ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 512.542

СПУТНИКИ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ $\omega\sigma$-ВЕЕРНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

О. В. Камозина

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi) = (G\colon O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(G))$ называется $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-спутником f и $\omega\sigma$-направлением φ. Пусть φ_0 и φ_1 — направления $\omega\sigma$-полного и $\omega\sigma$-локального классов Фиттинга соответственно. В теореме 1 описан минимальный $\omega\sigma$-спутник $\omega\sigma$-веерного класса Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, где $\varphi_0 \le \varphi$. В теореме 2 показано, что фиттингово произведение двух $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга является $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга для $\omega\sigma$-направлений φ таких, что $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$. В качестве следствий из теорем получены результаты для $\omega\sigma$-полных и $\omega\sigma$-локальных классов Фиттинга. В теореме 3 описан максимальный внутренний $\omega\sigma$-спутник $\omega\sigma$-полного класса Фиттинга. В работе дано определение $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутника. $\omega\sigma$-спутник f называется $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутником, если $f(\omega\cap\sigma_i)$ — класс Локетта для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma$. В теореме 4 описан максимальный внутренний $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутник $\omega\sigma$-локального класса Фиттинга. В заключении поставлены вопросы об исследовании решеток, о дальнейшем изучении произведений и критических $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга.

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, $\omega\sigma$-веерный, $\omega\sigma$-полный, $\omega\sigma$-локальный, минимальный $\omega\sigma$-спутник, максимальный внутренний $\omega\sigma$-спутник, фиттингово произведение.

O. V. Kamozina. Satellites and products of $\omega\sigma$-fibered Fitting classes.

A Fitting class $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi) = (G : O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ and $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i)$ for all $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(G))$ is called an $\omega\sigma$-fibered Fitting class with $\omega\sigma$-satellite f and $\omega\sigma$-direction φ. By φ_0 and φ_1 we denote the directions of an $\omega\sigma$-complete and an $\omega\sigma$-local Fitting class, respectively. Theorem 1 describes a minimal $\omega\sigma$-satellite of an $\omega\sigma$-fibered Fitting class with $\omega\sigma$-direction φ, where $\varphi_0 \le \varphi$. Theorem 2 states that the Fitting product of two $\omega\sigma$-fibered Fitting classes is an $\omega\sigma$-fibered Fitting class for $\omega\sigma$-directions φ such that $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$. Results for $\omega\sigma$-complete and $\omega\sigma$-local Fitting classes are obtained as corollaries of the theorems. Theorem 3 describes a maximal internal $\omega\sigma$-satellite of an $\omega\sigma$-complete Fitting class. An $\omega\sigma\mathcal{L}$-satellite is defined as an $\omega\sigma$-satellite f such that $f(\omega\cap\sigma_i)$ is the Lockett class for all $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma$. Theorem 4 describes the maximal internal $\omega\sigma\mathcal{L}$-satellite of an $\omega\sigma$-local Fitting class. Questions of the study of lattices and further study of products and critical $\omega\sigma$-fibered Fitting classes are posed in the conclusion.

Keywords: finite group, Fitting class, $\omega\sigma$-fibered, $\omega\sigma$-complete, $\omega\sigma$-local, minimal $\omega\sigma$-satellite, maximal internal $\omega\sigma$-satellite, Fitting product.

MSC: 20D10

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-88-97

1. Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Изучение формаций и классов Фиттинга часто сводится к рассуждениям, связанным с их минимальными, максимальными спутниками, а также произведениями. Например, используя строение спутников и заключения о произведении, Н. Н. Воробьёв и А. Н. Скиба в работе [1] установили алгебраичность и дистрибутивность решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга. В. Г. Сафоновым, И. Н. Сафоновой в работе [2] исследовали минимальные тотально локальные не π-нильпотентные классы Фиттинга. Задача изучения критических неоднопорожденных тотально канонических классов Фиттинга была решена В. Е. Егоровой в работе [3].

Автор настоящей статьи в работе [4], используя идею разбиения А. Н. Скибы в [5], ввел *$\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга* и поставил вопросы изучения их спутников и произведений. Цель данной работы — описать строение минимального и максимального внутреннего спутников $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга и установить, является ли фиттингово произведение двух $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ является формацией и классом Фиттинга одновременно. Группа G называется *комонолитической*, если в G имеется такая нормальная подгруппа M (комонолит группы G), что G/M – простая группа и $N \subseteq M$ для любой собственной нормальной подгруппы N группы G [6].

Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы групп, то $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G\colon G$ имеет нормальную подгруппу $N \in \mathfrak{X}$ с $G/N \in \mathfrak{Y})$. Если $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{Y}$ — класс групп, то $\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y} = (G\colon G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y})$ называется *фиттинговым произведением* $\mathfrak{X}$ с $\mathfrak{Y}$. Пусть $\mathfrak{F}^*$ обозначает наименьший класс Фиттинга, содержащий непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Локетта*, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ [7].

Через $\mathbb{P}$ обозначим множество всех простых чисел, $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$; через $\pi(G)$ — множество всех различных простых делителей порядка группы G; через $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных групп. Пусть $\mathfrak{G}_\omega$ и $\mathfrak{G}_{\omega'}$ — класс всех ω- и ω'-групп соответственно; ω-группа — группа G, где $\pi(G) \subseteq \omega$; ωd-группа — группа G, порядок которой делится хотя бы на одно число из ω; $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\sigma_i \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$ (см. [5]); $\omega\sigma = \{\omega \cap \sigma_i \mid \omega \cap \sigma_i \neq \varnothing\}$, $\omega\sigma(G) = \{\omega \cap \sigma_i \mid \omega \cap \sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\}$, $\omega\sigma(\mathfrak{F}) = \{\omega\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{F}\}$ для любого класса групп $\mathfrak{F}$.

Функция $f\colon \omega\sigma \cup \{\omega'\} \to \{$классы Фиттинга групп$\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$, называется *$\omega\sigma R$-функцией*; функция $\varphi\colon \omega\sigma \cup \{\omega'\} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ называется *$\omega\sigma FR$-функцией*; $\omega\sigma FR$-функции φ_0 и φ_1 определяются следующим образом: $\varphi_0(\omega') = \mathfrak{G}_\omega$, $\varphi_0(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}_{(\omega \cap \sigma_i)'}$ для любого $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$, $\varphi_1(\omega') = \mathfrak{G}_\omega$, $\varphi_1(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}_{\omega \cap \sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega \cap \sigma_i)'}$ для любого $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi) = (G\colon O^\omega(G) \in f(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G))$, где f — $\omega\sigma R$-функция, φ — $\omega\sigma FR$-функция, называется *$\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга* с $\omega\sigma$-спутником f и $\omega\sigma$-направлением φ. Назовем $\omega\sigma$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$ *внутренним*, если $f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$ и $f(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$ называется *$\omega\sigma$-полным классом Фиттинга* и обозначается через $\mathfrak{F} = \omega\sigma AR(f)$, если $\varphi = \varphi_0$. Назовем *$\omega\sigma$-локальным классом Фиттинга* и обозначим через $\mathfrak{F} = \omega\sigma LR(f)$, если $\varphi = \varphi_1$.

Пусть μ_1 и μ_2 — произвольные $\omega\sigma R$-функции ($\omega\sigma FR$-функции). Полагаем, что $\mu_1 \leq \mu_2$, если $\mu_1(\omega') \subseteq \mu_2(\omega')$ и $\mu_1(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mu_2(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$ (см. [4]).

2. Основная часть

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — множество $\omega\sigma R$-функций. Обозначим через $\cap_{j \in J} f_j$ такую $\omega\sigma R$-функцию f, что $f(\omega') = \cap_{j \in J} f_j(\omega')$ и $f(\omega \cap \sigma_i) = \cap_{j \in J} f_j(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$.

Лемма 1. *Пусть φ — произвольная $\omega\sigma FR$-функция, $\mathfrak{F} = \cap_{j \in J}\mathfrak{F}_j$, где $\mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(f_j, \varphi)$, $j \in J$. Тогда $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где $f = \cap_{j \in J} f_j$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \omega\sigma R(f, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

1) Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} = \cap_{j \in J}\mathfrak{F}_j$, то $G \in \mathfrak{F}_j$ для любого $j \in J$. Из $\mathfrak{F}_j = \omega\sigma R(f_j, \varphi)$ получаем, что $O^\omega(G) \in f_j(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f_j(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$ и для любого $j \in J$. Тогда $O^\omega(G) \in \cap_{j \in J} f_j(\omega') = f(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in \cap_{j \in J} f_j(\omega \cap \sigma_i) = f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

2) Пусть $T \in \mathfrak{H}$. Тогда $O^\omega(T) \in f(\omega') = \cap_{j \in J} f_j(\omega')$ и $T^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) = \cap_{j \in J} f_j(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T)$. Отсюда следует, что $O^\omega(T) \in f_j(\omega')$ и $T^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f_j(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T)$ и для любого $j \in J$. Поэтому $T \in \mathfrak{F}_j$, $j \in J$, а значит, $T \in \cap_{j \in J}\mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из **1)** и **2)** следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Лемма доказана.

Определение 1. Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — множество всех $\omega\sigma$-спутников $\omega\sigma$-веерного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ с $\omega\sigma$-направлением φ. $\omega\sigma$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *минимальным $\omega\sigma$-спутником*, если f является минимальным элементом множества $\{f_j \mid j \in J\}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Напомним, что $fit(\mathfrak{X})$ обозначает пересечение всех классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$ ([6]). Аналогично обозначим через $\omega\sigma R(\mathfrak{X}, \varphi)$ пересечение всех $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, содержащих $\mathfrak{X}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(\mathfrak{X}, \varphi)$ с $\omega\sigma$-направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным $\omega\sigma$-спутником f таким, что*

$$f(\omega') = fit(O^{\omega}(G) \colon G \in \mathfrak{X}),$$
$$f(\omega \cap \sigma_i) = fit(G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \colon G \in \mathfrak{X}), \quad \text{если } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{X}),$$
$$f(\omega \cap \sigma_i) = \varnothing, \qquad \text{если } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma \setminus \omega\sigma(\mathfrak{X}).$$

Доказательство. Согласно примеру 2) из [4] $\mathfrak{G}$ является $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$. Кроме того, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{G}$. Значит, класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует и множество L всех его $\omega\sigma$-спутников непусто. Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из L. Тогда по лемме 1 $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f_1, \varphi)$. Так как $f_1 \leq f_i$ для любого $f_i \in L$, то f_1 — единственный минимальный $\omega\sigma$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Пусть f — $\omega\sigma R$-функция, описанная в заключении теоремы. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $T \in \mathfrak{X}$. Тогда $O^{\omega}(T) \in f(\omega')$ и из $\omega\sigma(T) \subseteq \omega\sigma(\mathfrak{X})$ выводим, что $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T)$. Значит, $T \in \omega\sigma R(f, \varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \omega\sigma R(f, \varphi)$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \omega\sigma R(f, \varphi)$.

Покажем, что $\omega\sigma R(f, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $G \in \mathfrak{X}$, то из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ получаем, что $G \in \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f_1, \varphi)$, а значит, $O^{\omega}(G) \in f_1(\omega')$. Так как $f_1(\omega')$ — класс Фиттинга, то $f(\omega') = fit(O^{\omega}(G) \colon G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\omega')$.

Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая группа $H \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, что $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(H)$. Из $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f_1, \varphi)$ следует, что $H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f_1(\omega \cap \sigma_i)$. Поэтому $f_1(\omega \cap \sigma_i) \neq \varnothing$. Если $G \in \mathfrak{X}$ и $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$, то из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f_1, \varphi)$ имеем, что $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f_1(\omega \cap \sigma_i)$. Пусть теперь $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{X}) \setminus \omega\sigma(G)$. Тогда G — $(\omega \cap \sigma_i)'$-группа. Так как по условию $\varphi_0 \leq \varphi$, то $G \in \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'} = \varphi_0(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \varphi(\omega \cap \sigma_i)$, а значит, $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} = 1 \in f_1(\omega \cap \sigma_i)$. Поскольку $f_1(\omega \cap \sigma_i)$ — класс Фиттинга, то $f(\omega \cap \sigma_i) = fit(G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \colon G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\omega \cap \sigma_i)$. Если $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma \setminus \omega\sigma(\mathfrak{X})$, то $f(\omega \cap \sigma_i) = \varnothing \subseteq f_1(\omega \cap \sigma_i)$. Таким образом, $f \leq f_1$. Пусть $S \in \omega\sigma R(f, \varphi)$. Тогда $O^{\omega}(S) \in f(\omega') \subseteq f_1(\omega')$ и $S^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) \subseteq f_1(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(S)$. Значит, $S \in \omega\sigma R(f_1, \varphi) = \mathfrak{F}$ и $\omega\sigma R(f, \varphi) \subseteq \omega\sigma R(f_1, \varphi) = \mathfrak{F}$.

Следовательно, $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$ и $f \in L$. Поскольку f_1 — единственный минимальный $\omega\sigma$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то из $f \leq f_1$ получаем, что $f = f_1$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть f_i — минимальный $\omega\sigma$-спутник $\omega\sigma$-веерного класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ с $\omega\sigma$-направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.*

Доказательство. Пусть $f_1 \leq f_2$. Как и в доказательстве теоремы 1, можно показать, что $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(f_1, \varphi) \subseteq \omega\sigma R(f_2, \varphi) = \mathfrak{F}_2$.

Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Покажем, что $f_1 \leq f_2$. Так как $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(\mathfrak{F}_1, \varphi)$ и $\mathfrak{F}_2 = \omega\sigma R(\mathfrak{F}_2, \varphi)$, то из теоремы 1 вытекает, что

$$\begin{aligned}
f_1(\omega') &= fit(O^{\omega}(G) \colon G \in \mathfrak{F}_1) \subseteq fit(O^{\omega}(G) \colon G \in \mathfrak{F}_2) = f_2(\omega'),\\
f_1(\omega \cap \sigma_i) &= fit(G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \colon G \in \mathfrak{F}_1) \subseteq fit(G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \colon G \in \mathfrak{F}_2) = f_2(\omega \cap \sigma_i),\\
&\quad \text{если } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{F}_1) \subseteq \omega\sigma(\mathfrak{F}_2),\\
f_1(\omega \cap \sigma_i) &= \varnothing \subseteq f_2(\omega \cap \sigma_i),\\
&\quad \text{если } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma \setminus \omega\sigma(\mathfrak{F}_1).
\end{aligned}$$

Тогда по определению $f_1 \le f_2$.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда $\omega\sigma$-полный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma AR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным $\omega\sigma$-спутником f таким, что*

$$f(\omega') = fit(O^{\omega}(G)\colon G \in \mathfrak{X}),$$

$$\begin{aligned} f(\omega \cap \sigma_i) &= fit(O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(G)\colon G \in \mathfrak{X}), && \text{\textit{если}}\ \ \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{X}),\\ f(\omega \cap \sigma_i) &= \varnothing, && \text{\textit{если}}\ \ \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma \setminus \omega\sigma(\mathfrak{X}). \end{aligned}$$

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда $\omega\sigma$-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma LR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным $\omega\sigma$-спутником f таким, что*

$$f(\omega') = fit(O^{\omega}(G)\colon G \in \mathfrak{X}),$$

$$\begin{aligned} f(\omega \cap \sigma_i) &= fit(O^{\omega\cap\sigma_i,(\omega\cap\sigma_i)'}(G)\colon G \in \mathfrak{X}), && \text{\textit{если}}\ \ \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{X}),\\ f(\omega \cap \sigma_i) &= \varnothing, && \text{\textit{если}}\ \ \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma \setminus \omega\sigma(\mathfrak{X}). \end{aligned}$$

О п р е д е л е н и е 2. Назовем $\omega\sigma$-направление φ $\omega\sigma$-веерного класса Фиттинга *главным*, если $\varphi(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'} = \varphi(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга с внутренними $\omega\sigma$-спутниками m и h соответственно и с главным $\omega\sigma$-направлением φ, где $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ является $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-направлением φ и с внутренним $\omega\sigma$-спутником f таким, что*

$$f(\omega') = \mathfrak{F},$$

$$\begin{aligned} f(\omega \cap \sigma_i) &= \mathfrak{M} \diamond h(\omega \cap \sigma_i), && \text{\textit{если}}\ \ \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{H}),\\ f(\omega \cap \sigma_i) &= m(\omega \cap \sigma_i), && \text{\textit{если}}\ \ \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma \setminus \omega\sigma(\mathfrak{H}). \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f — $\omega\sigma R$-функция, описанная в заключении теоремы.

1) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Допустим противное, и пусть T — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}_1}$.

Так как $T \in \mathfrak{F}$ и $O^{\omega}(T) \lhd T$, то $O^{\omega}(T) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$.

а) Пусть $T = T_{\mathfrak{M}}$. Тогда $T \in \mathfrak{M}$, и с учетом $\mathfrak{M} = \omega\sigma R(m, \varphi)$ имеем, что $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in m(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T)$.

Если $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{H})$, то найдется такая группа $H \in \mathfrak{H}$, что $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(H)$. Из $\mathfrak{H} = \omega\sigma R(h, \varphi)$ следует, что $H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in h(\omega\cap\sigma_i)$. Поэтому $h(\omega\cap\sigma_i) \ne \varnothing$. Тогда, учитывая, что m — внутренний $\omega\sigma$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{M}$, получем $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in m(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}\diamond h(\omega\cap\sigma_i) = f(\omega\cap\sigma_i)$.

Если $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma \setminus \omega\sigma(\mathfrak{H})$, то $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in m(\omega \cap \sigma_i) = f(\omega \cap \sigma_i)$.

Таким образом, $T \in \mathfrak{F}_1$. Получили противоречие.

б) Пусть $T \ne T_{\mathfrak{M}}$. Тогда $T_{\mathfrak{M}} \subseteq M$. Из $T \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ следует, что $T/T_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$.

Допустим, что T/M является ω'-группой. Тогда $L = O^{\omega'}(T) \subseteq M \in \mathfrak{F}_1$. Так как $T/L \in \mathfrak{G}_{\omega'} \subseteq \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$ и $T/L \cong T/L^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}/L/L^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}$, то $T/L^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \varphi(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(L) = \omega\sigma(T)$. Поскольку φ является главным $\omega\sigma$-направлением, то $\varphi(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'} = \varphi(\omega \cap \sigma_i)$, а следовательно, $T/L^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \varphi(\omega \cap \sigma_i)$. Отсюда $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq L^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}$. Из $L \in \mathfrak{F}_1$ получаем, что $L^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$. Тогда $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ для любого $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T)$, а значит, $T \in \mathfrak{F}_1$. Получили противоречие. Следовательно, T/M является ωd-группой.

Так как $T/M \cong T/T_{\mathfrak{M}}/M/T_{\mathfrak{M}}$, то $\omega\sigma(T/M) \subseteq \omega\sigma(T/T_{\mathfrak{M}}) \subseteq \omega\sigma(\mathfrak{H})$. Тогда для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T/M)$, учитывая, что $\varphi(\omega \cap \sigma_i)$ — формация и $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга, по п. 3) леммы 1 из [8] имеем $(T/T_{\mathfrak{M}})^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \cong T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}T_{\mathfrak{M}}/T_{\mathfrak{M}} \cong T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}/T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \cap T_{\mathfrak{M}} = T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}/(T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)})_{\mathfrak{M}}$. Из $T/T_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H} = \omega\sigma R(h,\varphi)$ выводим, что $(T/T_{\mathfrak{M}})^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in h(\omega\cap\sigma_i)$, а значит,

$$T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}/(T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)})_{\mathfrak{M}} \in h(\omega\cap\sigma_i).$$

Следовательно, $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \mathfrak{M} \diamond h(\omega\cap\sigma_i) = f(\omega\cap\sigma_i)$ для любого $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(T/M)$.

Если $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(T)\setminus\omega\sigma(T/M)$, то T/M является $(\omega\cap\sigma_i)'$-группой. Теперь, как и выше, можно показать, что $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq M^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}$. Из $M \in \mathfrak{F}_1$ имеем, что $M^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i)$. Тогда $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i)$.

Таким образом, $T \in \mathfrak{F}_1$. Получили противоречие. Отсюда, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

2) Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное, и пусть T — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$.

Из $T \in \mathfrak{F}_1$ следует, что $O^{\omega}(T) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$. Допустим, что T/M является ω'-группой. Поэтому $T = O^{\omega}(T) \in \mathfrak{F}$; противоречие. Следовательно, T/M является ωd-группой.

Пусть $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(T/M) \subseteq \omega\sigma(T)$. Так как $T \in \mathfrak{F}_1$, то $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i)$. Поскольку m и h — внутренние $\omega\sigma$-спутники классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно, то

$$m(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$$

и $h(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$, а значит, $\mathfrak{M} \diamond h(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Отсюда $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$, поэтому $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq M$.

Так как $\varphi \leq \varphi_1$, то $\varphi(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \varphi_1(\omega\cap\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$. По п. 1) леммы 1 из [8] имеем $T^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq M$. По п. 7) леммы 1 из [8] получаем

$$T^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)} = T^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}} = (T^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}})^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}}.$$

Если $T^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}} \neq T$, то $T^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}} \subseteq M$ и $T/M \cong T/T^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}}/M/T^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}} \in \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$; противоречие. Следовательно, $T^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}} = T$. Значит, $T^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)} = T^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}} = O^{\omega\cap\sigma_i}(T) \subseteq M$ и

$$T/M \cong T/O^{\omega\cap\sigma_i}(T)/M/O^{\omega\cap\sigma_i}(T) \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}.$$

Пусть $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma\setminus\omega\sigma(\mathfrak{H})$. Тогда

$$O^{\omega\cap\sigma_i}(T) = T^{\varphi_1(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i) = m(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \mathfrak{M}.$$

Так как $T/O^{\omega\cap\sigma_i}(T) \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega}$, то по п. 5) леммы 1 из [8] $O^{\omega}(T) = O^{\omega}(O^{\omega\cap\sigma_i}(T)) \in m(\omega')$. Пусть $\omega\cap\sigma_j \in \omega\sigma(T)\setminus\{\omega\cap\sigma_i\}$. Вследствие $O^{\omega\cap\sigma_i}(T) \subseteq T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}$ имеем

$$T/T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \cong T/O^{\omega\cap\sigma_i}(T)/T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}/O^{\omega\cap\sigma_i}(T) \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_j)'}$$

и $\omega\cap\sigma_j \in \omega\sigma(T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)})$. Поскольку φ является главным $\omega\sigma$-направлением, то $\varphi(\omega\cap\sigma_j)\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_j)'} = \varphi(\omega\cap\sigma_j)$, и по п. 9) леммы 1 из [8] получаем $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_j)} = (T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)})^{\varphi(\omega\cap\sigma_j)}$. Из $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \mathfrak{M} = \omega\sigma R(m,\varphi)$ следует, что $(T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)})^{\varphi(\omega\cap\sigma_j)} \in m(\omega\cap\sigma_j)$. Отсюда выводим, что $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_j)} \in m(\omega\cap\sigma_j)$, и по определению $T \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$; противоречие.

Таким образом, $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{H})$. Поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ и $T \notin \mathfrak{F}$, то $T \notin \mathfrak{M}$. Поэтому $T \neq T_{\mathfrak{M}}$ и $T_{\mathfrak{M}} \subseteq M$. По п. 3) леммы 1 из [8] $M_{\mathfrak{M}} = M \cap T_{\mathfrak{M}}$, значит, $M_{\mathfrak{M}} = T_{\mathfrak{M}}$. Из $M \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ следует, что $M/M_{\mathfrak{M}} = M/T_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$. Так как $T/M \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$ и $T/M \cong T/T_{\mathfrak{M}}/M/T_{\mathfrak{M}}$, то $\omega\sigma(T/T_{\mathfrak{M}}) \subseteq \omega\sigma(\mathfrak{H})$. Для всех $\omega\cap\sigma_k \in \omega\sigma(T/T_{\mathfrak{M}}) \subseteq \omega\sigma(T)$ из $T \in \mathfrak{F}_1$ получаем, что $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_k)} \in f(\omega\cap\sigma_k) = \mathfrak{M} \diamond h(\omega\cap\sigma_k)$. По п. 3) леммы 1 из [8], как и выше, имеем

$$(T/T_{\mathfrak{M}})^{\varphi(\omega\cap\sigma_k)} = T^{\varphi(\omega\cap\sigma_k)}/(T^{\varphi(\omega\cap\sigma_k)})_{\mathfrak{M}} \in h(\omega\cap\sigma_k).$$

В силу п. 2) леммы 3 из [4] можем считать, что $h(\omega') = \mathfrak{H}$. Так как $O^{\omega}(T) \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$, то по п. 3) леммы 1 из [8]

$$O^{\omega}(T/T_{\mathfrak{M}}) = O^{\omega}(T)T_{\mathfrak{M}}/T_{\mathfrak{M}} \cong O^{\omega}(T)/O^{\omega}(T) \cap T_{\mathfrak{M}} = O^{\omega}(T)/(O^{\omega}(T))_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H} = h(\omega').$$

Следовательно, по определению $T/T_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$, а значит, $T \in \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из **1)** и **2)** следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — $\omega\sigma$-полные классы Фиттинга с внутренними $\omega\sigma$-спутниками m и h соответственно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ является $\omega\sigma$-полным классом Фиттинга с внутренним $\omega\sigma$-спутником f таким, что*

$$f(\omega') = \mathfrak{F},$$

$$\begin{aligned} f(\omega \cap \sigma_i) &= \mathfrak{M} \diamond h(\omega \cap \sigma_i), \quad \textit{если} \;\; \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{H}), \\ f(\omega \cap \sigma_i) &= m(\omega \cap \sigma_i), \qquad \textit{если} \;\; \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma \setminus \omega\sigma(\mathfrak{H}). \end{aligned}$$

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — $\omega\sigma$-локальные классы Фиттинга с внутренними $\omega\sigma$-спутниками m и h соответственно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ является $\omega\sigma$-локальным классом Фиттинга с внутренним $\omega\sigma$-спутником f таким, что*

$$f(\omega') = \mathfrak{F},$$

$$\begin{aligned} f(\omega \cap \sigma_i) &= \mathfrak{M} \diamond h(\omega \cap \sigma_i), \quad \textit{если} \;\; \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(\mathfrak{H}), \\ f(\omega \cap \sigma_i) &= m(\omega \cap \sigma_i), \qquad \textit{если} \;\; \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma \setminus \omega\sigma(\mathfrak{H}). \end{aligned}$$

Определение 3. Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — множество всех внутренних $\omega\sigma$-спутников $\omega\sigma$-веерного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ с $\omega\sigma$-направлением φ. Назовем $\omega\sigma$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ внутренним *максимальным $\omega\sigma$-спутником*, если f является максимальным элементом множества $\{f_j \mid j \in J\}$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\omega\sigma$-полный класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним $\omega\sigma$-спутником h таким, что*

$$h(\omega') = \mathfrak{F},\; h(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{F} \; \textit{для всех} \; \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \omega\sigma AR(h)$, где h — $\omega\sigma R$-функция, описанная в заключении теоремы, и m — минимальный $\omega\sigma$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. По следствию 2 получаем, что $m(\omega') \subseteq \mathfrak{F} = h(\omega')$ и $m(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mathfrak{F} = h(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$, а значит, $m \leq h$. Поэтому, как и в доказательстве теоремы 1, можно показать, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и T — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \omega\sigma AR(h)$, то $O^{\omega}(T) \in h(\omega') = \mathfrak{F}$, поэтому $O^{\omega}(T) \subseteq M$. Отсюда $T/M \cong T/O^{\omega}(T)/M/O^{\omega}(T) \in \mathfrak{G}_{\omega}$.

Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T/M) \subseteq \omega\sigma(T)$. Поскольку $T \in \mathfrak{H} = \omega\sigma AR(h)$, имеем $O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(T) \in h(\omega\cap\sigma_i) = \mathfrak{F}$, а значит, $O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(T) \subseteq M$. Тогда $T/M \cong T/O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(T)/M/O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(T) \in \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$; противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть f_1 — произвольный внутренний $\omega\sigma$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $f_1(\omega') \subseteq \mathfrak{F} = h(\omega')$ и $f_1(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mathfrak{F} = h(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. Следовательно, $f_1 \leq h$. В силу произвольности выбора внутреннего $\omega\sigma$-спутника f_1 получаем, что h — единственный максимальный внутренний $\omega\sigma$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Теорема доказана.

Следующее утверждение очевидно.

Следствие 6. *Пусть h_i — максимальный внутренний $\omega\sigma$-спутник $\omega\sigma$-полного класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $h_1 \leq h_2$.*

Лемма 2. *Пусть f — внутренний $\omega\sigma$-спутник $\omega\sigma$-веерного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ с главным $\omega\sigma$-направлением φ, где $\varphi_1 \le \varphi$. Тогда*

1) *$f(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$;*

2) *если $\varphi = \varphi_1$, то $\mathfrak{F}$ обладает $\omega\sigma$-спутником h таким, что*

$$h(\omega') = \mathfrak{F},$$

$$h(\omega \cap \sigma_i) = f(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \quad \text{для всех} \;\; \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma.$$

Доказательство. **1)** Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. Допустим, что $f(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и T — группа наименьшего порядка из $f(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. Поскольку f — внутренний $\omega\sigma$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то $f(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$, и по п. 2) леммы 1 из [8] получаем, что $T_{f(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq T_{\mathfrak{F}} = M \in \mathfrak{F}$. Из $T \in f(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$ следует, что существует $N \lhd T$, $N \in f(\omega \cap \sigma_i)$, такая, что $T/N \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$. Отсюда $N \subseteq T_{f(\omega\cap\sigma_i)}$ и

$$T/T_{f(\omega\cap\sigma_i)} \cong T/N/T_{f(\omega\cap\sigma_i)}/N \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}.$$

Следовательно, $T/M \cong T/T_{f(\omega\cap\sigma_i)}/M/T_{f(\omega\cap\sigma_i)} \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega}$. Поэтому из $M \in \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$ и п. 5) леммы 1 из [8] выводим $O^{\omega}(T) = O^{\omega}(M) \in f(\omega')$.

Так как $\varphi_1 \le \varphi$, то $\varphi_1(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'} \subseteq \varphi(\omega \cap \sigma_i)$. Тогда по п. 1) леммы 1 из [8] получаем, что $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq T^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}}$. Из $\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$ по п. 1) леммы 1 из [8] имеем $T^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}} \subseteq O^{\omega\cap\sigma_i}(T)$. Поскольку $T/T_{f(\omega\cap\sigma_i)} \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$, то $O^{\omega\cap\sigma_i}(T) \subseteq T_{f(\omega\cap\sigma_i)}$. Поэтому

$$T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq O^{\omega\cap\sigma_i}(T) \subseteq T_{f(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i).$$

Пусть $\omega \cap \sigma_j \in \omega\sigma(T) \setminus \{\omega \cap \sigma_i\}$. Тогда $\omega \cap \sigma_j \in \omega\sigma(O^{\omega\cap\sigma_i}(T))$. Так как

$$T/O^{\omega\cap\sigma_i}(T) \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_j)'}$$

и φ является главным $\omega\sigma$-направлением, то $\varphi(\omega \cap \sigma_j)\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_j)'} = \varphi(\omega \cap \sigma_j)$, и по п. 9 леммы 1 из [8] получаем, что $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_j)} = (O^{\omega\cap\sigma_i}(T))^{\varphi(\omega\cap\sigma_j)}$. Из $O^{\omega\cap\sigma_i}(T) \in f(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$ выводим, что $(O^{\omega\cap\sigma_i}(T))^{\varphi(\omega\cap\sigma_j)} \in f(\omega \cap \sigma_j)$. Значит, $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_j)} \in f(\omega \cap \sigma_j)$, и по определению $T \in \mathfrak{F}$; противоречие.

Таким образом, $f(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$.

2) Пусть $\mathfrak{H} = \omega\sigma R(h,\varphi)$, где $\varphi = \varphi_1$ и h — $\omega\sigma R$-функция, описанная в заключении п. 2) леммы. Поскольку $f(\omega\cap\sigma_i) \subseteq f(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} = h(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma$ и f — внутренний $\omega\sigma$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, а значит, $f(\omega') \subseteq \mathfrak{F} = h(\omega')$, то $f \le h$. Как и в доказательстве теоремы 1, можно показать, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и T — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. В силу п. 2) леммы 3 из [4] можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \omega\sigma R(h,\varphi)$, то $O^{\omega}(T) \in h(\omega') = \mathfrak{F} = f(\omega')$. Из $T \notin \mathfrak{F}$ выводим, что $O^{\omega}(T) \subseteq M$ и $T/M \cong T/O^{\omega}(T)/M/O^{\omega}(T) \in \mathfrak{G}_{\omega}$.

Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T/M) \subseteq \omega\sigma(T)$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \omega\sigma R(h,\varphi)$, то $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in h(\omega \cap \sigma_i) = f(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$. Как и в доказательстве теоремы 2, можно показать, что

$$T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} = T^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}} = (T^{\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}})^{\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}} = O^{\omega\cap\sigma_i}(T).$$

Отсюда $O^{\omega\cap\sigma_i}(T) \in f(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$. Поскольку $T/O^{\omega\cap\sigma_i}(T) \in \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$, то, учитывая п. 1) леммы, имеем $T \in (f(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i})\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} = f(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$; противоречие.

Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Лемма доказана.

Определение 4. $\omega\sigma$-спутник f назовем *$\omega\sigma\mathcal{L}$-спутником*, если $f(\omega \cap \sigma_i)$ — класс Локетта для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$.

Лемма 3. *Пусть f_1 и f_2 — внутренние $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутники $\omega\sigma$-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда*

1) $f_1(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$, $f_2(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$ *— классы Локетта для всех* $\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma$;

2) $f_1(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}=f_2(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$ *для всех* $\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma$.

Доказательство. 1) Поскольку $\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$ — формация, то в силу утверждения 1.25 из [7, гл. 10] $\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$ является классом Локетта, и в силу замечаний 1.11 из [7, гл. 9]

$$f_1(\omega\cap\sigma_i)\diamond\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}=f_1(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}.$$

Согласно п. b) леммы 1.26 из [7, гл. 10] фиттингово произведение двух классов Локетта снова класс Локетта. Тогда $f_1(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$ — класс Локетта. Аналогично $f_2(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$ является классом Локетта.

2) Так как $\mathfrak{F}=\omega\sigma LR(f_1)$ и $\mathfrak{F}=\omega\sigma LR(f_2)$, то по лемме 2 $\mathfrak{F}=\omega\sigma LR(h_1)$ и $\mathfrak{F}=\omega\sigma LR(h_2)$, где $h_1(\omega')=\mathfrak{F}$, $h_1(\omega\cap\sigma_i)=f_1(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\subseteq\mathfrak{F}$ для всех $\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma$ и $h_2(\omega')=\mathfrak{F}$, $h_2(\omega\cap\sigma_i)=f_2(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\subseteq\mathfrak{F}$ для всех $\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma$.

Допустим, что существует $\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma$ такое, что $h_1(\omega\cap\sigma_i)\nsubseteq h_2(\omega\cap\sigma_i)$ и H — группа из $h_1(\omega\cap\sigma_i)\setminus h_2(\omega\cap\sigma_i)$. Рассмотрим группу $T=H\wr Z_{\omega\cap\sigma_i}=[K]Z_{\omega\cap\sigma_i}$, где K — база регулярного сплетения T, $Z_{\omega\cap\sigma_i}\in\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$.

Поскольку $H\notin h_2(\omega\cap\sigma_i)$ и по п. 1) леммы $h_2(\omega\cap\sigma_i)$ — класс Локетта, то по п. a) утверждения 2.1 из [7, гл. 10] $T_{h_2(\omega\cap\sigma_i)}=K_1$, где K_1 — база сплетения $H_{h_2(\omega\cap\sigma_i)}\wr Z_{\omega\cap\sigma_i}$. Тогда по п. d) леммы 18.2 из [7, гл. A]

$$T/T_{h_2(\omega\cap\sigma_i)}=T/K_1\cong(H/H_{h_2(\omega\cap\sigma_i)})\wr Z_{\omega\cap\sigma_i}.$$

Таким образом, $\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma(T/T_{h_2(\omega\cap\sigma_i)})$.

Так как $H\in h_1(\omega\cap\sigma_i)$, то $K\in h_1(\omega\cap\sigma_i)$, а значит, $K\subseteq T_{h_1(\omega\cap\sigma_i)}$. Поскольку $T/K\cong Z_{\omega\cap\sigma_i}\in\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$, то $T/K/T_{h_1(\omega\cap\sigma_i)}/K\cong T/T_{h_1(\omega\cap\sigma_i)}\in\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$. Следовательно,

$$T\in h_1(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}=(f_1(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i})\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}=f_1(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}=h_1(\omega\cap\sigma_i)\subseteq\mathfrak{F}=\omega\sigma LR(f_2).$$

Тогда $O^{\omega\cap\sigma_i,(\omega\cap\sigma_i)'}(T)\in f_2(\omega\cap\sigma_i)$. Вследствие $T/O^{\omega\cap\sigma_i,(\omega\cap\sigma_i)'}(T)\in\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$

$$T\in f_2(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}=h_2(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}.$$

Отсюда $T/T_{h_2(\omega\cap\sigma_i)}\in\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$.

Получили противоречие. Следовательно, $h_1(\omega\cap\sigma_i)\subseteq h_2(\omega\cap\sigma_i)$. В силу симметрии $h_2(\omega\cap\sigma_i)\subseteq h_1(\omega\cap\sigma_i)$, а значит, $f_1(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}=f_2(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$ для всех $\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma$.

Лемма доказана.

Определение 5. Пусть $\{f_j\mid j\in J\}$ — множество всех внутренних $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутников $\omega\sigma$-веерного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ с $\omega\sigma$-направлением φ. Назовем $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ внутренним *максимальным $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутником*, если f является максимальным элементом множества $\{f_j\mid j\in J\}$.

Теорема 4. *Пусть f — внутренний $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутник $\omega\sigma$-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутником h таким, что*

$$h(\omega')=\mathfrak{F},$$
$$h(\omega\cap\sigma_i)=f(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}=h(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\ \textit{для всех}\ \omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma.$$

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}=\omega\sigma LR(f)$, то по п. 2) леммы 2 $\mathfrak{F}=\omega\sigma LR(h)$, где $h(\omega')=\mathfrak{F}$, $h(\omega\cap\sigma_i)=f(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}$ для всех $\omega\cap\sigma_i\in\omega\sigma$.

Пусть f_1 — произвольный внутренний $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $f_1(\omega')\subseteq\mathfrak{F}=h(\omega')$, и в силу п. 2) леммы 3

$$f_1(\omega\cap\sigma_i)\subseteq f_1(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}=f(\omega\cap\sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}=h(\omega\cap\sigma_i)$$

для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. Отсюда следует, что $f_1 \leq h$. Учитывая п. 1) леммы 2 и п. 1) леммы 3, получаем, что h — максимальный внутренний $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. В силу произвольности выбора внутреннего $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутника f_1 получаем, что h — единственный максимальный внутренний $\omega\sigma\mathcal{L}$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Кроме того, $h(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} = (f(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i})\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} = f(\omega \cap \sigma_i)\mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i} = h(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$.

Теорема доказана.

Заключение

В продолжении данных исследований возникают следующие вопросы.

Вопрос 1. Описать $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга с алгебраическими, дистрибутивными, булевыми, стоуновыми решетками.

Вопрос 2. Изучить однопорожденные произведения $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга.

Вопрос 3. Изучить критические $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Воробьев Н.Н., Скиба А.Н.** О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 5. С. 662–673.
2. **Сафонов В.Г., Сафонова И.Н.** О минимальных тотально локальных не π-нильпотентных классах Фиттинга // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2016. № 6 (99). С. 91–95.
3. **Егорова В.Е.** Критические неоднопорожденные тотально канонические классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки. 2008. Т. 83, № 4. С. 520–527.
4. **Камозина О.В.** $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга // Чебыш. сб. 2020. Т. 21, № 4. С. 107–116. doi: 10.22405/2226-8383-2020-21-4-107-116 .
5. **Skiba A.N.** On one generalization of the local formations // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 1 (34). С. 79–82.
6. **Скиба А.Н., Шеметков Л.А.** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
7. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin; N Y: Walter de Gruyter, 1992. 892 p.
8. **Ведерников В.А.** О новых типах ω-веерных классов Фиттинга конечных групп // Украин. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. Р. 897–906. doi: 10.1023/A:1022058224181 .

Поступила 11.01.2021
После доработки 14.02.2021
Принята к публикации 24.02.2021

Камозина Олеся Владимировна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Брянский государственный инженерно-технологический университет
г. Брянск
e-mail: ovkamozina@yandex.ru

REFERENCES

1. Vorob'ev N.N., Skiba A.N. On the distributivity of the lattice of solvable totally local Fitting classes. *Math. Notes*, 2000, vol. 67, no. 5, pp. 563–571. doi: 10.1007/BF02676326 .
2. Safonov V.G., Safonova I.N. On minimal totally local non π-nilpotent Fitting classes. *Izvestiya Gomelskogo Gosudarstvennogo Universiteta imeni F. Skoriny*, 2016, no. 6 (99), pp. 91–95 (in Russian).
3. Egorova V.E. Critical non-singly-generated totally canonical Fitting classes of finite groups. *Math. Notes*, 2008, vol. 83, no. 4, pp. 478–484. doi: 10.4213/mzm4572 .

4. Kamozina O.V. $\omega\sigma$-fibered Fitting classes. *Chebyshevskii sbornik*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 107–116 (in Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2020-21-4-107-116 .
5. Skiba A.N. On one generalization of the local formations. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2018, no. 1 (34), pp. 79–82 (in Russian).
6. Skiba A.N., Shemetkov L.A. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups. *Siberian Adv. Math.*, 2000, vol. 10, no. 2, pp. 112–141.
7. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* Berlin; N Y: Walter de Gruyter, 1992, 892 p. ISBN: 978-3-11-087013-8 .
8. Vedernikov V.A. On new types of ω-fibered Fitting classes of finite groups. *Ukrainian Math. J.*, 2002, vol. 54, no. 7, pp. 1086–1097. doi: 10.1023/A:1022058224181 .

Received January 11, 2021
Revised February 14, 2021
Accepted February 24, 2021

Olesia Vladimirovna Kamozina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Bryansk State University of Engineering and Technology, Bryansk, 241037 Russia, e-mail: ovkamozina@yandex.ru .

Cite this article as: O. V. Kamozina. Satellites and products of $\omega\sigma$-fibered Fitting classes, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 88–97 .