ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.956.4

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТАВНОГО ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ[1]

А. М. Денисов

Рассматривается начально-краевая задача для двумерного уравнения теплопроводности с источником. Источник является составным, а именно, представляет собой сумму двух неизвестных функций пространственных переменных, умноженных на заданные степенные функции времени. Ставится обратная задача, состоящая в определении двух неизвестных функций пространственных переменных по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи, являющейся функцией времени и одной из пространственных переменных. Показано, что такая обратная задача в общем случае имеет бесконечное множество решений. Доказаны теоремы единственности решения обратной задачи в некоторых специальных классах неизвестных функций.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, неизвестный источник, обратная задача, единственность решения.

A. M. Denisov. On the uniqueness of a solution to the problem of finding a composite source in the heat equation.

An initial–boundary value problem is considered for a two-dimensional heat equation with a source. The source is composite; namely, it is the sum of two unknown functions of spatial variables multiplied by given power functions of time. An inverse problem is posed, which consists in determining the two unknown functions from additional information about the solution of the initial–boundary value problem, which is a function of time and of one of the spatial variables. It is shown that such an inverse problem has an infinite set of solutions in the general case. Theorems on the uniqueness of a solution of the inverse problem in some special classes of unknown functions are proved.

Keywords: heat equation, unknown source, inverse problem, uniqueness of solution.

MSC: 65M32

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-120-127

1. Введение. Постановка задачи

Обратные задачи для уравнения теплопроводности представляют собой широкий класс обратных задач для дифференциальных уравнений. Их многообразие определяется, с одной стороны, различными прикладными проблемами, при решении которых они возникают, а с другой стороны, всевозможными вариантами их математических постановок. Исследованию обратных задач для уравнения теплопроводности посвящено большое число публикаций (см., например, [1–10] и имеющуюся там библиографию).

Важный класс обратных задач для уравнения теплопроводности образуют задачи определения неизвестного источника по дополнительной информации о решении уравнения. Одним ключевых при этом является вопрос о единственности решения обратной задачи. Единственность решения задач определения источника исследовалась в [11–19] и ряде других работ. Как правило, в задачах определения источника ищется одна неизвестная функция по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи. Однако с практической точки зрения, возможны такие постановки задачи, когда источник является составным, т. е. представляет собой сумму двух или более неизвестных функций. Исследованию вопросов единственности решения задачи определения такого типа источника посвящена эта работа.

[1]Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Рассмотрим начально-краевую задачу для функции $u(x,y,t)$:

$$u_t = \Delta u + F(x,y)p_1(t) + G(x,y)p_2(t), \quad (x,y) \in D, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$u(x,0,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

$$u_y(x,l,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

$$u(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{1.4}$$

где $D = \{(x,y)\colon x \in \mathbb{R},\ y \in (0,l)\}$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ заданы, а функции $F(x,y)$ и $G(x,y)$ неизвестны. Требуется определить $F(x,y)$ и $G(x,y)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1.1)–(1.4)

$$u_y(x,0,t) = h(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \tag{1.5}$$

Эта задача для $p_1(t) = e^{-\mu_1 t}$, $p_2(t) = e^{-\mu_2 t}$ была исследована в работе [18]. Было показано, что в общей постановке ее решение неединственно и указан класс функций $F(x,y)$ и $G(x,y)$, в котором решение обратной задачи единственно.

В этой статье сформулированная обратная задача изучается для случая, когда $p_1(t)$ и $p_2(t)$ являются степенными функциями.

2. Основные результаты

Рассмотрим вначале обратную задачу при $p_1(t) = t$ и $p_2(t) = t^2$. Покажем, что несмотря на сильное сужение класса неизвестных функций $F(x,y)$ и $G(x,y)$, решение обратной задачи в этом случае будет неединственно.

Введем множество функций

$$K = \{f(x)\colon f \in C(\mathbb{R}),\ |f(x)| \leq c(1+x^2)^{-1},\ x \in \mathbb{R}\},$$

где c — положительная постоянная.

Обозначим через λ_n числа $\dfrac{\pi(2n-1)}{2l}$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Рассмотрим класс K_m функций $F_m(x,y)$ таких, что

$$F_m(x,y) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x)\sin(\lambda_n y), \quad (x,y) \in \bar{D}, \tag{2.1}$$

где $f_n(x)$ принадлежат множеству K для всех $n = 1,2,\ldots,m$.

Покажем, что решение обратной задачи в классе функций K_m неединственно. Так как рассматриваемая обратная задача линейна, то достаточно доказать неединственность ее решения в случае, когда функция $h(x,t)$ в условии (1.5) равна нулю.

Обозначим через $u(x,y,t;F,G)$ решение задачи (1.1)–(1.4), соответствующее некоторым функциям $F(x,y)$ и $G(x,y)$.

Теорема 1. *Пусть $p_1(t) = t$ и $p_2(t) = t^2$. Существует бесконечное множество пар функций $F_m(x,y)$ и $G_m(x,y)$, представимых в виде* (2.1), *таких, что*

$$u_y(x,0,t;F_m,G_m) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим класс функций

$$U_0 = \{u(x,y,t)\colon u \in C(\bar{D} \times \bar{\mathbb{R}}^+),\ |u(x,y,t)| \le c(t)(1+x^2)^{-1}, (x,y,t) \in \bar{D} \times \bar{\mathbb{R}}^+\},$$

где $c(t)$ — положительная функция.

Пусть для функций

$$F_m(x,y) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x)\sin(\lambda_n y), \quad G_m(x,y) = \sum_{n=1}^{m} g_n(x)\sin(\lambda_n y),$$

принадлежащих классу K_m, существует решение задачи (1.1)–(1.4) $u(x,y,t;F_m,G_m)$ такое, что u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, $u_{yy} \in U_0$.

Обозначим через $\Phi[f](k)$ преобразование Фурье функции $f(x)$ из множества K:

$$\Phi[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx,$$

а через Φ^{-1} — обратное преобразование Фурье.

Рассмотрим функцию

$$v(k,y,t;F_m,G_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x,y,t;F_m,G_m)\,dx.$$

Так как $u(x,y,t;F_m,G_m)$ является решением задачи (1.1)–(1.4), то $v(k,y,t;F_m,G_m)$ такова, что

$$v_t = v_{yy} - k^2 v + \sum_{n=1}^{m} \big(t\Phi[f_n](k) + t^2\Phi[g_n](k)\big)\sin(\lambda_n y), \quad k \in \mathbb{R}, \quad y \in (0,l), \quad t \ge 0, \tag{2.3}$$

$$v(k,0,t;F_m,G_m) = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \ge 0, \tag{2.4}$$

$$v_y(k,l,t;F_m,G_m) = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \ge 0, \tag{2.5}$$

$$v(k,y,0;F_m,G_m) = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad y \in [0,l]. \tag{2.6}$$

Для решения задачи (2.3)–(2.6) справедлива формула

$$v(k,y,t;F_m,G_m) = \sum_{n=1}^{m} \Phi[f_n](k) R_{1n}(t,k)\sin(\lambda_n y) + \sum_{n=1}^{m} \Phi[g_n](k) R_{2n}(t,k)\sin(\lambda_n y), \tag{2.7}$$

где

$$R_{1n}(t,k) = \frac{t}{\lambda_n^2 + k^2} - \frac{1}{(\lambda_n^2+k^2)^2}\big[1 - e^{-(\lambda_n^2+k^2)t}\big], \tag{2.8}$$

$$R_{2n}(t,k) = \frac{t^2}{\lambda_n^2 + k^2} - \frac{2t}{(\lambda_n^2+k^2)^2} + \frac{2}{(\lambda_n^2+k^2)^3}\big[1 - e^{-(\lambda_n^2+k^2)t}\big]. \tag{2.9}$$

Предположив, что функция $u(x,y,t;F_m,G_m)$ удовлетворяет условию (2.2), получим, что

$$v_y(k,0,t;F_m,G_m) = \sum_{n=1}^{m} \big[\Phi[f_n](k)R_{1n}(t,k) + \Phi[g_n](k)R_{2n}(t,k)\big]\lambda_n = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \ge 0. \tag{2.10}$$

Из определения функций $R_{1n}(t,k)$ и $R_{2n}(t,k)$ следует, что равенство (2.10) эквивалентно равенствам

$$2\Phi[g_n](k) = (\lambda_n^2 + k^2)\Phi[f_n](k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad n = 1,2,\ldots,m, \tag{2.11}$$

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda_n \Phi[f_n](k) = 0, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Покажем, что в рассматриваемом случае решение обратной задачи не будет единственно даже при $m = 2$.

Пусть $\bar{f}_1(x)$ — произвольная четная функция с компактным носителем такая, что $\bar{f}_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Определим функции $\bar{f}_2(x)$, $\bar{g}_1(x)$ и $\bar{g}_2(x)$:

$$\bar{f}_2(x) = -\lambda_1(\lambda_2)^{-1}\bar{f}_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

$$\bar{g}_n(x) = \Phi^{-1}\Big[\frac{1}{2}(\lambda_n^2 + k^2)\Phi[\bar{f}_n](k)\Big](x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2. \tag{2.14}$$

Из свойств $\bar{f}_1(x)$ следует, что $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2 \in K$. Учитывая определения (2.13), (2.14), получим, что для функций $\bar{f}_1(x)$, $\bar{f}_2(x)$, $\bar{g}_1(x)$ и $\bar{g}_2(x)$ выполнены равенства (2.11), (2.12) при $m = 2$.

Определим функции

$$\bar{F}_2(x, y) = \sum_{n=1}^{2} \bar{f}_n(x)\sin(\lambda_n y), \quad \bar{G}_2(x, y) = \sum_{n=1}^{2} \bar{g}_n(x)\sin(\lambda_n y)$$

и рассмотрим решение задачи (1.1)–(1.4) $u(x, y, t; \bar{F}_2, \bar{G}_2)$, соответствующее этим функциям. Из определений (2.13), (2.14) следует, что для преобразования Фурье $v(k, y, t; \bar{F}_2, \bar{G}_2)$ от функции $u(x, y, t; \bar{F}_2, \bar{G}_2)$ справедливо равенство

$$v_y(x, 0, t; \bar{F}_2, \bar{G}_2) = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Тогда $u(x, y, t; \bar{F}_2, \bar{G}_2)$ удовлетворяет условию (2.2), а значит, решение обратной задачи неединственно.

Так как существует бесконечно много четных функций $\bar{f}(x)$, $\bar{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$, имеющих компактный носитель, то существует бесконечно много пар функций $\bar{F}_2(x, y), \bar{G}_2(x, y)$ таких, что фунция $u(x, y, t; \bar{F}_2, \bar{G}_2)$ — решение задачи (1.1)–(1.4) при $p_1(t) = t$ и $p_2(t) = t^2$ удовлетворяет условию (2.2).

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из предложенного доказательства неединственности решения обратной задачи при $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2$, $m = 2$ следует, что в случае $m > 2$ можно строить примеры неединственности решения с большим числом произвольных функций.

Докажем, что существуют такие функции $p_1(t) = t^M$, $p_2(t) = t^q$, что для них решение обратной задачи единственно в классе функций K_m, где m — произвольное фиксированное натуральное число.

Дадим определение решения обратной задачи.

О п р е д е л е н и е 1. Функции $F_m(x, y)$, $G_m(x, y)$, $u(x, y, t; F_m, G_m)$ называются решением обратной задачи (1.1)–(1.5), если $F_m(x, y)$, $G_m(x, y)$ принадлежат классу K_m, u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, $u_{yy} \in U_0$ и $F_m(x, y)$, $G_m(x, y)$, $u(x, y, t; F_m, G_m)$ удовлетворяют (1.1)–(1.5).

Так как обратная задача (1.1)–(1.5) линейна, то для доказательства единственности ее решения достаточно доказать, что при $h(x, t) = 0$ она имеет только нулевое решение.

Теорема 2. *Пусть $p_1(t) = t^M$, $p_2(t) = t^q$, где M и q — натуральные числа такие, что $M > m + q$. Тогда, если $F_m(x, y)$, $G_m(x, y)$, $u(x, y, t; F_m, G_m)$ — решение обратной задачи с $h(x, t) = 0$, то $F_m(x, y) = G_m(x, y) = 0$ для $(x, y) \in \bar{D}$, а $u(x, y, t; F_m, G_m) = 0$ для $(x, y) \in \bar{D}$, $t \geq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим преобразование Фурье $v(k, y, t; F_m, G_m)$ функции $u(x, y, t; F_m, G_m)$.

Так как $u(x, y, t; F_m, G_m)$ является решением обратной задачи с $h(x, t) = 0$, то функция $v(k, y, t; F_m, G_m)$ такова, что

$$v_t = v_{yy} - k^2 v + \sum_{n=1}^{m} \bigl(t^M \Phi[f_n](k) + t^q \Phi[g_n](k)\bigr) \sin(\lambda_n y), \quad k \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, l), \quad t \geq 0, \tag{2.15}$$

$$v(k, 0, t; F_m, G_m) = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \tag{2.16}$$

$$v_y(k, l, t; F_m, G_m) = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \tag{2.17}$$

$$v(k, y, 0; F_m, G_m) = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, l], \tag{2.18}$$

$$v_y(k, 0, t; F_m, G_m) = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \tag{2.19}$$

Из уравнения (2.15) и условий (2.16)–(2.18) следует, что

$$v(k, y, t; F_m, G_m) = \sum_{n=1}^{m} \Phi[f_n](k) \sin(\lambda_n y) \int_0^t e^{-(\lambda_n^2 + k^2)(t-\tau)} \tau^M \, d\tau$$

$$+ \sum_{n=1}^{m} \Phi[g_n](k) \sin(\lambda_n y) \int_0^t e^{-(\lambda_n^2 + k^2)(t-\tau)} \tau^q \, d\tau.$$

Учитывая условие (2.19), получим, что

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda_n \Phi[f_n](k) \int_0^t e^{-(\lambda_n^2 + k^2)(t-\tau)} \tau^M \, d\tau$$

$$+ \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \Phi[g_n](k) \int_0^t e^{-(\lambda_n^2 + k^2)(t-\tau)} \tau^q \, d\tau = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \tag{2.20}$$

Из этого равенства следует, что $\Phi[f_n](k)$ являются решениями однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda_n (\lambda_n^2 + k^2)^{-s} \Phi[f_n](k) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, m, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля для всех $k \in \mathbb{R}$, то

$$\Phi[f_n](k) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, m, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Учитывая эти равенства и условие (2.20), имеем

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda_n \Phi[g_n](k) \int_0^t e^{-(\lambda_n^2 + k^2)(t-\tau)} \tau^q \, d\tau = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

а значит,

$$\Phi[g_n](k) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, m, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Из равенств (2.21) и (2.22) следует, что $F_m(x, y) = G_m(x, y) = 0$ для $(x, y) \in \bar{D}$. Тогда $u(x, y, t; F_m, G_m) = 0$ для $(x, y) \in \bar{D}$, $t \geq 0$.

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим другой вариант сужения класса неизвестных функций $F(x, y)$, $G(x, y)$, обеспечивающий единственность решения обратной задачи.

Пусть $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2$.

Обозначим через Q множество функций $F(x,y)$, имеющих компактный носитель $\operatorname{supp} F \in D$ и таких, что $F \in C^{2,3}(\bar{D})$.

О п р е д е л е н и е 2. Функции $F(x,y)$, $G(x,y)$, $u(x,y,t;F,G)$ называются решением обратной задачи (1.1)–(1.5), если $F, G \in Q$, u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, $u_{yy} \in U_0$ и $F(x,y)$, $G(x,y)$, $u(x,y,t;F,G)$ удовлетворяют (1.1)–(1.5).

Теорема 3. *Пусть $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2$. Если функции $F(x,y)$, $G(x,y)$, $u(x,y,t;F,G)$ являются решением обратной задачи с $h(x,t) = 0$ и $\operatorname{supp} \mathrm{F} \cap \operatorname{supp} \mathrm{G} = \varnothing$, то $F(x,y) = G(x,y) = 0$ для $(x,y) \in \bar{D}$, $u(x,y,t;F,G) = 0$ для $(x,y) \in \bar{D}$, $t \geq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим преобразования Фурье

$$v(k,y,t;F,G) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x,y,t;F,G)\, dx,$$

$$F_\Phi(k,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} F(x,y)\, dx, \quad G_\Phi(k,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} G(x,y)\, dx.$$

Так как $u(x,y,t;F,G)$ удовлетворяет (1.1)–(1.4), то для $v(k,y,t;F,G)$ справедливо представление

$$v(k,y,t;F,G) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{\Phi n}(k) R_{1n}(t,k) \sin(\lambda_n y) + \sum_{n=1}^{\infty} g_{\Phi n}(k) R_{2n}(t,k) \sin(\lambda_n y), \tag{2.23}$$

где

$$f_{\Phi n}(k) = \frac{2}{l} \int_0^l F_\Phi(k,y) \sin(\lambda_n y)\, dy, \quad g_{\Phi n}(k) = \frac{2}{l} \int_0^l G_\Phi(k,y) \sin(\lambda_n y)\, dy,$$

а $R_{1n}(t,k)$ и $R_{2n}(t,k)$ определяются формулами (2.8), (2.9).

Учитывая то, что функция $u(x,y,t;F,G)$ удовлетворяет условию (1.5) с $h(x,t) = 0$, и используя формулу (2.23), получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{\Phi n}(k) R_{1n}(t,k) \lambda_n + \sum_{n=1}^{\infty} g_{\Phi n}(k) R_{2n}(t,k) \lambda_n = 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \tag{2.24}$$

Из равенства (2.24) и формул (2.8), (2.9) следует, что $2g_{\Phi n}(k) = (\lambda_n^2 + k^2) f_{\Phi n}(k)$, $k \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Умножив эти равенства на $\sin(\lambda_n y)$ и просуммировав по n, получим

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2} F_\Phi(k,y) + k^2 F_\Phi(k,y) = 2G_\Phi(k,y), \quad k \in \mathbb{R}, \quad y \in [0,l].$$

Взяв обратное преобразование Фурье, имеем $\Delta F = -2G(x,y)$, $(x,y) \in D$. Рассматривая это уравнение в области $D \backslash \operatorname{supp} G$, получим, что

$$\Delta F = 0, \quad (x,y) \in D \backslash \operatorname{supp} G. \tag{2.25}$$

Из этого уравнения и теоремы о единственности продолжения решения эллиптического уравнения с аналитическими коэффициентами [20] следует, что $F(x,y) = 0$ в D. Тогда $G(x,y) = 0$ в D, а значит, и $u(x,y,t;F,G) = 0$ для $(x,y) \in \bar{D}$, $t \geq 0$.

Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Результаты теоремы 3 легко обобщаются на случай произвольных степенных функций $p_1(t) = t^n$ и $p_2(t) = t^m$. При этом уравнение (2.25) заменяется на уравнение эллиптического типа высокого порядка, для которого также справедлива теорема о единственности продолжения решения эллиптического уравнения с аналитическими коэффициентами [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н.** Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1935. Т. 1, № 5. С. 294–300.
2. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1980. 285 с.
3. **Романов В.Г.** Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 252 с.
4. **Алифанов О.М.** Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
5. **Денисов А.М.** Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 206 с.
6. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 238 с.
7. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Обратные задачи динамики для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 5. С. 579–597.
8. **Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.V.** Methods for solving inverse problems in mathematical physics. N Y: Marcel Dekker, 2000. 744 p.
9. **Isakov V.** Inverse problems for partial differential equations. N Y: Springer, 2006. 406 p.
10. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2018. 512 с.
11. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г.** Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969. 67 с.
12. **Cannon J.R., Perez-Esteva S.** Uniqueness and stability of 3d heat sources // Inverse Problems. 1991. Vol. 7, no. 1. P. 57–62.
13. **Прилепко А.И., Костин А.Б.** О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 4. С. 49–68.
14. **Cannon J.R., Du Chateau P.** Structural identification of an unknown source term in a heat equation // Inverse Problems. 1998. Vol. 14, no. 3. P. 535–551.
15. **Прилепко А.И., Ткаченко Д.С.** Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 4. С. 562–570.
16. **Choulli M., Yamamoto M.** Conditional stability in determining a heat source // J. Inverse Ill-Posed Pr. 2004. Vol. 12, no. 3. P. 233–243.
17. **Денисов А.М.** Задачи определения неизвестного источника в параболическом и гиперболическом уравнениях // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 5. С. 830–835. doi: 10.7868/S0044466915050087 .
18. **Денисов А.М.** Единственность и неединственность решения задачи определения источника в уравнении теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 10. С. 1737–1742. doi: 10.7868/S0044466916100069 .
19. **Соловьев В.В.** Об определении источников с компактными носителями в ограниченной области на плоскости для уравнения теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 5. С. 778–789. https://doi.org/10.7868/S0044466918050083 .
20. **Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 352 с.

Поступила 21.01.2021
После доработки 5.02.2021
Принята к публикации 8.02.2021

Денисов Александр Михайлович
д-р. физ.-мат. наук, профессор
фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: den@cs.msu.ru

REFERENCES

1. Tikhonov A.N. Uniqueness theorems for the heat equation. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1935, vol. 1, no. 5, pp. 294–300 (in Russian).
2. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis.* Providence: AMS, 1986, 290 p. ISBN: 0821898140 . Original Russian text published in Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza.* Novosibirsk: Nauka Publ., 1980, 285 p.

3. Romanov V.G. *Inverse problems of mathematical physics.* Utrecht: VNU Science Press, 1987, 239 p. ISBN: 90-6764-056-5 . Original Russian text published in Romanov V.G. *Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki.* Moscow: Nauka Publ., 1984, 252 p.
4. Alifanov O.M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse heat transfer problems]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1988, 280 p. ISBN: 5-217-00134-8 .
5. Denisov A.M. *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach* [Introduction to the theory of inverse problems]. Moscow: MGU Publ., 1994, 206 p. ISBN: 5-211-03079-6 .
6. Osipov Y.S., Vasil'ev F.P., Potapov M.M. *Osnovy metoda dinamicheskoi regulyarizatsii* [The basics of the dynamic regularization method]. Moscow: MGU Publ., 1999, 238 p. ISBN: 5-211-04085-6 .
7. Osipov Yu.S., Kryazhimskiy A.V., Maksimov V.I. Dynamic inverse problems for parabolic systems. *Differ. Equ.*, 2000, vol. 36, no. 5, pp. 643–661. doi: 10.1007/BF02754222 .
8. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.V. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics.* N Y: Marcel Dekker, 2000, 744 p. ISBN: 0-8247-1987-5 .
9. Isakov V. *Inverse problems for partial differential equations.* N Y: Springer, 2006, 406 p. ISBN: 978-0-387-32183-7 .
10. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk: SO RAN Publ., 2018, 512 p. ISBN: 978-5-7692-1607-7 .
11. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Vasil'ev V.G. *Multidimensional inverse problems for differential equations.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1970, 58 p. ISBN: 978-3-540-36404-7 . Original Russian text published in Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Vasil'ev V.G. *Mnogomernye obratnye zadachi dlya differentsial'nykh uravnenii.* Novosibirsk: Nauka Publ., 1969, 67 p.
12. Cannon J.R., Perez-Esteva S. Uniqueness and stability of 3D heat sources. *Inverse Problems*, 1991, vol. 7, no. 1, pp. 57–62. doi: 10.1088/0266-5611/7/1/006 .
13. Prilepko A.I., Kostin A.B. On certain inverse problems for parabolic equations with final and integral observation. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1993, vol. 75, no. 2, pp. 473–490. doi: 10.1070/SM1993v075n02ABEH003394 .
14. Cannon J.R., Du Chateau P. Structural identification of an unknown source term in a heat equation. *Inverse Problems*, 1998, vol. 14, no. 3, pp. 535–551. doi: 10.1088/0266-5611/14/3/010 .
15. Prilepko A.I., Tkachenko D.S. Properties of solutions of a parabolic equation and the uniqueness of the solution of the inverse source problem with integral overdetermination. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2003, vol. 43, no. 4, pp. 537–546.
16. Choulli M., Yamamoto M. Conditional stability in determining a heat source. *J. Inverse Ill-Posed Pr.*, 2004, vol. 12, no. 3, pp. 233–243. doi: 10.1515/1569394042215856 .
17. Denisov A.M. Problems of determining the unknown source in parabolic and hyperbolic equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 5, pp. 829–833. doi: 10.1134/S0965542515050085 .
18. Denisov A.M. Uniqueness and nonuniqueness of the solution to the problem of determining the source in the heat equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 10, pp. 1737–1742. doi: 10.1134/S0965542516100067 .
19. Solov'ev V.V. On determining sources with compact supports in a bounded plane domain for the heat equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 5, pp. 750–760. doi: 10.1134/S0965542518050159 .
20. Bers L., John F., Schechter M. *Partial differential equations.* New York: Interscience, 1964, 343 p. ISBN: 0821896989 . Translated to Russian under the title *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi.* Moscow: Mir Publ., 1966, 352 p.

Received January 21, 2021
Revised February 5, 2021
Accepted February 8, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

Aleksandr Mikhailovich Denisov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119992 Russia, e-mail: den@cs.msu.ru .

Cite this article as: A. M. Denisov. On the uniqueness of a solution to the problem of finding a composite source in the heat equation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 120–127 .