ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 2 2021

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДВУМЯ МАЛЫМИ СОПОДЧИНЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. II

А. Р. Данилин

Рассматривается задача оптимального граничного управления решениями уравнения эллиптического типа в ограниченной области с гладкой границей, с малым коэффициентом при операторе Лапласа и малым, соподчиненным с первым, коэффициентом при граничном условии и интегральными ограничениями на управление

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z := -\varepsilon^2 \Delta z + a(x) z = f(x), \quad x \in \Omega, \quad z \in H^1(\Omega), \\ l_\varepsilon z := \varepsilon^\beta \dfrac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), \qquad x \in \Gamma, \end{cases}$$

со следующим функционалом качества

$$J(u) := \|z - z_d\|^2 + \nu^{-1} |||u|||^2 \to \inf, \quad u \in \mathcal{U},$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\beta \geqslant 0$, $\beta \in \mathbb{Q}$, $\nu > 0$, $H^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций, $\partial z/\partial n$ — производная функции z в точке $x \in \Gamma$ по направлению внешней (по отношению к области Ω) нормали,

$$a(\cdot), f(\cdot), z_d(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g(\cdot) \in C^\infty(\Gamma), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad a(x) \geqslant \alpha^2 > 0,$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_r := \{u(\cdot) \in L_2(\Gamma) \colon |||u||| \leqslant r\}.$$

Здесь через $\|\cdot\|$ обозначена норма в пространстве $L_2(\Omega)$, а через $|||\cdot|||$ — норма в пространстве $L_2(\Gamma)$. Получено полное асимптотическое разложение по степеням малого параметра решения рассматриваемой задачи в случае, когда $\beta \geqslant 3/2$. В отличие от ранее рассмотренного случая, в данной задаче существенность ограничений на управление зависит от $|||g|||$.

Ключевые слова: сингулярные задачи, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

A. R. Danilin. Asymptotics of a solution to a problem of optimal boundary control with two small cosubordinate parameters. II.

We consider a problem of optimal boundary control for solutions of an elliptic type equation in a bounded domain with smooth boundary with a small coefficient at the Laplace operator, a small coefficient, cosubordinate with the first, at the boundary condition, and integral constraints on the control:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z := -\varepsilon^2 \Delta z + a(x) z = f(x), \quad x \in \Omega, \quad z \in H^1(\Omega), \\ l_\varepsilon z := \varepsilon^\beta \dfrac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), \qquad x \in \Gamma, \end{cases}$$

$$J(u) := \|z - z_d\|^2 + \nu^{-1} |||u|||^2 \to \inf, \quad u \in \mathcal{U},$$

where $0 < \varepsilon \ll 1$, $\beta \geqslant 0$, $\beta \in \mathbb{Q}$, $\nu > 0$, $H^1(\Omega)$ is the Sobolev function space, $\partial z/\partial n$ is the derivative of z at the point $x \in \Gamma$ in the direction of the outer (with respect to the domain Ω) normal,

$$a(\cdot), f(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g(\cdot) \in C^\infty(\Gamma), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad a(x) \geqslant \alpha^2 > 0,$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_r := \{u(\cdot) \in L_2(\Gamma) \colon |||u||| \leqslant r\}.$$

Here $\|\cdot\|$ and $|||\cdot|||$ are the norms in the spaces $L_2(\Omega)$ and $L_2(\Gamma)$, respectively. We find a complete asymptotic expansion of the solution of the problem in powers of the small parameter in the case where $\beta \geqslant 3/2$. In contrast to the previously considered case, the relevance of the constraints on the control depends on $|||g|||$.

Keywords: singular problems, optimal control, boundary value problems for systems of partial differential equations, asymptotic expansions.

MSC: 35C20, 35B25, 76M45, 93C70

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-108-119

Введение

В данной работе продолжено изучение задачи граничного оптимального управления [1] с двумя малыми соподчиненными параметрами, описанной в аннотации. В отличие от предыдущей работы [2] здесь рассмотрен новый случай изменения параметра β, который ранее никем не изучался. Основной проблемой исследования является получение полного асимптотического разложения решения рассматриваемой задачи оптимального управления. Основными методами исследования являются методы теории оптимального управления распределенными системами, методы асимптотического анализа и общематематические методы дедуктивного доказательства.

Исследование задач оптимального управления, определяемых уравнениями в частных производных, не теряет своей актуальности (см., например, [3–5] и библиографию в них).

В рассматриваемом случае в отличие от работы [2], в которой был подробно изучен случай $\beta \in (0; 3/2)$, существенность ограничений на управления зависит от величины $|||g|||$.

Другие сингулярные задачи оптимального управления решениями эллиптических уравнений рассматривались в [6; 7].

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ — ограниченная область с границей $\Gamma := \partial\Omega$. Будем предполагать, что $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ есть многообразие с краем Γ класса C^∞, расположенное по одну сторону от Γ.

Рассмотрим следующую задачу граничного оптимального управления [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.9)]:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z := -\varepsilon^2 \Delta z + a(x) z = f(x), & x \in \Omega, \quad z \in H^1(\Omega), \\ l_\varepsilon z := \varepsilon^\beta \dfrac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$J(u) := \|z - z_d\|^2 + \nu^{-1} |||u|||^2 \to \inf, \quad u \in \mathcal{U}, \tag{1.2}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\beta \geqslant 0$, $\beta \in \mathbb{Q}$, $\nu > 0$, $H^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций [8;9], $\partial z/\partial n$ — производная функции z в точке $x \in \Gamma$ по направлению внешней (по отношению к области Ω) нормали,

$$\begin{gathered} a(\cdot), f(\cdot), z_d(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g(\cdot) \in C^\infty(\Gamma) \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad a(x) \geqslant \alpha^2 > 0, \\ \mathcal{U} = \mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_r := \big\{u(\cdot) \in L_2(\Gamma) \colon |||u||| \leqslant r\big\}, \quad \beta \in [3/2; 2). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь через $|||\cdot|||$ обозначена норма в пространстве $L_2(\Gamma)$. Скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$ будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В пространстве $L_2(\Omega)$ для нормы и скалярного произведения используются обозначения $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ соответственно.

В [2, формулы (1.4) и (1.5)] получены следующие условия оптимальности: единственное оптимальное управление и соответствующее ему $z_\varepsilon(\cdot)$ находятся как единственное решение задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f(x), & \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d(x), & z_\varepsilon,\, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ l_\varepsilon z_\varepsilon + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon(x) = g(x), & l_\varepsilon p_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$u_\varepsilon(\cdot) = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon\Big|_\Gamma, \quad \lambda_\varepsilon \in (0; \nu\varepsilon^{2-\beta}] \colon (\lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon||| \leqslant 1) \wedge \big((\nu\varepsilon^{2-\beta} - \lambda_\varepsilon)\,(1 - \lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon|||) = 0\big). \tag{1.5}$$

Таким образом, оптимальное управление u_ε и состояние z_ε в задаче (1.1), (1.2) определяются из решения задачи (1.4), (1.5).

Цель работы — изучить поведение z_ε, p_ε и λ_ε при $\varepsilon \to 0$ и при каждом фиксированном $\beta \in [3/2; 2)$ построить асимптотическое разложение $z_\varepsilon, p_\varepsilon$ и λ_ε при $\varepsilon \to 0$ с точностью до любой степени параметра ε.

Для сокращения записи (и в связи с постоянством β при изменяемом ε) зависимость рассматриваемой задачи и ее решения от β не указывается.

2. Априорные оценки и разрешимость краевых задач

В [2, лемма 2] показано, что если $\overline{f} \in L_2(\Omega)$, $q \in L_2(\Gamma)$, а z_ε есть решение задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = \overline{f}(x), \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon \in H^1(\Omega), \quad l_\varepsilon z_\varepsilon = q(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2.1}$$

то существует $K > 0$ (не зависящее от ε и β) такое, что

$$\max\left\{\|z_\varepsilon\|, \varepsilon^{1/2}|||z_\varepsilon|||, \varepsilon\|\nabla z_\varepsilon\|\right\} \leqslant K(\|\overline{f}\| + \varepsilon^\gamma|||q|||), \quad \gamma := \frac{3}{2} - \beta. \tag{2.2}$$

Отметим, что в рассматриваемом в этой работе случае $\gamma \leqslant 0$.

В дальнейшем различные положительные константы, зависящие только от области Ω и коэффициента $a(\cdot)$, часто будем обозначать одной и этой же буквой K (возможно, с индексами).

В работе [7] (см. теорему 1) показано, что задача более общего вида, чем (1.4)

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z = f_1(x), & \mathcal{L}_\varepsilon p - z = f_2(x), \quad z,\, p \in H^1(\Omega), \\ l_\varepsilon z + \lambda p(x) = g_1(x), & l_\varepsilon p = g_2(x), \qquad\qquad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.3}$$

при выполнении условий (1.3) и

$$f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g_1(\cdot), g_2(\cdot) \in C^\infty(\Gamma)$$

разрешима единственным образом при любом $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ и справедливы соотношения $z_\varepsilon, p_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

При этом для решения задачи (2.3) справедливы следующие априорные оценки [2, теорема 1]: если z, p — решения задачи (2.3), то существует $K > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \max\{\|z\|, \varepsilon^{1/2}|||z|||, \varepsilon\|\nabla z\|\} \leqslant K(1 + \lambda\varepsilon^{1-\beta})\widetilde{D}(f_1, f_2, g_1, g_2; \varepsilon), \\ \max\{\|p\|, \varepsilon^{1/2}|||p|||, \varepsilon\|\nabla p\|\} \leqslant K(1 + \lambda\varepsilon^{1-\beta})\widetilde{D}(f_1, f_2, g_1, g_2; \varepsilon), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\widetilde{D}(f_1, f_2, g_1, g_2; \varepsilon) := \|f_1\| + \|f_2\| + \varepsilon^\gamma\big(|||g_1||| + |||g_2|||\big)$.

Для обоснования асимптотических разложений решений задачи (1.4), (1.5) нужны теоремы об оценке уклонения точного решения $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon\}$ этой задачи от решений аппроксимационной задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_{\varepsilon,N} = f(x) + f_{1,\varepsilon,N}(x), & \mathcal{L}_{\varepsilon,N} p_{\varepsilon,N} - z_{\varepsilon,N} = -z_d + f_{2,\varepsilon,N}(x), \quad x \in \Omega, \\ l_\varepsilon z_{\varepsilon,N} + \lambda_{\varepsilon,N} p_{\varepsilon,N} = g(x) + g_{1,\varepsilon,N}(x), & l_\varepsilon p_{\varepsilon,N} = g_{2,\varepsilon,N}(x), \qquad\qquad\qquad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.5}$$

в случае, когда при $\varepsilon \to 0$

$$f_{j,\varepsilon,N} \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g_{i,\varepsilon,N} \in C^\infty(\Gamma), \quad \|f_{j,\varepsilon,N}\| = O\big(\varepsilon^N\big), \quad |||g_{i,\varepsilon,N}|||_j = O\big(\varepsilon^N\big), \quad i, j = 1, 2, \tag{2.6}$$

и аппроксимации условия (1.5) (когда ограничения на управление по существу) в виде

$$\lambda_{\varepsilon,N}|||p_{\varepsilon,N}||| = 1 + O\big(\varepsilon^N\big), \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.7}$$

В случае, когда ограничения на управление не по существу, т. е. когда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon||| < 1, \tag{2.8}$$

и тем самым справедливо равенство $\lambda_\varepsilon = \nu\varepsilon^{2-\beta}$, оценки (2.4) при $\varepsilon \to +0$ с учетом неравенства $\gamma \leqslant 0$ дают следующие оценки аппроксимации:

$$\max\big\{\|z_{\varepsilon,N}\|, \varepsilon^{1/2}|||z_{\varepsilon,N}|||, \varepsilon\|\nabla z_{\varepsilon,N}\|, \|p_{\varepsilon,N}\|, \varepsilon^{1/2}|||p_{\varepsilon,N}|||, \varepsilon\|\nabla p_{\varepsilon,N}\|\big\} = O\big(\varepsilon^{N+3\gamma}\big). \tag{2.9}$$

В случае же, когда ограничения на управление по существу, т. е. когда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon||| = 1, \tag{2.10}$$

для получения аппроксимационных оценок приближенных решений потребуется вспомогательное утверждение о зависимости от r оптимального управления $u_{\varepsilon,r}$ в задаче (1.1), (1.2) при условии $|||u_{\varepsilon,r}||| = r$.

Решение этой проблемы дает следующая лемма.

Лемма. *Пусть выполнены условия* (1.3)*, а* $u_{\varepsilon,r}$ *— решение задачи* (1.1)*,* (1.2) *с* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$ *и* $|||u_{\varepsilon,r}||| = r$ *при всех* $r \in [r_*; r^*]$*. Тогда при некоторых* $K > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$

$$\forall\, r, r' \in [r_*; r^*]\, \forall\, \varepsilon \in (0; \varepsilon_0] \quad \|u_r - u_{r'}\| \leqslant K\varepsilon^{6\gamma}|r - r'|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве леммы 2.2 из [10], обозначим через $z_{\varepsilon,0}$ решение задачи (1.1) с $u = 0$, а через A — линейный оператор, $A : L_2(\Gamma) \to L_2(\Omega)$, который ставит в соответствие функции u_ε решение задачи (1.1), (1.2) с $f = 0$ и $g = 0$. Далее доказательство дословно повторяет доказательство указанной леммы с учетом того, что $\|z_{\varepsilon,0} - z_d\| \leqslant K\varepsilon^\gamma$ и $\|A\| \leqslant K\varepsilon^\gamma$ в силу (2.1). □

Из этой леммы аналогично тому, как это было сделано в [10, теорема 2.3], получаются следующие оценки аппроксимации.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.3)*,* (2.6)*,* (2.7) *и* $\lambda_{\varepsilon,N}$ *ограничена при* $\varepsilon \to 0$*. Если* $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon\}$ *— решение задачи* (1.4)*,* (1.5)*, а* $\{z_{\varepsilon,N}, p_{\varepsilon,N}, \lambda_{\varepsilon,N}\}$ *— решение задачи* (2.5) *с* (2.7)*, то при* $N > 4$ *справедливы следующие соотношения:*

$$\max\{\|z_\varepsilon - z_{\varepsilon,N}\|, |||z_\varepsilon - z_{\varepsilon,N}|||, \|\nabla(z_\varepsilon - z_{\varepsilon,N})\|\} = O\big(\varepsilon^{N+7\gamma}\big),$$

$$\max\{\|p_\varepsilon - p_{\varepsilon,N}\|, |||p_\varepsilon - p_{\varepsilon,N}|||, \|\nabla(p_\varepsilon - p_{\varepsilon,N})\|\} = O\big(\varepsilon^{N+8\gamma}\big),$$

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,N} p_{\varepsilon,N}| = O\big(\varepsilon^{N+6\gamma+2-\beta}\big)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Априорные оценки (2.9) и теорема 1 показывают, что формальное асимптотическое разложение решения системы (1.4), (1.5) будет его истинными асимптотическим разложением.

Отметим, что в силу гладкости коэффициентов всех разложений из априорных оценок Шаудера (см., например, [9, гл. 2, теорема 5.1]) и теоремы вложения Соболева [8, гл. I, п. 8, теорема 1] следует, что эти асимптотические разложения будут справедливы и в равномерной норме.

3. Построение асимптотики: вид внешнего и внутреннего разложений

В силу оценок аппроксимации для построения асимптотического разложения решения рассматриваемой задачи нужно построить его *формальное асимптотическое решение* (ф. а. р.) (см., например, [11, с. 10]). Это построение осуществляется аналогично тому, как это делается в случае одного уравнения [12; 13].

Пусть $\beta = \widetilde{n}/\widetilde{m}$ — несократимая дробь. Тогда в силу условия на β справедливы соотношения

$$3\widetilde{m} \leqslant 2\widetilde{n} < 4\widetilde{m}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим новый малый параметр $\mu := \varepsilon^{1/\widetilde{m}}$. Тогда задача (1.4), (1.5) примет вид

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{L}}_\mu z_\mu := -\mu^{2\widetilde{m}}\Delta z_\mu + a(x) = f(x), \quad \widehat{\mathcal{L}}_\mu p_\mu - z_\mu = -z_d(x), \quad z_\varepsilon,\, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \mu^{\widetilde{n}}\dfrac{\partial}{\partial n} z_\mu + \lambda_\mu p_\mu(x) = g(x), \qquad \dfrac{\partial}{\partial n} p_\mu = 0, \qquad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\lambda_\mu \in (0; \nu\mu^{2\widetilde{m}-\widetilde{n}}]\colon\ (\lambda_\mu |||p_\mu||| \leqslant 1) \wedge \Big((\nu\mu^{2\widetilde{m}-\widetilde{n}} - \lambda_\mu)\,(1 - \lambda_\mu |||p_\mu|||) = 0 \Big). \tag{3.3}$$

Внешнее разложение решения этой системы будем искать в виде рядов

$$z_{out}(x,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(x), \quad p_{out}(x,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k p_k(x), \quad \mu \to 0. \tag{3.4}$$

Коэффициенты этих рядов — $z_k(x), p_k(x)$ — находятся из соответствующей рекуррентной системы

$$\begin{cases} z_0(x) = -\dfrac{f(x)}{a(x)}, \qquad p_0(x) = \dfrac{z_0(x) - z_d(x)}{a(x)}, \\ z_k(x) = \dfrac{\Delta z_{k-2\widetilde{m}}}{a(x)}, \quad p_k = \dfrac{\Delta p_{k-2\widetilde{m}} + z_k}{a(x)}, \quad k \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Отметим, что, как обычно, если индекс у слагаемого меньше минимального индекса суммирования, то соответствующее слагаемое считается нулевым.

Все функции $z_k(x), p_k(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ хорошо аппроксимируют уравнения в системе (3.2), но не удовлетворяют граничным условиям.

Для того чтобы устранить невязку в граничных условиях, построим экспоненциально убывающие функции в окрестности всей границы Γ, удовлетворяющие соответствующей однородной системе.

Как известно, с учетом гладкости Γ в ее малой окрестности можно ввести систему координат $(s;\tau)$, где s — это координаты на Γ, а τ — расстояние от текущей точки $x \in \Omega$ до Γ.

Отметим, что пограничный слой имеет ширину порядка ε, а поправочные функции (внутреннее разложение) нужны не во всей области Ω, а лишь в ее малой окрестности. Поэтому после построения поправочные функции необходимо умножить на срезающую функцию η, т. е. функцию с носителем в малой окрестности границы и равную тождественно 1 в некоторой меньшей окрестности границы.

В пограничном слое перейдем к новым, *растянутым*, координатам (см., например, [11, с. 31–34])

$$\xi = \frac{\tau}{\varepsilon} = \frac{\tau}{\mu^{\widetilde{m}}}, \quad \varepsilon = \mu^{\widetilde{m}}.$$

При этом оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ перейдет в оператор

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\mu Z = -\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} Z - \mu^{\widetilde{m}} L_1 \frac{\partial}{\partial\xi} Z - \mu^{2\widetilde{m}} L_2 Z + \widetilde{a}(s, \mu^{\widetilde{m}}\xi) Z \ =:\ -\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} Z + \widetilde{a}(s, \mu^{\widetilde{m}}\xi) Z + \mu^{\widetilde{m}} \mathcal{M}_\mu Z. \tag{3.6}$$

Здесь L_1 и L_2 — дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядка, содержащие лишь дифференцирование по переменной s, с гладкими коэффициентами от s и $\tau = \mu^{\widetilde{m}}\xi$, а $\widetilde{a}(s,\tau)$ — это функция $a(x)$ в переменных s, τ.

Таким образом, однородная система для функций пограничного слоя в переменных s и ξ, соответствующая системе из (3.2), в силу равенств (3.6) имеет вид

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} Z + \widetilde{a}(s, \mu^{\widetilde{m}}\xi) Z = -\mu^{\widetilde{m}} \mathcal{M}_\mu Z, \quad -\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} P + \widetilde{a}(s, \mu^{\widetilde{m}}\xi) P - Z = -\mu^{\widetilde{m}} \mathcal{M}_\mu P. \end{cases} \tag{3.7}$$

Для граничных условий с учетом того, что

$$\frac{\partial}{\partial n} Z(s,\tau/\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial \tau} Z(s,\tau/\varepsilon) = -\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi} Z(s,\xi) = -\mu^{-\widetilde{m}}\frac{\partial}{\partial \xi} Z(s,\xi),$$

выводим следующие соотношения:

$$\begin{cases} -\mu^{\widetilde{n}-\widetilde{m}}\dfrac{\partial}{\partial \xi} Z(s,0) + \mu^{\widetilde{m}}\widetilde{\dfrac{\partial}{\partial n} z_{out}}(s,0) + \lambda_\mu\Big(P(s,0) + \widetilde{p_{out}}(s,0)\Big) \overset{as}{=} \widetilde{g}(s), \\ -\mu^{\widetilde{n}-\widetilde{m}}\dfrac{\partial}{\partial \xi} P(s,0) + \mu^{\widetilde{m}}\widetilde{\dfrac{\partial}{\partial n} p_{out}}(s,0) \overset{as}{=} 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Здесь волна над функцией, определенной в переменных x, означает выражение этой функции в переменных s и τ.

Внутреннее разложение (в окрестности Γ) будем искать в виде

$$\begin{gathered} Z_{in}(s,\xi,\mu) = \mu^{n_z}\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m Z_m(s,\xi), \quad P_{in}(s,\xi,\mu) = \mu^{n_p}\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m P_m(s,\xi), \\ \Lambda_\mu = \mu^{n_\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m\lambda_m. \end{gathered} \tag{3.9}$$

При этом с учетом (1.3), (3.3) и (3.1)

$$n_z, n_p, n_\lambda \in \mathbb{Z}, \quad n_\lambda \geqslant 2\widetilde{m} - \widetilde{n} > 0. \tag{3.10}$$

Отметим, что в силу (3.9) и (3.10) задача для главных членов внутреннего разложения имеет вид

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_0 Z_0 := -\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} Z_0 + \widetilde{a}_0(s) Z_0 = 0, \quad \widetilde{\mathcal{L}}_0 P_0 = \mu^{n_z-n_p} Z_0, \\ -\mu^{\widetilde{n}-\widetilde{m}+n_z}\dfrac{\partial}{\partial \xi} Z_0(s,0) + \lambda_0\mu^{n_\lambda+n_p} P_0(s,0) = \widetilde{g}(s), \quad \dfrac{\partial}{\partial \xi} P_0(s,0) = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

где

$$a(x) = \widetilde{a}(s,\mu^{\widetilde{m}}\xi) = \widetilde{a}_0(s) + \sum_{j=1}^{\infty}\mu^{j\widetilde{m}}\xi^j\widetilde{a}_j(s).$$

В классе экспоненциально убывающих при $\xi \to +\infty$ функций система (3.11) имеет единственное решение, задающееся формулами

$$Z_0(s,\xi) = \left[\frac{2\widetilde{a}_0(s)\widetilde{g}(s)}{2\widetilde{a}_0^{3/2}(s)\mu^{\widetilde{n}-\widetilde{m}+n_z} + \lambda_0\mu^{n_\lambda+n_z}}\, e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi}\right]_0, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} P_0(s,\xi) = \Bigg[&\frac{\widetilde{g}(s)}{2\widetilde{a}_0^{3/2}(s)\mu^{\widetilde{n}-\widetilde{m}+n_p} + \lambda_0\mu^{n_\lambda+n_p}}\, e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi} \\ &+ \frac{\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\widetilde{g}(s)}{2\widetilde{a}_0^{3/2}(s)\mu^{\widetilde{n}-\widetilde{m}+n_z} + \lambda_0\mu^{n_\lambda+n_z}}\, \mu^{n_z-n_p}\xi e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi}\Bigg]_0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Поэтому справедливо равенство

$$[\lambda_\mu p_\mu(s,0)]_0 = \left[\frac{\lambda_0\widetilde{g}(s)}{2\widetilde{a}_0^{3/2}(s)\mu^{\widetilde{n}-\widetilde{m}-n_\lambda} + \lambda_0}\right]_0. \tag{3.14}$$

Здесь $[W_\mu]_0$ — слагаемые порядка ноль в разложении W_μ в степенной асимптотический ряд по μ.

При этом в силу (1.3), (3.3) и (3.10)

$$\widetilde{n} - \widetilde{m} - n_\lambda \geqslant 2\widetilde{n} - 3\widetilde{m} \geqslant 0. \tag{3.15}$$

Тогда из равенства (3.14) имеем

$$[\lambda_\mu p_\mu(s,0)]_0 = \begin{cases} \widetilde{g}(s) & \text{при } \widetilde{n} - \widetilde{m} - n_\lambda > 0, \\ \dfrac{\lambda_0 \widetilde{g}(s)}{2\widetilde{a}_0^{3/2}(s) + \lambda_0} & \text{при } \widetilde{n} - \widetilde{m} - n_\lambda = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Тем самым справедливо неравенство

$$|||\,[\lambda_\mu p_\mu(\cdot,0)]_0\,||| \leqslant |||\widetilde{g}|||. \tag{3.17}$$

В силу соотношений (3.11) естественно положить $n_z = n_p$. А поскольку

$$2\widetilde{a}_0^{3/2}(s)\mu^{\widetilde{n}-\widetilde{m}+n_z} + \lambda_0\mu^{n_\lambda+n_z} = \mu^{n_\lambda+n_z}\big(2\widetilde{a}_0^{3/2}(s)\mu^{\widetilde{n}-\widetilde{m}-n_\lambda} + \lambda_0\big),$$

то в силу (3.15) из (3.12), (3.13) получим, что $n_\lambda + n_z = 0$. Таким образом, справедливы соотношения

$$n_z = n_p = -n_\lambda. \tag{3.18}$$

Подставляя ряды (3.9) в систему (3.7) и разлагая коэффициенты в уравнениях системы и операторов $\widetilde{\mathcal{L}}_0$ и $\mathcal{M}_\mu$, определенных в (3.6), в ряды Тейлора по переменной $\tau = \mu^{\widetilde{m}}\xi$, получим систему

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_0 Z_0 = 0, & \widetilde{\mathcal{L}}_0 P_0 - Z_0 = 0, \\ \widetilde{\mathcal{L}}_0 Z_m = F_m(s,\xi), & \widetilde{\mathcal{L}}_0 P_m - Z_m = G_m(s,\xi), \quad m > 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

где $F_m(s,\xi)$ и $G_m(s,\xi)$ линейно выражаются через предыдущие функции Z_k, P_k и их производные и полиномиально зависят от ξ и гладко от s.

4. Построение асимптотики решения при $|||p||| < 1$

Поскольку в случае (2.8) $\lambda_\mu = \nu\,\mu^{2\widetilde{m}-\widetilde{n}}$, то естественно рассмотреть систему (3.2) с таким λ_μ:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_\mu z_{\mu,\nu} = f(x), & \widetilde{\mathcal{L}}_\mu p_{\mu,\nu} - z_{\mu,\nu} = -z_d(x), \quad x \in \Omega, \\ \mu^{\widetilde{n}} \dfrac{\partial}{\partial n} z_{\mu,\nu} + \nu\mu^{2\widetilde{m}-\widetilde{n}} p_{\mu,\nu}(x) = g(x), & \dfrac{\partial}{\partial n} p_{\mu,\nu} = 0, \qquad\qquad x \in \Gamma. \end{cases} \tag{4.1}$$

В этом случае справедливо равенство $n_\lambda = 2\widetilde{m} - \widetilde{n}$, и поэтому с учетом (3.18) получим

$$n_z = n_p = \widetilde{n} - 2\widetilde{m}, \quad \widetilde{n} - \widetilde{m} + n_\lambda = 2\widetilde{n} - 3\widetilde{m} \geqslant 0.$$

Таким образом, при выполнении неравенства $2\widetilde{n} - 3\widetilde{m} > 0$, т.е. при $\beta > 3/2$, в силу (3.8) вид граничных условий для Z_m и P_m будет следующим:

$$\begin{cases} \nu P_0(s,0) = \widetilde{g}(s), & \dfrac{\partial}{\partial \xi} P_0(s,0) = 0, \\ \nu P_0(s,0) = G_{m,1}(s), & \dfrac{\partial}{\partial \xi} P_m(s,0) = G_{m,2}(s), \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Если же выполняется равенство $2\widetilde{n}-3\widetilde{m}=0$, т. е. $\beta=3/2$, то соотношения (4.2) примут вид

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial\xi}Z_0(s,0)+\nu P_0(s,0)=\widetilde{g}(s), & \dfrac{\partial}{\partial\xi}P_0(s,0)=0, \\ -\dfrac{\partial}{\partial\xi}Z_m(s,0)+\nu P_m(s,0)=G_{m,1}(s), & \dfrac{\partial}{\partial\xi}P_m(s,0)=G_{m,2}(s), \quad m\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Отметим, что и в соотношениях (4.2), и в соотношениях (4.3) функции $G_{m,i}$ (свои для каждой системы) линейно выражаются через предыдущие функции $Z_k(s,0)$, $P_k(s,0)$, $\widetilde{z}_k(s,0)$, $\widetilde{p}_k(s,0)$ и их производные и гладко зависят от s.

В классе экспоненциально убывающих при $\xi\to+\infty$ функций задачи (3.19), (4.2) и (3.19), (4.3) имеют единственное решение при каждом m. Все они имеют вид $Q(s,\xi)e^{-\xi\sqrt{\widetilde{a}_0}}$, где $Q(s,\xi)$ — полином соответствующей степени от ξ с коэффициентами, гладко зависящими от s. Поэтому ряды

$$\begin{aligned} z_{it} &= \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k z_k(x)+\eta(s,\tau)\mu^{n_z}\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m Z_m(s,\xi), \\ p_{it} &= \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k p_k(x)+\eta(s,\tau)\mu^{n_p}\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m P_m(s,\xi) \end{aligned} \tag{4.4}$$

являются ф.а.р. задачи (3.2), (3.3), и тем самым справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.3). *Тогда ряды* (4.4) *с* $n_z=n_p=\widetilde{n}-2\widetilde{m}$, *коэффициенты которых для рядов* (3.4) *определяются по формулам* (3.5), *а для рядов* (3.9) — *как решения задач* (3.19), (4.2) *и* (3.19), (4.3), *суть равномерные как в смысле пространства* $H^1(\Omega)$, *так и в смысле пространства* $C(\overline{\Omega})$ *асимптотические разложения при* $\mu\to0$ *функций* $z_{\mu,\nu}(x)$ *и* $p_{\mu,\nu}(x)$ — *решений задачи* (4.1).

Отметим, что

$$|||[\nu\mu^{2\widetilde{m}-\widetilde{n}}p_{\mu,\nu}]_0|||=|||\widetilde{g}|||\ \text{при}\ \beta>\frac{3}{2}. \tag{4.5}$$

Из теоремы 2 следует теорема об асимптотическом разложении решения задачи (3.2), (3.3) при условии $|||\widetilde{g}|||<1$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1.3) *и* $|||\widetilde{g}|||<1$. *Тогда ряды* (4.4), *коэффициенты которых для рядов* (3.4) *определяются по формулам* (3.5), *а для рядов* (3.9) — *как решения задач* (3.19), (4.2) *и* (3.19), (4.3), *суть равномерные как в смысле пространства* $H^1(\Omega)$, *так и в смысле пространства* $C(\overline{\Omega})$ *асимптотические разложения при* $\mu\to0$ *функций* $z_\mu(x)$ *и* $p_\mu(x)$ — *решениЙ задачи* (3.2), (3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3.17) справедливо неравенство $|||[\nu\mu^{2\widetilde{m}-\widetilde{n}}p_{\mu,\nu}]_0|||<1$, а следовательно, и $\nu\mu^{2\widetilde{m}-\widetilde{n}}|||p_{\mu,\nu}|||<1$. Тем самым $z_{\mu,\nu}=z_\mu$ и $p_{\mu,\nu}=p_\mu$. □

5. Построение асимптотики решения при $|||p|||>1$

1. Сначала рассмотрим случай $\beta>3/2$, т.е. $2\widetilde{n}-3\widetilde{m}>0$.

В этом случае в силу соотношений (4.5) справедливо неравенство $p_{\mu,\nu}\neq p_\mu$. Тем самым это ограничение на управления по существу, и надо найти еще и величины $\{\lambda_m\}$. При этом, если существует асимптотическое разложение решения исходной задачи с (3.4) и (3.9), то с учетом (3.18) получим

$$n_z=n_p=-n_\lambda=\widetilde{m}-\widetilde{n}<0. \tag{5.1}$$

В силу формулы (3.16) в качестве λ_0 надо взять положительное решение уравнения

$$\mathcal{F}(\lambda):=\left|\left|\left|\frac{\lambda\widetilde{g}}{2\widetilde{a}_0^{3/2}+\lambda}\right|\right|\right|=1. \tag{5.2}$$

Поскольку функция $\mathcal{F}$ строго возрастает при $\lambda \geqslant 0$, а $\mathcal{F}(0) = 0$ и $\mathcal{F}(+\infty) = |||\widetilde{g}||| > 1$, то решение уравнения (5.2) существует и единственно.

Отметим, что если $\widetilde{a}_0$ — константа, то справедливо соотношение

$$\lambda_0 = \frac{2\widetilde{a}_0^{3/2}}{|||\widetilde{g}||| - 1}.$$

Тем самым система граничных условий с учетом (5.1) принимает вид

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial\xi} Z_0(s,0) + \lambda_0 P_0(s,0) = \widetilde{g}(s), & \dfrac{\partial}{\partial\xi} P_0(s,0) = 0, \\ -\dfrac{\partial}{\partial\xi} Z_m(s,0) + \lambda_0 P_m(s,0) + \lambda_m P_0(s,0) = G_{m,1}(s), & \dfrac{\partial}{\partial\xi} P_m(s,0) = G_{m,2}(s), \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{5.3}$$

При этом после определения λ_0 функции Z_0 и P_0 находятся однозначно по формулам (3.12), (3.13). Для остальных λ_m условия получаются из асимптотического равенства, соответствующего равенству (2.10):

$$1 = \lambda_\mu^2 |||p_m u|||^2 \sim \Big(\mu^{n_\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \lambda_m\Big)^2 \Big\langle \mu^{n_p} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \widehat{P}_m(s,\xi), \mu^{n_p} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \widehat{P}_m(s,\xi)\Big\rangle$$

$$= \Big(\lambda_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m \lambda_m\Big)^2 \Big\langle P_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m \widehat{P}_m(s,\xi), P_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m \widehat{P}_m(s,\xi)\Big\rangle, \tag{5.4}$$

где $\widehat{P}_m = P_m + \widetilde{p_{m-n_p}}$.

Уравнение для λ_m при $m > 0$ из (5.4) с учетом выбора λ_0 имеет вид

$$\lambda_0^3 \langle P_0, P_m\rangle + \lambda_m = h_m, \tag{5.5}$$

где константы h_m однозначно определяются предыдущими членами разложения.

Функции Z_m и P_m удобно представить в виде

$$Z_m = Z_{m,1} + \lambda_m \widetilde{Z}, \quad P_m = P_{m,1} + \lambda_m \widetilde{P}, \tag{5.6}$$

где $\{Z_{m,1}, P_{m,1}\}$ — решение задачи

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_0 Z_{m,1} = F_m(s,\xi), & \widetilde{\mathcal{L}}_0 P_{m,1} - Z_{m,1} = G_m(s,\xi), \\ -\dfrac{\partial}{\partial\xi} Z_{m,1}(s,0) + \lambda_0 P_{m,1}(s,0) = G_{m,1}(s), & \dfrac{\partial}{\partial\xi} P_{m,1}(s,0) = G_{m,2}(s), \end{cases} \tag{5.7}$$

а $\{\widetilde{Z}, \widetilde{P}\}$ — решение задачи

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_0 \widetilde{Z} = 0, & \widetilde{\mathcal{L}}_0 \widetilde{P} - \widetilde{Z} = 0, \\ -\dfrac{\partial}{\partial\xi} \widetilde{Z}(s,0) + \lambda_0 \widetilde{P}(s,0) + P_0(s,0) = 0, & \dfrac{\partial}{\partial\xi} \widetilde{P}(s,0) = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Тогда уравнение (5.5) примет вид

$$\lambda_m \big(\lambda_0^3 \langle P_0, \widetilde{P}\rangle + 1\big) = h_m - \lambda_0^2 \langle P_0, P_{m,1}\rangle. \tag{5.9}$$

Из формул (3.12), (3.13), положив $\widetilde{g} = -P_0$, получим

$$\widetilde{P}(s,0) = -\frac{P_0(s,0)}{2\widetilde{a}_0^{3/2} + \lambda_0}.$$

Тем самым условие разрешимости уравнения (5.9) с учетом того, что $\lambda_0|||P_0(\cdot,0)|||=1$, имеет вид

$$\lambda_0^3\langle P_0,\widetilde{P}\rangle+1=-\lambda_0\Big\langle\frac{P_0(\cdot,0)}{2\widetilde{a}_0^{3/2}+\lambda_0},P_0(\cdot,0)\Big\rangle+\langle 1,\lambda_0^2P_0^2(\cdot,0)\rangle=\Big\langle\frac{2\widetilde{a}_0^{3/2}}{2\widetilde{a}_0^{3/2}+\lambda_0)},\lambda_0^2P_0^2\cdot,0)\Big\rangle\neq 0,$$

поскольку функции $\widetilde{a}_0$ и P_0 непрерывны, и при всех s справедливо неравенство $\widetilde{a}_0(s)>0$, а $P_0(\cdot,0)\not\equiv 0$. Итак, условие разрешимости уравнения (5.9) выполнено, и все величины Z_m, P_m и λ_m однозначно находятся. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1.3), $|||\widetilde{g}|||>1$ *и* $\beta>3/2$. *Тогда ряды* (4.4) *и ряд* Λ_μ *из* (3.9) *с условием* (5.1), *коэффициенты которых находятся из решения задач* (3.19), (5.3), (5.6)–(5.7), *суть равномерные как в смысле пространства* $H^1(\Omega)$, *так и в смысле пространства* $C(\overline{\Omega})$ *асимптотические разложения при* $\mu\to 0$ *функций* $z_\mu(x)$ *и* $p_\mu(x)$ *— решений задачи* (3.2), (3.3).

2. Наконец отметим, что при $\beta=3/2$, если выполняется неравенство

$$\Big|\Big|\Big|\frac{\nu\widetilde{g}}{2\widetilde{a}_0^{3/2}+\nu}\Big|\Big|\Big|<1,$$

то ограничения на управление не по существу, и асимптотическое разложение строится как в теореме 3.

Если же справедливо соотношение

$$\Big|\Big|\Big|\frac{\nu\widetilde{g}}{2\widetilde{a}_0^{3/2}+\nu}\Big|\Big|\Big|>1,$$

то ограничение на управление по существу, и асимптотическое разложение строится как в теореме 4.

Заключение

В данной работе решена проблема построения полного асимптотического разложения по малому параметру ε задачи граничного оптимального управления [1] с двумя малыми соподчиненными параметрами (второй малый параметр есть степень первого) (1.1), (1.2). Полученный результат является новым, поскольку в отличие от предыдущей работы здесь рассмотрен новый случай изменения параметра β, который ранее никто не изучал. Как оказалось, в данной задаче существенность ограничений на управление зависит от $|||g|||$, чего не было в ранее рассмотренных случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. **Данилин А.Р.** Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления с двумя малыми соподчиненными параметрами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 102–111. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-102-111 .
3. **Casas E.** A review on sparse solutions in optimal control of partial differential equations // SeMA J. 2017. Vol. 74. P. 319–344. doi: 10.1007/s40324-017-0121-5 .
4. **Lou H., Yong J.** Second-order necessary conditions for optimal control of semilinear elliptic equations with leading term containing controls // Math. Control Relat. Fields. 2018. Vol. 8, no. 1. P. 57–88. doi: 10.3934/mcrf.2018003 .
5. **Betz Livia M.** Second-order sufficient optimality conditions for optimal control of nonsmooth, semilinear parabolic equations // SIAM J. Control Optim. 2019. Vol. 57, no. 6. P. 4033–4062. doi: 10.1137/19M1239106 .

6. **Капустян В.Е.** Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. Сер. Математика, естествознание, технические науки. 1992. № 2. С. 70–74.
7. **Данилин А.Р.** Оптимальное граничное управление в области с малой полостью // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 87–100.
8. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
9. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
10. **Данилин А.Р.** Асимптотика решения бисингулярной задачи оптимального граничного управления в ограниченной области // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 11. С. 1808–1814.
11. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
12. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 5. С. 3–122.
13. **Ильин А.М.** Пограничный слой // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34. М.: ВНИТИ, 1988. С. 175–214. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР).

Поступила 31.01.2021
После доработки 10.02.2021
Принята к публикации 15.02.2021

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Lions J.-L. *Optimal control of systems governed by partial differential equations.* Berlin; N Y: Springer-Verlag, 1971, 396 p. ISBN: 9783540051152 . Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi.* Moscow: Mir Publ., 1972, 414 p.
2. Danilin A.R. Asymptotics of a solution to a problem of optimal boundary control with two small cosubordinate parameters. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 102–111 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-102-111 .
3. Casas E. A review on sparse solutions in optimal control of partial differential equations. *SeMA J.*, 2017, vol. 74, pp. 319–344. doi: 10.1007/s40324-017-0121-5 .
4. Lou H., Yong J. Second-order necessary conditions for optimal control of semilinear elliptic equations with leading term containing controls. *Math. Control Relat. Fields*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 57–88. doi: 10.3934/mcrf.2018003 .
5. Betz Livia M. Second-order sufficient optimality conditions for optimal control of nonsmooth, semilinear parabolic equations. *SIAM J. Control Optim.*, 2019, vol. 57, no. 6, pp. 4033–4062. doi: 10.1137/19M1239106 .
6. Kapustyan V.E. Asymptotics of bounded controls in optimal elliptic problems. *Dokl. Akad. Nauk Ukrainy*, 1992, no. 2, pp. 70–74 (in Russian).
7. Danilin A.R. Optimal boundary control in a small concave domain. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 87–100 (in Russian).
8. Sobolev S.L. *Some applications of functional analysis in mathematical physics.* Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991, 286 p. ISBN: 0-8218-4549-7 . Original Russian text (1st ed.) published in Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike.* Leningrad: Leningr. Gos. Univ. Publ., 1950, 255 p.
9. Lions J.-L., Magenes E. *Non-homogeneous boundary value problems and their applications.* Berlin: Springer-Verlag, 1972, 357 p. ISBN: 3540053638 . Translated to Russian under the title *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya.* Moscow: Mir Publ., 1971, 371 p.

10. Danilin A.R. Asymptotics of the solution of a bisingular optimal boundary control problem in a bounded domain. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 11, pp. 1737–1747. doi: 10.1134/S0965542518110040 .
11. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Providence: American Mathematical Society, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5 . Original Russian text published in Il'in A.M. *Soglasovanie asimtoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1989, 336 p.
12. Vishik M.I., Lyusternik L.A. A regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5, pp. 3–122 (in Russian).
13. Il'in A.M. A boundary layer. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.*, 1988, vol. 34, pp. 175–213 (in Russian).

Received January 31, 2021
Revised February 10, 2021
Accepted February 15, 2021

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. R. Danilin. Asymptotics of a solution to a problem of optimal boundary control with two small cosubordinate parameters, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 108–119 .