно функции управления. Исследование проводилось по схеме Беллмана — Егорова [4; 20], и было проверено, что структура решения, предложенная в работе [19], позволяет преобразовать уравнения типа Беллмана к системе двух уравнений. Таким образом устанавливается, что найденная структура обладает свойством универсальности и оказывается полезной при исследовании задачи синтеза для управляемых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных.

1. Постановка задачи синтеза

Рассмотрим управляемый колебательный процесс, описываемый краевой задачей

$$v_{tt} - Av = \lambda \int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau + f[t,x,u(t,x)], \quad x \in Q, \quad 0 < t < T, \tag{1.1}$$

$$v(0,x) = \psi_1(x), \quad v_t(0,x) = \psi_2(x), \quad x \in Q, \tag{1.2}$$

$$\Gamma v(t,x) \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)\cos(\nu,x_i) + a(x)v(t,x) = p[t,x,\vartheta(t,x)], \quad x \in \gamma, \quad 0 < t < T. \tag{1.3}$$

Здесь A — эллиптический оператор

$$Av(t,x) = \sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik}v_{x_k}(t,x))_{x_i} - c(x)v(t,x), \tag{1.4}$$

Q — область пространства $\mathbb{R}^n$, ограниченная кусочно-гладкой кривой γ; $Q_T = Q \times [0,T)$; функции $K(t,\tau) \in H(D)$, $D = \{0 \le t,\tau \le T\}$, $\psi_1(x) \in H_1(Q)$, $\psi_2(x) \in H(Q)$, $a_{ik}(x)$, $a(x) \ge 0$, $c(x) \ge 0$ считаются известными; ν — вектор нормали, выходящий из точки $x \in \gamma$; $f[t,x,u(t,x)] \in H(Q_T)$ $\forall$ распределенного управления $u(t,x) \in H(Q_T)$, $p[t,x,\vartheta(t,x)] \in H(\gamma_T)$ $\forall$ граничного управления $\vartheta(t,x) \in H(\gamma_T), \gamma_T = \gamma \times (0,T)$. При этом $a(x)$ и $c(x)$ — измеримые функции; $H(Y)$ — гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y; $H_1(Y)$ — пространство Соболева первого порядка; λ — параметр; T — фиксированный момент времени. Относительно функций внешнего и граничного воздействий будем считать, что

$$f_u[t,x,u(t,x)] \ne 0 \ \ \forall (t,x) \in Q_T; \quad p_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)] \ne 0 \ \ \forall (t,x) \in \gamma_T, \tag{1.5}$$

т. е. они монотонные по функциональной переменной.

В задаче синтеза требуется найти такие управления $u^0(t,x) \in H(Q_T)$ и $\vartheta^0(t,x) \in H(\gamma_T)$, которые минимизируют интегральный квадратичный функционал

$$J[u(t,x),\vartheta(t,x)] = \int\limits_Q \left[(v(T,x)-\xi_1(x))^2 + (v_t(T,x)-\xi_2(x))^2\right]dx$$

$$+\int\limits_0^T \left(\alpha\int\limits_Q M^2[t,x,u(t,x)]dx + \beta\int\limits_\gamma N^2[t,x,\vartheta(t,x)]dx\right)dt, \quad \alpha,\beta>0, \tag{1.6}$$

определенный на множестве обобщенных решений краевой задачи (1.1)–(1.5). Здесь $\xi_1(x) \in H(Q)$; $\xi_2(x) \in H(Q)$; $M[t,x,u(t,x)] \in H(Q_T)\ \forall u(t,x) \in H(Q_T)$, $N[t,x,\vartheta(t,x)] \in H(\gamma_T)\ \forall \vartheta(t,x) \in H(\gamma_T)$ — заданные функции. При этом искомые управления $u^0(t,x)$ и $\vartheta^0(t,x)$ следует находить как функцию (функционал) от состояния управляемого процесса, т. е. в виде

$$u^0(t,x) = u[t,x,v(t,x),v_t(t,x)], \quad (t,x)\in Q_T,$$

$$\vartheta^0(t,x) = \vartheta[t,x,v(t,x),v_t(t,x)], \quad (t,x)\in \gamma_T.$$

Заметим, что согласно условиям (1.5) устанавливается взаимно-однозначное соответствие между элементами пространства управлений $\{[u(t,x),\vartheta(t,x)]\}$ и пространства состояний управляемого процесса $\{v(t,x)\}$.

2. Обобщенное решение краевой задачи

Как известно [11; 21], при исследовании прикладных задач управления целесообразно использовать понятие обобщенного решения краевой задачи.

О п р е д е л е н и е. Под обобщенным решением краевой задачи (1.1)–(1.5) понимается функция $v(t,x) \in H(Q_T)$, которая вместе с обобщенными производными $v_t(t,x)$ и $v_{x_i}(t,x)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q (v_t(t,x)\phi(t,x))_{t_1}^{t_2}dx = \int\limits_{t_1}^{t_2}\Bigg\{\int\limits_Q \Bigg[v_t(t,x)\phi_t(t,x) - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)\phi_{x_i}(t,x) - c(x)v(t,x)\phi(t,x)$$

$$+\Big(\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau + f[t,x,u(t,x)]\Big)\phi(t,x)\Bigg]dx$$

$$+\int\limits_\gamma \big(p[t,x,\vartheta(t,x)] - a(x)v(t,x)\big)\phi(t,x)dx\Bigg\}dt \tag{2.1}$$

при любых t_1 и t_2 $(0 < t_1 \le t \le t_2 \le T)$ и для любой функции $\phi(t,x) \in H_1(\overline{Q}_T)$, а также начальным условиям в слабом смысле, т. е. равенства

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_Q (v(t,x)-\psi_1(x))\phi_0(x)dx = 0, \quad \lim_{t\to 0}\int\limits_Q (v_t(t,x)-\psi_1(x))\phi_1(x)dx = 0$$

выполняются для любых функций $\phi_0(x) \in H(Q)$ и $\phi_1(x) \in H(Q)$.

Теорема 1. *Краевая задача* (1.1)–(1.5) *при каждой паре управлений*

$$\{u(t,x),\vartheta(t,x) \in H(Q_T)\times H(\gamma_T)\}$$

имеет единственное обобщенное решение $V(t,x) \in H_1(Q_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно методике работы [21], если провести аналогичные вычисления, нетрудно убедиться в справедливости утверждения теоремы. Здесь приводим лишь основные понятия и формулы, справедливость которых доказана в работах [14; 15].

Решение краевой задачи (1.1)–(1.5) ищем в виде

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)z_n(x), \quad v_n(t)=\int\limits_Q v(t,x)z_n(x)dx, \tag{2.2}$$

где $z_n(x)$ при каждом $n=1,2,3,\dots$ определяется как обобщенная собственная функция краевой задачи [21]

$$\begin{gathered}B_n[\phi(t,x),z_j(x)]\equiv\int\limits_Q\Big(\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(x)\phi_{x_k}(t,x)z_{j_{x_i}}+c(x)z_j(x)\phi(t,x)\Big)dx\\+\int\limits_\gamma a(x)z_j(x)\phi(t,x)dx=\lambda_j^2\int\limits_Q\phi(t,x)z_j(x)dx,\\ \Gamma z_j(x)=0,\quad x\in\gamma,\quad 0<t<T,\quad j=1,2,3,\dots .\end{gathered}\tag{2.3}$$

Система функций $\{z_j\}$ в совокупности образует полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(Q)$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяют условиям

$$\lambda_n\le\lambda_{n+1},\quad n=1,2,3,\dots,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$$

Используя подход Лиувилля, коэффициент Фурье $v_n(t)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\dots$ находим как решение линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода вида

$$v_n(t)=\lambda\int\limits_0^T K_n(t,s)v_n(s)ds+a_n(t), \tag{2.4}$$

где

$$K_n(t,s)=\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau,\quad K_n(0,s)=0,\quad n=1,2,3,\dots,$$

$$a_n(t)=\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)(f_n[\tau,u]+p_n[\tau,\vartheta])d\tau, \tag{2.5}$$

$$f_n[\tau,u]=\int\limits_Q f[\tau,x,u(\tau,x)]z_n(x)dx,\quad p_n[\tau,\vartheta]=\int\limits_\gamma p[\tau,x,\vartheta(\tau,x)]z_n(x)dx. \tag{2.6}$$

Решение интегрального уравнения (2.4) находим по формуле [22]

$$v_n(t)=\lambda\int\limits_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t), \tag{2.7}$$

где $R_n(t,s,\lambda)$ — резольвента ядра $K_n(t,s)$. Резольвента при любом $n=1,2,3,\dots$ является непрерывной функцией [14; 15] для значений параметра λ, удовлетворяющих оценке

$$|\lambda|<\frac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}}. \tag{2.8}$$

Здесь

$$K_0 = \int\limits_0^T \int\limits_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt,$$

$$\int\limits_0^T R_n(t,s,\lambda)ds \leq \frac{K_0 T}{(\lambda_n - |\lambda| T\sqrt{K_0})^2}. \tag{2.9}$$

Дифференцируя по t формальное решение краевой задачи (1.1)–(1.5)

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int\limits_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right) z_n(x), \tag{2.10}$$

получим ряд

$$v_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int\limits_0^T R'_{nt}(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a'_n(t) \right) z_n(x).$$

Учитывая (2.5)–(2.9) и неравенство

$$\int\limits_0^T R^2_{nt}(t,s,\lambda)ds \leq \frac{T K_0 \lambda_n^2}{(\lambda_n - |\lambda| T\sqrt{K_0})^2},$$

непосредственными вычислениями можно доказать, что $v(t,x) \in H(Q_T)$ и $v_t(t,x) \in H(Q_T)$ [14; 15]. Таким образом, обобщенное решение определяется формулой (2.10).

3. О разрешимости задачи синтеза

Для функционала (1.6) определяем функционал Беллмана в виде

$$S[t,x,\omega(t,x)] = \min_{u \in U, \vartheta \in V} \Bigg\{ \int\limits_t^T \left(\alpha \int\limits_Q M^2[\tau,x,u(\tau,x)]dx + \beta \int\limits_\gamma N^2[\tau,x,\vartheta(\tau,x)]dx \right) d\tau$$
$$+ \int\limits_Q \parallel \omega(T,x) - \xi(x) \parallel^2 dx \Bigg\}. \tag{3.1}$$

Здесь $\omega(t,x) = \{v(t,x), v_t(t,x)\}$ — вектор-функция состояния; $\xi(x) = \{\xi_1(x), \xi_2(x)\}$ — вектор-функция желаемого состояния управляемого процесса в момент времени T; $\| \, . \, \|$ — норма вектора; U — множество допустимых значений управления $u(t,x)$, $(t,x) \in Q_T$; V — множество допустимых значений управления $\vartheta(t,x)$, $(t,x) \in \gamma_T$.

Согласно схеме Беллмана — Егорова [4; 20], предполагая, что $S[t,x;\omega(t,x)]$ как функция дифференцируема по t и как функционал дифференцируема по Фреше, перепишем (3.1) в виде

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} \Delta t = \min_{u \in U, \vartheta \in V} \Bigg\{ \int\limits_t^{t+\Delta t} \left(\alpha \int\limits_Q M^2[\tau,x,u(\tau,x)]dx + \beta \int\limits_\gamma N^2[\tau,x,\vartheta(\tau,x)]dx \right) d\tau$$
$$+ ds[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)] + o(\Delta t) + \delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)] \Bigg\}, \tag{3.2}$$

где $\Delta\omega(t,x) = \omega[t+\Delta t, x] - \omega[t,x]$, $ds[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]$ — дифференциал Фреше, а $o(\Delta t)$ и $\delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]$ — бесконечно малые величины относительно Δt.

Поскольку дифференциал Фреше относительно $\Delta\omega(t,x) \in H^2(Q_T) = H(Q_T) \times H(Q_T)$ $\forall (t,x) \in Q_T$ является линейным функционалом, то имеет место равенство

$$ds[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)] = \int\limits_Q m^*(t,x)\Delta\omega(t,x)dx$$
$$\equiv \int\limits_Q \big(m_1(t,x)\Delta v(t,x) + m_2(t,x)\Delta v_t(t,x)\big)dx, \tag{3.3}$$

где символ * — знак транспонирования; вектор-функция $m(t,x) = \{m_1(t,x), m_2(t,x)\}$ является градиентом функционала $S[t,x,\omega(t,x)]$ и принадлежит пространству $H^2(Q_T)$ почти при всех $(t,x) \in Q_T$. Заметим, что $m(t,x)$ определяется в зависимости от функционала $S[t,x,\omega(t,x)]$, т. е.

$$m(t,x) = m(t,x,S[t,x,\omega(t,x)]). \tag{3.4}$$

Легко проверить, что справедливо тождество

$$\int\limits_Q m^*(t,x)\Delta\omega(t,x)dx = \int\limits_Q \big(m_2(t,x)v_t(t,x)\big)_t^{t+\Delta t}dx$$
$$+ \int\limits_Q m_1(t,x)\Delta v(t,x)dx - \int\limits_Q \Delta m_2(t,x)v_t(t+\Delta t,x)dx. \tag{3.5}$$

С учетом соотношений (3.3)–(3.5) равенство (3.2) перепишем в виде

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t}\Delta t = \min_{u\in U,\vartheta\in V}\Bigg\{ \int\limits_t^{t+\Delta t}\Big(\alpha\int\limits_Q M^2[\tau,x,u(\tau,x)]dx + \beta\int\limits_\gamma N^2[\tau,x,\vartheta(\tau,x)]dx\Big)d\tau$$
$$+ \int\limits_Q \big(m_2(\tau,x)v_t(\tau,x)\big)_t^{t+\Delta t}dx + \int\limits_Q \big(m_1(t,x)\Delta v(t,x) - \Delta m_2(t,x)v_t(t+\Delta t,x)\big)dx$$
$$+ o(\Delta t) + \delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]\Bigg\}. \tag{3.6}$$

Пусть $m_2(t,x) \in H_1(Q_T)$. Тогда в интегральном тождестве (2.1), полагая $\phi(t,x) \equiv m_2(t,x)$ и $t_1 = t, t_2 = t+\Delta t$, имеем

$$\int\limits_Q (m_2(\tau,x)v_t(\tau,x))_t^{t+\Delta t}dt$$
$$\equiv \int\limits_t^{t+\Delta t}\Bigg\{\int\limits_Q\Big[m_{2t}(\tau,x)v_t(\tau,x) - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(\tau,x)m_{2x_i}(\tau,x) - c(x)v(\tau,x)m_2(\tau,x)$$
$$+ \Big(\lambda\int\limits_0^T K(\tau,\sigma)v(\sigma,x)d\sigma + f[\tau,x,u(\tau,x)]\Big)m_2(\tau,x)\Big]dx$$
$$+ \int\limits_\gamma \big(p[\tau,x,\vartheta(\tau,x)] - a(x)v(\tau,x)\big)m_2(\tau,x)dx\Bigg\}d\tau.$$

С учетом этого тождества равенство (3.6) представим в виде

$$
-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t}=\min_{u\in U,\vartheta\in V}\Bigg\{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\Big(\alpha\int\limits_{Q}M^2[\tau,x,u(\tau,x)]dx+\beta\int\limits_{\gamma}N^2[\tau,x,\vartheta(\tau,x)]dx\Big)d\tau
$$

$$
+\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\Bigg[\int\limits_{Q}\Big(m_{2t}(\tau,x)v_t(\tau,x)-\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(x)v_{x_k}(\tau,x)m_{2x_i}(\tau,x)-c(x)v(\tau,x)m_2(\tau,x)
$$

$$
+\Big(\lambda\int\limits_{0}^{T}K(\tau,\sigma)v(\sigma,x)d\sigma+f[\tau,x,u(\tau,x)]\Big)m_2(\tau,x)\Big)dx
$$

$$
+\int\limits_{\gamma}\big(p[\tau,x,\vartheta(\tau,x)]-a(x)v(\tau,x)\big)m_2(\tau,x)dx\Bigg]d\tau
$$

$$
+\int\limits_{Q}\Big[m_1(t,x)\frac{\Delta v(t,x)}{\Delta t}-\frac{\Delta m_2(t,x)}{\Delta t}v_t(t+\Delta t,x)\Big]dx+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}+\frac{\delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]}{\Delta t}\Bigg\}.
$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta t\to+0$ и после приведения подобных слагаемых, а также учитывая соотношения

$$
\lim_{t\to+0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0,\quad \lim_{t\to+0}\frac{\delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]}{\Delta t}=\lim_{t\to+0}\frac{o_2(\Delta t)}{\Delta t}=0,
$$

получим искомое функциональное уравнение типа Беллмана

$$
-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t}=\min_{u\in U,\vartheta\in V}\Bigg\{\int\limits_{Q}\big(\alpha M^2[t,x,u(t,x)]+m_2(t,x)f[t,x,u(t,x)]\big)dx
$$

$$
+\int\limits_{\gamma}\big(\beta N^2[t,x,\vartheta(t,x)]+m_2(t,x)p[t,x,\vartheta(t,x)]\big)dx+\int\limits_{Q}\Big(\lambda\int\limits_{0}^{T}K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau\Big)m_2(t,x)dx
$$

$$
+\int\limits_{Q}m_1(t,x)v_t(t,x)dx-\int\limits_{Q}\Big[\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)m_{2_{x_i}}(t,x)+c(x)v(t,x)m_2(t,x)\Big]dx
$$

$$
-\int\limits_{\gamma}a(x)v(t,x)m_2(t,x)dx\Bigg\},\tag{3.7}
$$

которое имеет место почти для всех $(t,x)\in Q_T$ и $(t,x)\in\gamma_T$.

Далее, используя разложения (2.2) и

$$
m_2(t,x)=\sum_{j=1}^{\infty}m_{2_j}(t)z_j(x),\quad m_{2_j}(t)=\int\limits_{Q}m_2(t,x)z_j(x)dx,
$$

а также формулу (2.3), получим соотношение

$$
\int\limits_{Q}\Big[\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)m_{2_{x_i}}(t,x)+c(x)v(t,x)m_2(t,x)\Big]dx+\int\limits_{\gamma}a(x)v(t,x)m_2(t,x)dx
$$

$$
=\sum_{j=1}^{\infty}m_{2_j}(t)\Big\{\int\limits_{Q}\Big[\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(x)v_{x_k}z_{j_{x_i}}(x)+c(x)v(t,x)z_j(x)\Big]dx
$$

$$+\int\limits_{\gamma} a(x)v(t,x)z_j(x)dx\Bigg\} = \sum_{j=1}^{\infty} m_{2_j}(t)\lambda_j^2 \int\limits_{Q} v(t,x)z_j(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} m_{2_j}(t)\lambda_j^2 v_j(t)$$

$$= \int\limits_{Q}\int\limits_{Q} m_2(t,x)D(\lambda,x,y)v(t,y)dydx,$$

где $D(\lambda,x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i(x)\lambda_i^2 z_i(y)$.

Теперь уравнение (3.7) перепишем в следующем виде:

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} = \min_{u\in U,\vartheta\in V}\Bigg\{\int\limits_{Q}\big(\alpha M^2[t,x,u(t,x)] + m_2(t,x)f[t,x,u(t,x)]\big)dx$$

$$+\int\limits_{\gamma}\big(\beta N^2[t,x,\vartheta(t,x)] + m_2(t,x)p[t,x,\vartheta(t,x)]\big)dx + \int\limits_{Q}\Bigg(\lambda\int\limits_{0}^{T} K(t,\tau)\vartheta(\tau,x)d\tau\Bigg)m_2(t,x)dx$$

$$+\int\limits_{Q}\Bigg(m_1(t,x)\vartheta_t(t,x) - m_2(t,x)\int\limits_{Q} D(\lambda,x,y)v(t,y)dy\Bigg)dx\Bigg\}. \tag{3.8}$$

Согласно (3.1) это уравнение следует рассматривать вместе с условием

$$S[T,x,\omega(T,x)] = \int\limits_{Q} \parallel \omega(T,x) - \xi(x) \parallel^2 dx. \tag{3.9}$$

Таким образом, $S[t,x,\omega(t,x)]$ следует находить как решение задачи (3.8), (3.9), которая называется задачей Коши — Беллмана. Для построения решения этой задачи сначала решаем задачу минимизации правой части уравнения (3.8). При этом следует различать следующие случаи.

1. U и V — открытые множества.
2. U — открытое, а V — замкнутое множество.
3. U — замкнутое, а V — открытое множество.
4. U и V — замкнутые множества.

Рассмотрим задачу минимизации в уравнении (3.7) в случае, когда U и V — открытые множества. Применяя классический метод решения задачи экстремума [24], находим, что "подозрительное на оптимальность" распределенное управление $u^0(t,x)$ определяется согласно условиям оптимальности в виде равенства

$$2\alpha M[t,x,u(t,x)]M_u[t,x,u(t,x)] + m_2[t,x,\omega(t,x)]f_u[t,x,u(t,x)] = 0 \tag{3.10}$$

и дифференциального неравенства

$$2\alpha\big(M[t,x,u(t,x)]M_u[t,x,u(t,x)]\big)_u + m_2[t,x,\omega(t,x)]f_{uu}[t,x,u(t,x)] > 0,$$

которые выполняются одновременно почти для всех $(t,x)\in Q_T$. Дифференциальное неравенство является трудно проверяемым условием. Однако его можно преобразовать к виду

$$f_u[t,x,u(t,x)]\left(\frac{M[t,x,u(t,x)]M_u[t,x,u(t,x)]}{f_u[t,x,u(t,x)]}\right)_u > 0, \quad (t,x)\in Q_T, \tag{3.11}$$

исключив $m_2[t,x,\omega(t,x)]$ согласно (3.10). Пусть выполнены условия оптимальности (3.10) и (3.11).Тогда согласно теореме о неявных функциях [23;24] из равенства (3.10) управление $u(t,x)$

определяется однозначно, т. е. существует функция $\varphi_1[.]$ такая, что

$$u^0(t,x) = \varphi_1(t,x,m_2[t,x,\omega(t,x)],\alpha), \quad (t,x) \in Q_T. \tag{3.12}$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функции $f[t,x,u(t,x)]$ и $M[t,x,u(t,x)]$ удовлетворяют условиям* (1.5) *и* (3.8)*, а множество U является открытым. Тогда существует функция $\varphi_1[.]$, которая однозначно осуществляет синтез распределенного оптимального управления по формуле* (3.12).

Аналогичным образом “подозрительное на оптимальность” граничное управление $\vartheta^0(t,x)$ определяется согласно условиям в виде равенства

$$2\beta N[t,x,\vartheta(t,x)]N_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)] + m_2[t,x,\omega(t,x)]p_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)] = 0, \quad (t,x) \in \gamma_T,$$

и дифференциального неравенства

$$p_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)]\left(\frac{N[t,x,\vartheta(t,x)]N_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)]}{p_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)]}\right)_\vartheta > 0, \quad (t,x) \in \gamma_T, \tag{3.13}$$

и имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть множество V является открытым и функции $p[t,x,\vartheta(t,x)], N[t,x,\vartheta(t,x)]$ удовлетворяют условиям* (1.5) *и* (3.13)*. Тогда существует однозначная функция $\varphi_2[.]$, которая осуществляет синтез граничного оптимального управления по формуле*

$$\vartheta^0(t,x) = \varphi_2(t,x,m_2[t,x,\omega(t,x)],\beta), \quad (t,x) \in \gamma_T. \tag{3.14}$$

Теперь найденные по формулам (3.12) и (3.14) управления $u^0(t,x)$ и $\vartheta^0(t,x)$ подставим в (3.8) и получим уравнение вида

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} =$$

$$= \int\limits_Q \Big\{\alpha M^2[t,x,\varphi_1(t,x,m_2[t,x,\omega(t,x),\alpha])] + m_2[t,x,\omega(t,x)]f[t,x,\varphi_1(t,x,m_2[t,x,\omega(t,x),\alpha])]\Big\}dx$$

$$+ \int\limits_\gamma \Big\{\beta N^2[t,x,\varphi_2(t,x,m_2[t,x,\omega(t,x),\beta)] + m_2[t,x,\omega(t,x)]\,p[t,x,\varphi_2(t,x,m_2[t,x,\omega(t,x),\beta])]\Big\}dx$$

$$+ \int\limits_Q \Big\{m_1(t,x)\vartheta_t(t,x) - m_2(t,x,\omega(t,x)) \int\limits_Q D(\lambda,x,y)v(t,y)dy\Big\}dx$$

$$+ \lambda \int\limits_Q m_2[t,x,\omega(t,x)] \int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau dx, \tag{3.15}$$

которое является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением сложной природы. Его решение будем искать в виде

$$S[t,x,\omega(t,x)] = S_0[t,x,\omega(t,x)] + \lambda S_1[t,x,\omega(t,x)], \tag{3.16}$$

где $S_0[t,x,\omega(t,x)]$ и $S_1[t,x,\omega(t,x)]$ — неизвестные функции, а λ — параметр уравнения (1.1). Подставим (3.16) в (3.15) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ, получим следующие уравнения:

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} =$$

$$= \int\limits_Q \Big\{\alpha M^2[t,x,\varphi_1(t,x,m_2[t,x,\omega(t,x),\alpha])] + m_2[t,x,\omega(t,x)]f[t,x,\varphi_1(t,x,m_2[t,x,\omega(t,x),\alpha])]\Big\}dx$$

$$+ \int\limits_\gamma \Big\{\beta N^2[t,x,\varphi_2(t,x,m_2[t,x,\omega(t,x),\beta)] + m_2[t,x,\omega(t,x)]p[t,x,\varphi_2(t,x,m_2[t,x,\omega(t,x),\beta])]\Big\}dx$$

$$+ \int\limits_Q \Big\{m_1(t,x)\vartheta_t(t,x) - m_2(t,x,\omega(t,x)) \int\limits_Q D(\lambda,x,y)v(t,y)dy\Big\}dx, \tag{3.17}$$

$$-\frac{\partial S_1[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} = \int\limits_Q m_2[t,x,\omega(t,x)] \int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau dx. \tag{3.18}$$

Согласно (3.16) из (3.9) получим для уравнения (3.17) дополнительное условие вида

$$S_0[T,x,\omega(T,x)] = \int\limits_Q \parallel \omega(T,x) - \xi(x) \parallel^2 dx, \tag{3.19}$$

а для уравнения (3.18) — условие вида

$$S_1[T,x,\omega(T,x)] = 0. \tag{3.20}$$

Заметим, что задача (3.17), (3.19) может быть исследована независимо от задачи (3.18), (3.20). В общем случае алгоритм построения решения этих задач не разработан. Тем не менее на практике предложенная структура (3.16) решения уравнения (3.15) может оказаться полезной при исследовании задачи синтеза для управляемых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями.

Таким образом, если U и V — открытые множества, то удается более или менее полно исследовать разрешимость задачи синтеза и разработать алгоритм построения управлений $u^0[t,x,\omega(t,x)]$ и $\vartheta^0[t,x,\omega(t,x)]$ в зависимости от состояния управляемого процесса $\omega(t,x)$ в виде формул (3.12) и (3.14).

В случаях, когда одно или оба из множеств U и V замкнутые, управления $u^0(t,x)$ и $\vartheta^0(t,x)$, найденные из условия минимизации правой части уравнения (3.8), с учетом граничных значений множеств U и V будут отличаться от управлений (3.12) и (3.14). Но это не влияет на сруктуру уравнения типа Беллмана (3.17) и на структуру его решения вида (3.16). Однако в каждом из этих случаев разрешимость задачи синтеза может быть исследована в отдельности.

Заключение

Использованная методика вывода функционального уравнения для функционала Беллмана впервые была разработана А. И. Егоровым на примере управления тепловыми процессами, описываемыми параболическими уравнениями в частных производных [4]. При этом он отметил [2], что “уравнение Беллмана может дать лишь необходимые условия оптимальности и изложенный метод нельзя считать обоснованным, так как не исследованы дифференцируемость функционала Беллмана и принадлежность его градиента классу функций $H_1(Q_T)$. Поэтому процедуру получения оптимального управления с помощью уравнения Беллмана следует рассматривать как эвристический прием, позволяющий выделить управления, подозрительные на оптимальность”. Тем не менее отдельные исследования [5–8], проведенные по схеме Беллмана — Егорова, дают удовлетворительные результаты, то есть удается решить задачу синтеза для различных управляемых технологических процессов.

В данной статье изложены некоторые особенности рассматриваемой задачи синтеза, в частности, показано, что наличие интегрального оператора Фредгольма существенно влияет на разрешимость задачи Коши — Беллмана и на структуру решения функционального уравнения типа Беллмана, а также на построение алгоритма синтезирущих управлений в зависимости от состояния управляемого процесса.

Полученные результаты могут быть использованы при разработке новых методов исследования и методов решения нелинейных задач синтеза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутковский А.Г.** Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 476 с.
2. **Егоров А.И.** Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
3. **Егоров А.И., Знаменская Л.Н.** Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. СПб.: Лань, 2017. 292 с.
4. **Egorov A.I.** Optimal stabilization of systems with distributed parameters // Optimization Techniques IFIP Technical Conference (1974) / ed. G.I. Marchuk. Novosibirsk, 1974. Berlin; Heidelberg: Springer, 1975. P. 167–172 . (Lecture Notes in Computer Science; vol 27). doi: 10.1007/3-540-07165-2_22 .
5. **Шенфельд Г.Б.** Синтез оптимального управления упругой конструкции // Оптимизация процессов в системах с рапределенными параметрами. Фрунзе: Илим, 1975. С. 23–26.
6. **Рахимов М.** О синтезе оптимального управления упругими колебаниями: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Ашхабад, 1979. 128 с.
7. **Рахимов М.** Применение методов динамического программирования и спектрального разложения к задачам оптимального управления системами с распределенными параметрами: автореферат дис. . . . д-р. физ.-мат. наук / МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва, 1989. 32 с.
8. **Керимбеков А.** Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами. Бишкек: Илим, 2003. 224 с.
9. **Вольтерра В.И.** Функциональная теория, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 456 с.
10. **Vladimirov V.S.** Mathematical problems of the uniform-speed theory of transport // Trudy Mat. Inst. Steklov. 1961. Vol. 61. P. 3–158.
11. **Рихтмайер Р.** Принципы современнной математической физики. М.: Мир, 1982. 488 с.
12. **Sachs E.W., Strauss A.K.** Efficient solution of a partial integro-differential equation in finance // Appl. Numer. Math. 2008. Vol. 58, iss. 11. P. 1687–1703.
13. **Thorwe J., Bhaleker S.** Solving partial integro-differential equations using Laplace transform method // Am. J. Comput. Appl. Math. 2012. Vol. 2, iss. 3. P. 101–104.
14. **Kerimbekov A.K., Abdyldaeva E.F.** Optimal distributed control for the processes of oscillation described by Fredholm integro-differential equations // Eurasian Math. J. 2015. Vol. 6, iss. 2. P. 18–40.
15. **Керимбеков А, Абдылдаева Э.Ф.** О равных отношениях в задаче граничного векторного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 163–176. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-163-176 .
16. **Kerimbekov A., Abdyldaeva E.F.** On the solvability of a nonlinear tracking problem under boundary control for the elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations // System Modeling and Optimization (CSMO 2015) / eds. L. Bociu, J.-A. Désidéri, A. Habbal. Cham: Springer, 2016. P. 312–321. (IFIP Advances in Information and Communication Technology; vol. 494). doi: 10.1007/978-3-319-55795-3_29 .
17. **Kerimbekov A., Abdyldaeva E.F, Duyshenalieva U.E.** Generalized solution of a boundary value problem under point exposure of external forces // International J. Pure Appl. Math. 2017. Vol. 113, iss. 4. P. 87–101. doi: 10.12732/ijpam.v113i4.9 .

18. **Kerimbekov A., Abdyldaeva E.F.** The optimal vector control for the elastic oscillations described by Fredholm integral-differential equations // Analysis and Partial Differential Equations: Perspectives from Developing Countries / eds. J. Delgado, M. Ruzhansky. Cham: Springer, 2019. P. 14–30. (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics; vol. 275). doi: 10.1007/978-3-030-05657-5_3 .
19. **Kerimbekov A., Tairova O.K.** On the solvability of synthesis problem for optimal point control of oscillatory processes // IFAC- PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 754–758. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.455 .
20. **Bellman R.** The theory of dynamic programming // Bull. Amer. Math. Soc. 1954. Vol. 60, iss. 6. P. 503–515.
21. **Плотников В.И.** Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Изв. АН ССР. Сер. математическая. 1968. Т. 32, № 4. С. 743–755.
22. **Краснов М.** Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 304 с.
23. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
24. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. 480 с.

Поступила 29.01.2021
После доработки 22.03.2021
Принята к публикации 2.04.2021

Керимбеков Акылбек
д-р физ.-мат. наук, профессор
зам. зав. кафедрой
Кыргызско-российский Славянский университет
г. Бишкек
e-mail: akl7@rambler.ru

REFERENCES

1. Butkovskiy A.G. *Distributed control systems.* N Y: Elsevier, 1969, 446 p. ISBN: 0444000615 . Original Russian text published in Butkovskii A.G. *Teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami.* Moscow: Nauka Publ., 1965, 476 p.
2. Egorov A.I. *Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami* [Optimal control of thermal and diffusion processes]. Moscow: Nauka Publ., 1978, 464 p.
3. Egorov A.I., Znamenskaya L.N. *Vvedenie v teoriyu upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [Introduction to the control theory of systems with distributed parameters]. SPb.: Lan', 2017, 292 p. ISBN: 978-5-8114-2554-9 .
4. Egorov A.I. Optimal stabilization of the distributed parameter systems. In: Marchuk G.I. (eds), *Optimization Techniques IFIP Technical Conference*, (Novosibirsk, July 1–7, 1974), Lecture Notes in Computer Science, vol 27, Berlin; Heidelberg: Springer, 1975, pp. 167–172 . doi: 10.1007/3-540-07165-2_22 .
5. Shenfel'd G.B. Optimal control synthesis for an elastic structure. In: *Optimizatsiya protsessov v sistemakh s rapredelennymi parametrami.* Frunze: Ilim Pibl., 1975, pp. 23–26. (in Russian)
6. Rakhimov M. *O sinteze optimal'nogo upravleniya uprugimi kolebaniyami* [On the synthesis of optimal control of elastic vibrations], Candidate Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Ashkhabad, 1979, 128 p.
7. Rakhimov M. *Primenenie metodov dinamicheskogo programmirovaniya i spektral'nogo razlozheniya k zadacham optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [Application of dynamic programming and spectral decomposition methods to problems of optimal control of systems with distributed parameters], Abstract of Doctor Sci. (Phys.-Math.) Dissertation: 01.01.02, Mos. Gos. Univ. Moscow, 1989, 32 p.
8. Kerimbekov A. *Nelineinoe optimal'noe upravlenie lineinymi sistemami s raspredelennymi parametrami* [Nonlinear optimal control of linear systems with distributed parameters], Doctor Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Bishkek: Ilim Publ, 2003, 224 p.
9. Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations.* N Y: Dover, 1959, 226 p. ISBN: 0486442845 . Translated to Russian under the title *Funktsional'naya teoriya, integral'nye i integrodifferentsial'nye uravneniya*, Moscow: Nauka Publ., 1984, 456 p.

10. Vladimirov V.S. Mathematical problems of the uniform-speed transport theory of particles. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 1961, vol. 61, pp. 3–158 (in Russian).
11. Richtmyer R.D. *Principles of advanced mathematical physics*, vol. 1. N Y: Springer-Verlag, 1978, 424 p. doi: 10.1007/978-3-642-46378-5 . Translated to Russian under the title *Printsipy sovremennoi matematicheskoi fiziki*, Moscow: Mir Publ., 1982, 488 p.
12. Sachs E.W., Strauss A.K. Efficient solution of a partial integro-differential equation in finance. *Applied Numerical Mathematics*, 2008, vol. 58, no. 11, pp. 1687–1703. doi: 10.1016/j.apnum.2007.11.002 .
13. Thorwe J., Bhaleker S. Solving partial integro-differential equations using Laplace transform method. *Am. J. Comput. Appl. Math.*, 2012, vol. 2, no. 3, pp. 101–104. doi: 10.5923/j.ajcam.20120203.06 .
14. Kerimbekov A.K., Abdyldaeva E.F. Optimal distributed control for the processes of oscillation described by Fredholm integro-differential equations. *Eurasian Math. J.*, 2015, vol. 6, no. 2, pp. 18–40.
15. Kerimbekov A.K., Abdyldaeva E.F. On the property of equal ratios in the problem of boundary vector control of elastic vibrations described by Fredholm integro-differential equations. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 163–176 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-163-176 .
16. Kerimbekov A., Abdyldaeva E. On the solvability of a nonlinear tracking problem under boundary control for the elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations. In: L. Bociu, J.-A. Désidéri, A. Habbal (eds), *System Modeling and Optimization* (CSMO 2015), IFIP Advances in Information and Communication Technology, vol. 494, Cham: Springer, 2016, pp. 312–321. doi: 10.1007/978-3-319-55795-3_29 .
17. Kerimbekov A., Abdyldaeva E., Duyshenalieva U. Generalized solution of a boundary value problem under point exposure of external forces. *International J. Pure Appl. Math.*, 2017, vol. 113, no. 4, pp. 87–101. doi: 10.12732/ijpam.v113i4.9 .
18. Kerimbekov A., Abdyldaeva E. The optimal vector control for the elastic oscillations described by Fredholm integral-differential equations. In: J. Delgado, M. Ruzhansky (eds.), *Analysis and Partial Differential Equations: Perspectives from Developing Countries*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 275, Cham: Springer, 2019, pp. 14–30. doi: 10.1007/978-3-030-05657-5_3 .
19. Kerimbekov A., Tairova O.K. On the solvability of synthesis problem for optimal point control of oscillatory processes. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 754–758. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.455 .
20. Bellman R. The theory of dynamic programming. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1954, vol. 60, no. 6, pp. 503–515. doi: 10.1090/S0002-9904-1954-09848-8 .
21. Plotnikov V.I. An energy inequality and the overdeterminacy property of a system of eigenfunctions. *Math. USSR-Izv.*, 1968, vol. 2, no. 4, pp. 695–707. doi: 10.1070/IM1968v002n04ABEH000656 .
22. Krasnov M. *Integral'nye uravneniya* [Integral equations]. Moscow: Nauka Publ., 1975, 304 p.
23. Lusternik L.A. Sobolev V.J. *Elements of functional analysis.* International monographs on advanced mathematics and physics. Delhi: Hindustan Publishing Corp., 1974, 360 p. ISBN: 0470556501 . Original Russian text published in Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Elementy funktsional'nogo analiza*, Moscow: Nauka Publ., 1965, 520 p.
24. Smirnov V.I. *A course of higher mathematics, vol. 1.* Oxford: Pergamon Press, 1964, 546 p. ISBN: 9781483152592 . Original Russian text published in Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki. T. 1.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 480 p.

Received January 29, 2021
Revised March 22, 2021
Accepted April 2, 2021

Akylbek Kerimbekov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Kyrgyz-Russian Slavic university, Bishkek, 720022 Kyrgyzstan, e-mail: akl7@rambler.ru .

Cite this article as: A. Kerimbekov. On the solvability of the problem of synthesizing distributed and boundary controls in the optimization of oscillation processes, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 128–140 .