ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 517.95

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А. О. Игнатьев

Рассмотрена система дифференциальных уравнений Льенара с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = z - F(x), \quad \frac{dz}{dt} = -g(x) \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$

$$\Delta x = 0, \quad \Delta z = J(z) \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Получены достаточные условия существования периодического решения этой системы.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием; система Льенара; предельный цикл.

A. O. Ignatyev. On the existence of a periodic solution of the Liénard system with impulse effect.

We consider a system of Liénard differential equations with impulse effect

$$\frac{dx}{dt} = z - F(x), \quad \frac{dz}{dt} = -g(x), \quad \text{for} \quad x \neq 0,$$

$$\Delta x = 0, \quad \Delta z = J(z) \quad \text{for} \quad x = 0.$$

Sufficient conditions for the existence of a periodic solution of this system are obtained.

Keywords: systems of differential equations with impulse effect, Liénard system, limit cycle.

MSC: 34C25; 34C15; 34A37

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-79-87

1. Введение

Теория импульсных дифференциальных уравнений описывает процессы, которые испытывают резкое изменение своего состояния в определенные моменты времени. Процессы с таким характером возникают естественно и часто, особенно в явлениях, изучаемых в физике, химической технологии, динамике популяций, биотехнологии и экономике. Это приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или, иначе, дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Сейчас теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием представляет собой интенсивно развивающееся направление математики, различные аспекты которого изложены в монографиях [1; 2]. В последние годы опубликованы сотни прикладных работ, в которых в качестве математических моделей рассматриваются дифференциальные уравнения с импульсным воздействием (см., например, статьи [3–5], где такие модели используются в медико-биологических исследованиях). Вследствие этого заметно увеличилось число математических публикаций по изучению различных аспектов теории импульсных систем [6; 7].

Согласно [8] импульсная динамическая система (или система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием) состоит из следующих элементов:

1) непрерывной динамической системы, которая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений между моментами импульсного воздействия;

2) системы разностных уравнений, которая описывает способ изменения положения в момент импульсного воздействия;

3) критерия, по которому определяются моменты импульсного воздействия.

Таким образом, в общем случае система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием имеет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = Y(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad (t, y(t)) \notin \mathcal{S}, \tag{1.1}$$

$$\Delta y(t) = J(t, y(t)), \quad (t, y(t)) \in \mathcal{S}. \tag{1.2}$$

Здесь $t \geq t_0 \geq 0$ — время; $y(t) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$; $\mathcal{D}$ — открытое множество;

$$\Delta y(t) \triangleq y(t^+) - y(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} y(t + \varepsilon) - y(t).$$

Функции Y и J считаем известными и непрерывными при $(t, y) \in [0, +\infty) \times \mathcal{D}$.

Решением системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.1), (1.2) является кусочно непрерывная функция $y(t)$ с начальным значением y_0 при $t = t_0$ с разрывами первого рода в моменты импульсного воздействия. Функция $y(t)$ есть решение системы дифференциальных уравнений на отрезке $[t_0, t_1]$, где $(t_1, y(t_1)) \in \mathcal{S}$, причем $(t_1, y(t_1)) \notin \mathcal{S}$ при $t \in [t_0, t_1)$, т. е. значение $t = t_1$ — это первый момент ипульсного воздействия, при котором $y(t)$ совершает скачок $\Delta y(t_1) = J(t_1, y(t_1))$ и мгновенно перемещается в точку $y(t_1^+) = y(t_1) + J(t_1, y(t_1))$. Дальше эволюция решения происходит согласно системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt} = Y(t, y(t)), \quad y(t_1) = y_1,$$

до следующего момента импульсного воздействия t_2, когда $(t_2, y(t_2)) \in \mathcal{S}$, причем $(t, y(t)) \notin \mathcal{S}$ при $t \in (t_1, t_2)$ и в этот момент t_2 происходит следующий скачок $\Delta y(t_2) = J(t_2, y(t_2))$ и т. д.

В прикладных задачах обычно рассматриваются следующие частные случаи дифференциальных уравнений с импульсным воздействием:

1) импульсное воздействие происходит на некоторой гиперповерхности $\mathcal{M}$ фазового пространства, и система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = Y(y),\ y(t_0) = y_0, && \text{при}\ \ y \notin \mathcal{M}, \\ &\Delta y = J(y) && \text{при}\ \ y \in \mathcal{M}; \end{aligned} \tag{1.3}$$

2) импульсные воздействия происходят в известные фиксированные моменты времени, и система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{dy(t)}{dt} = Y(t, y(t)),\ y(t_0) = y_0, && \text{при}\ t \neq t_k,\ k = 1, 2, \dots\ , \\ &\Delta y(t) = J_k(y(t)) && \text{при}\ t = t_k,\ k = 1, 2, \dots\ . \end{aligned}$$

Отметим, что в последнее время наряду с импульсными системами первого порядка стали изучаться также импульсные системы второго порядка [9].

Настоящая статья посвящена изучению существования периодических решений системы Льенара с импульсным воздействием. Система Льенара (без импульсного воздействия) представляет собой частный случай двумерной нелинейной системы вида

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y).$$

Одной из наиболее сложных проблем, связанных с изучением таких систем, является проблема наличия у них периодических решений.

В 1942 г. Левинсон и Смит [10] исследовали нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0. \tag{1.4}$$

Частные случаи этого уравнения изучались Ван дер Полем в 1927 г. и Льенаром в 1928 г. Ван дер Поль рассматривал $f(x) = \mu(x^2 - 1)$, $\mu = \mathrm{const}$, и оба они (Ван дер Поль и Льенар) полагали $g(x) = x$. Уравнение (1.4) может быть записано в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -f(x)y - g(x) \tag{1.5}$$

либо в эквивалентном виде

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \tag{1.6}$$

где $F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$. Уравнение (1.4) называется *уравнением Льенара*[1], а системы (1.5) и (1.6) известны как *системы Льенара*.

Одним из важных свойств систем (1.5) и (1.6) является наличие у них периодических решений. Этому направлению исследований посвящено огромное количество работ. Цель настоящей работы — доказать существование периодического решения системы (1.6) при наличии импульсного воздействия.

2. О существовании периодического решения системы Льенара с импульсным воздействием

Рассмотрим систему Льенара с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = z - F(x), \quad \frac{dz}{dt} = -g(x) \quad \text{при} \quad x \neq 0, \tag{2.1}$$

$$\Delta x = 0, \quad \Delta z = J(z) \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{2.2}$$

В данном случае множество $\mathcal{M}$ системы (1.3) представляет собой прямую $x = 0$ в плоскости Oxz. Определим условия, которые обеспечивают существование периодического решения системы (2.1), (2.2). Следующая теорема дает достаточные условия существования периодического решения этой системы. Она является продолжением и развитием работ [11; 12].

Теорема. *Предположим, что* $F(x)$ *непрерывно дифференцируема, а* $g(x)$ *локально липшицева и, кроме того,*

а) $xg(x) > 0$ *при* $x \neq 0$;

б) *уравнение* $F(x) = 0$ *имеет три действительных корня:* $x = b_1 > 0, x = b_2 < 0$ *и* $x = 0$; $F(x) > 0$ *при* $x \in (b_2, 0) \cup (b_1, +\infty)$; $F(x) < 0$ *при* $x \in (-\infty, b_2) \cup (0, b_1)$;

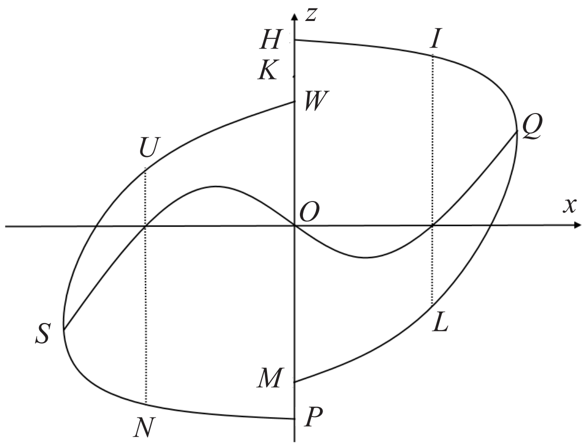
в) $F(x)$ *монотонно возрастает в интервалах* $(-\infty, b_2)$ *и* $(b_1, +\infty)$;

г) $J(z)$ *непрерывна,* $J(0) = 0$, *функция* $zJ(z)$ *ограничена и* $zJ(z) > 0$ *при* $z \neq 0$.

Тогда у системы (2.1), (2.2) *имеется нетривиальное (ненулевое) периодическое решение.*

Доказательство. Как показано в работах [13; 14], любое решение системы (2.1) представляет собой вращение по часовой стрелки вокруг начала координат, т. е. любое решение, начинающееся на положительной полуоси ординат Oz, последовательно проходит первый квадрант, затем четвертый, третий, второй, опять первый и так далее. Учитывая, что импульсное воздействие перемещает точку, находящуюся на положительной (отрицательной) полуоси ординат на положительную (отрицательную) полуось ординат, мы можем сделать вывод, что этим же свойством (свойством вращения вокруг начала координат) обладают также решения системы (2.1), (2.2).

[1]Некоторые авторы уравнение (1.4) называют обобщенным уравнением Льенара.



Рисунок

Рассмотрим траекторию $x(t), z(t)$ системы (2.1), (2.2) в плоскости Oxz, начинающуюся в нулевой момент времени t в точке H с координатами $(0, z_H)$, где $z_H > 0$ (рисунок). Обозначим буквами Q и S точки пересечения этой траектории с кривой $z = F(x)$, буквами I и L точки пересечения траектории с прямой $x = b_1$, буквами U и N точки пересечения траектории с прямой $x = b_2$ и, наконец, буквами W и M точки пересечения траектории $x(t), z(t)$ с осью Oz.

Решение системы (2.1), (2.2) с началом в точке H формируется следующим образом: вначале решается система (2.1) с начальными условиями $x(0) = 0, z(0) = z_H > 0$. При достаточно большом значении z_H это решение пересекается с кривой $z = F(x)$ в точке Q с $x_Q > b_1$ (как показано на рисунке). Это решение, последовательно проходя точки I, Q и L, через промежуток времени, равный $\tau_1 > 0$, попадает в точку M с координатами $(0, z_M)$, где $z_M < 0$. Затем происходит мгновенный скачок, и траектория $x(t), z(t)$ перемещается в точку P с координатами $(0, z_P)$, где $z_P = z_M + J(z_M)$. Дальнейшее движение $x(t), z(t)$ из точки P происходит в соответствии с решением задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = z - F(x), \quad \frac{dz}{dt} = -g(x), \quad x(\tau_1) = 0, \quad z(\tau_1) = z_P.$$

Решение $x(t), z(t)$ последовательно проходит через точки N, S, U и через промежуток времени τ_2 от точки P достигает положительной полуоси Oz в точке W. Затем происходит мгновенный скачок, и решение $x(t), z(t)$ переходит в точку K с координатами $(0, z_W + J(z_W))$. Для существования периодического решения системы (2.1), (2.2) достаточно показать существование такого значения $z_H > 0$, что

$$z_H = z_K = z_W + J(z_W).$$

Отметим вначале, что значение $z_W + J(z_W)$ непрерывно зависит от z_H. Это следует из непрерывной зависимости решений системы (2.1) от начальных данных и из непрерывности функции $J(z)$.

Очевидно, что решение $x(t), z(t)$ будет периодическим тогда и только тогда, когда точки H и K совпадают, т. е. $z_H = z_K$. Обозначим $G(x) := \int_0^x g(\xi)d\xi$. Рассмотрим функцию $v(x, z) = \frac{z^2}{2} + G(x)$. Производная этой функции в силу системы (2.1) определяется как

$$\frac{dv(x(t), z(t))}{dt} = -z(t)g(x(t)) + g(x(t))[z(t) - F(x(t))] = -g(x(t))F(x(t)).$$

Изменение функции v от точки H до точки K получаем по формуле

$$\Delta v = v(0, z_K) - v(0, z_H) = [v(0, z_K) - v(0, z_W)] + [v(0, z_W) - v(0, z_P)] + [v(0, z_P) - v(0, z_M)] + [v(0, z_M) - v(0, z_H)].$$

Найдем

$$v(0,z_K)-v(0,z_W)=v(0,z_W+J(z_W))-v(0,z_W)$$
$$=\frac{[z_W+J(z_W)]^2}{2}-\frac{z_W^2}{2}=z_WJ(z_W)+\frac{J^2(z_W)}{2}.$$

Аналогично $v(0,z_P)-v(0,z_M)=v(0,z_M+J(z_M))-v(0,z_M)=z_MJ(z_M)+\dfrac{J^2(z_M)}{2}$. Начальное значение z_H выбираем достаточно большим, таким что $x_Q>b_1, x_S<b_2$. Покажем, что Δv представляет собой убывающую функцию z_H. Для этого непрерывные участки траекторий $HIQLM$ и $PNSUW$ разобьем на шесть частей, где первая часть — это участок траектории между точками H и I, вторая — участок траектории между точками I и L, третья — участок траектории между точками L и M, четвертая — участок траектории между точками P и N, пятая — участок траектории между точками N и U и, наконец, шестая — участок траектории между точками U и W. Таким образом, выражение для Δv может быть представлено в виде

$$\Delta v=z_WJ(z_W)+\frac{J^2(z_W)}{2}+z_MJ(z_M)+\frac{J^2(z_M)}{2}+\sum_{i=1}^{6}\Delta v_i, \tag{2.3}$$

где Δv_i — это изменение функции v на i-м участке траектории. На первом, третьем, четвертом и шестом участках z может быть представлено как функция переменной x, так как на этих участках $x(t)$ либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает, следовательно, замена переменной $dt=\dfrac{dx}{z-F(x)}$ вполне корректна.

На втором и четвертом участках можно воспользоваться подстановкой $dt=-\dfrac{dz}{g(x)}$. Покажем, что $\sum_{i=1}^{6}\Delta v_i$ является монотонно убывающей функцией z_H. Для этого рассмотрим две траектории, выходящие при $t=0$ из точек $(0,z_H)$ и $(0,z_H+\Delta z_H)$, где $\Delta z_H>0$. Обозначим траектории системы (2.1), (2.2), выходящие при $t=0$ из точек $(0,z_H)$ и $(0,z_H+\Delta z_H)$, соответственно символами $T1$ и $T2$. В силу теоремы о существовании и единственности решений системы (2.1), а также вследствие непрерывности функции J и свойства $zJ(z)>0$ при $z\neq 0$ траектории $T1$ и $T2$ не имеют общих точек, следовательно, траектория $T2$ расположена "снаружи" траектории $T1$, т. е. любой луч, выходящий из начала координат, вначале пересечет $T1$ и лишь затем $T2$.

Здесь и далее под $\Delta v_i(T2)$ и $\Delta v_i(T1)$ понимаем значения Δv_i на траекториях $T2$ и $T1$. Выясним, как изменяются выражения для Δv_i $(i=1,\dots,6)$ при переходе от траектории $T1$ к траектории $T2$, имеем

$$\Delta v_1=\int\limits_0^{b_1}\frac{g(x)[-F(x)]}{z(x)-F(x)}dx=\int\limits_0^{b_1}\frac{g(x)|F(x)|}{|z(x)-F(x)|}dx.$$

Выражение для $z(x)$ на траектории $T2$ больше, чем выражение для $z(x)$ на траектории $T1$, следовательно, $\Delta v_1(T2)<\Delta v_1(T1)$, значит,

$$\Delta v_2=-\int\limits_{z_I}^{z_L}g(x)F(x)\Big[-\frac{dz}{g(x)}\Big]=-\int\limits_{z_L}^{z_I}F(x(z))dz.$$

Учитывая, что на этом участке $F(x)$ положительна и монотонно возрастает, а $x(z)|_{T2}>x(z)|_{T1}$, получаем, что $\Delta v_2(T2)<\Delta v_2(T1)$, значит,

$$\Delta v_3=\int\limits_{b_1}^{0}\frac{g(x)[-F(x)]}{z(x)-F(x)}dx=\int\limits_0^{b_1}\frac{g(x)|F(x)|}{|z(x)-F(x)|}dx.$$

В этом случае также $\Delta v_3(T2) < \Delta v_3(T1)$ и

$$\Delta v_4 = \int\limits_0^{b_2} \frac{[-g(x)]F(x)}{z(x)-F(x)}dx = \int\limits_{b_2}^{0} \frac{[-g(x)]F(x)}{F(x)-z(x)}dx.$$

Отсюда $\Delta v_4(T2) < \Delta v_4(T1)$, имеем

$$\Delta v_5 = -\int\limits_{z_N}^{z_U} g(x)F(x)\Big[-\frac{dz}{g(x)}\Big] = \int\limits_{z_N}^{z_U} F(x(z))dz.$$

На этом участке $F(x)$ отрицательна. Так как $x(z)|_{T2} < x(z)|_{T1}$, то

$$F(x(z))|_{x(z)\in T2} < F(x(z))|_{x(z)\in T1},$$

следовательно, $\Delta v_5(T2) < \Delta v_5(T1)$ и

$$\Delta v_6 = -\int\limits_{b_2}^{0} \frac{g(x)F(x)}{z(x)-F(x)}dx = \int\limits_{b_2}^{0} \frac{[-g(x)]F(x)}{z(x)-F(x)}dx.$$

Здесь $z(x)|_{T2} > z(x)|_{T1}$, отсюда, $\Delta v_6(T2) < \Delta v_6(T1)$. Таким образом, доказано, что Δv_i $(i = 1,\dots,6)$ убывают при возрастании значения z_H и поэтому $\sum_{i=1}^{6}\Delta v_i$ тоже убывает при возрастании z_H. Покажем, что

$$\lim_{z_H\to+\infty}\sum_{i=1}^{6}\Delta v_i = -\infty.$$

Для этого достаточно установить, что $\lim_{z_H\to+\infty}\Delta v_2 = -\infty$.

Докажем, что z_I неограниченно возрастает при неограниченном увеличении значения z_H. Избавляясь в системе (2.1) от переменной t и переходя к аргументу x, запишем дифференциальное уравнение, которым описывается орбита HIQ:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{g(x)}{z-F(x)}. \tag{2.4}$$

По условию теоремы $F(x) < 0$ при $x \in (0, b_1)$, следовательно,

$$\frac{g(x)}{z-F(x)} < \frac{g(x)}{z} \quad \text{при} \quad x \in (0, b_1). \tag{2.5}$$

Из уравнения (2.4) и неравенства (2.5) имеем

$$-\frac{dz}{dx} < \frac{g(x)}{z} \quad \text{при} \quad x \in (0, b_1).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{1}{2}z^2(b_1) - \frac{1}{2}z_H^2 > -\int\limits_0^{b_1} g(x)dx,$$

откуда, учитывая, что $z(b_1) = z_I$, выводим $z_I \to +\infty$ при $z_H \to +\infty$.

Пусть $c \in (b_1, x_Q)$. Обозначим ординаты точек пересечения траектории $T1$ и прямой $x = c$ на участках IQ и QL соответственно как z^* и z^{**}. L — это точка пересечения траектории $T1$ и прямой $x = b_1$, поэтому заключаем, что $z_L < 0$ (см. рисунок). Учитывая непрерывность траектории $T1$, значение $c \in (b_1, x_Q)$ выбираем настолько близким к значению b_1, что $z^{**} < 0$. Пусть $z(x)$ — это решение дифференциального уравнения (2.4), имеющее началом точку H при $x = 0$. Покажем, что $z(c) \to +\infty$ при $z_H \to +\infty$. На интервале (b_1, c) справедливо неравенство $z - F(x) > z - F(c)$, так как на этом интервале функция $F(x)$ монотонно возрастает. Следовательно, из дифференциального уравнения (2.4) имеем

$$-\frac{dz}{dx} = \frac{g(x)}{z - F(x)} < \frac{g(x)}{z - F(c)}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем $-\Big[\frac{1}{2}z^2 - F(c)z\Big]_{z_I}^{z(c)} < \int_{b_1}^{c} g(x)dx$, откуда (ввиду того что $z(c) = z^* > 0$) следует неравенство

$$z(c) > F(c) + \sqrt{[z_I - F(c)]^2 - 2\int_{b_1}^{c} g(x)dx}.$$

Так как $z_I \to +\infty$ при $z_H \to +\infty$, то $z^* = z(c) \to +\infty$ при $z_H \to +\infty$.

Учитывая, что $F(x)$ возрастает при $x > b_1$, имеем

$$\Delta v_2 = -\int\limits_{z_L}^{z_I} F(x(z))dz < -F(c)(z^* - z^{**})$$

$$< -F(c)\Big[F(c) + \sqrt{[z_I - F(c)]^2 - 2\int_{b_1}^{c} g(x)dx}\ \Big].$$

Из полученного неравенства вытекает, что $\Delta v_2 \to -\infty$ при $z_H \to +\infty$ и, следовательно, $\sum_{i=1}^{6} \Delta v_i \to -\infty$ при $z_H \to +\infty$. Ограниченность $zJ(z)$ при $z \to \pm\infty$ и равенство (2.3) позволяют заключить, что

$$\Delta v \to -\infty \quad \text{при} \quad z_H \to +\infty. \tag{2.6}$$

Если выбрать z_H достаточно малым, таким что весь отрезок траектории от точки H до точки W расположен в области $x \in (b_2, b_1)$, то, очевидно, что $\Delta v > 0$. Исходя из непрерывной зависимости Δv от z_H и свойства (2.6), выводим, что существует значение $z_H > 0$ такое, что $\Delta v = 0$. Это означает, что при выполнении условий теоремы у системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (2.1), (2.2) существует нетривиальное периодическое решение.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что результат, доказанный в теореме, является новым даже в случае $J(z) = 0$, т. е. при отсутствии импульсных воздействий. Кроме того, в отличие от работ [15; 16] функции $f(x)$ и $g(x)$ могут выбираться из достаточно широкого класса функций, т. е. не предполагается, что система описывает осциллятор Ван дер Поля.

З а м е ч а н и е 2. В настоящее время системы Льенара и импульсные системы являются активно развивающимися направлениями изучения обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [17]), и доказанная теорема вносит свой вклад в оба эти направления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bainov D.D., Simeonov P.S.** Systems with impulse effect: stability, theory and applications. N Y; Chichester; Brisbane; Toronto: Halsted Press, 1989. 256 p.
2. **Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.** Theory of impulsive differential equations. Singapure; N J; London: World Scientific, 1989. 273 p. doi: 10.1142/0906 .
3. **D'Onofrio A.** Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model: Global asymptotic stable eradication in presence of vaccine failures // Mathematical and Computer Modelling 2002. Vol. 36. P. 473–489. doi: 10.1016/S0895-7177(02)00177-2 .

4. **Smith R.J., Wahl L.M.** Distinct effects of protease and reverse transcriptase inhibition in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects // Bulletin Math. Biology 2004. Vol. 66. P. 1259–1283. doi: 10.1016/J.BULM.2003.12.004 .
5. **Jiao J., Liu Z., Li L., Nie X.** Threshold dynamics of a stage-structured single population model with non-transient and transient impulsive effects // Applied Math. Letters 2019. Vol. 97, no. 1. P. 88–92. doi: 10.1016/j.aml.2019.05.024 .
6. **Игнатьев А.О.** Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 10. С. 117–132.
7. **Двирный А.И., Слынько В.И.** Аналог критического случая А.М.Молчанова для импульсных систем // Автоматика и телемеханика 2015. Т. 76, № 6. С. 3–17.
8. **Haddad W.M., Chellaboina V., Nersesov S.G.** Impulsive and hybrid dynamical systems: stability, dissipativity, and control. Princeton: Princeton University Press, 2006. 520 p. doi: 10.1515/9781400865246 .
9. **Graef J.R., Kadari H., Ouahab A., and Oumansour A.** Existence results for systems of second-order impulsive differential equations // Acta Math. Univ. Comenianae. 2019. Vol. 88, no. 1. P. 51–66.
10. **Levinson N. and Smith O.** A general equation for relaxation oscillations // Duke Math. J. 1942. Vol. 9, no. 2. P. 382–403. doi: 10.1215/S0012-7094-42-00928-1 .
11. **Игнатьев А.О.** Оценка амплитуды предельного цикла уравнения Льенара // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 3. С. 312–320.
12. **Ignatyev A.O.** The domain of existence of a limit cycle of Liénard system // Lobachevskii J. Math. 2017. Vol. 38, no. 2. P. 271–279. doi: 10.1134/S199508021702010X .
13. **Carletti T., Villari G.** A note on existence and uniqueness of limit cycles for Liénard systems // J. Math. Analysis Appl. 2005. Vol. 307, no. 2. P. 763–773. doi: 10.1016/j.jmaa.2005.01.054 .
14. **Sabatini M., Vilari G.** On the uniqueness of limit cycles for Lienard equation: the legacy of G. Sansone // Matematiche (Catania). 2010. Vol. 65, no. 2. P. 201–214.
15. **Belley J.M., Guen R.** Periodic van der Pol equation with state dependent impulses // J. Math. Analysis Appl. 2015. Vol. 426. P. 995–1011. doi: 10.1016/j.jmaa.2015.02.026 .
16. **Herrera L., Montano O., Orlov Yu.** Hopf bifurcation of hybrid Van der Pol oscillators // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2017. Vol. 26. P. 225–238. doi: 10.1016/j.nahs.2017.05.003 .
17. **Ding B., Pan S., Ding C.** The index of impulsive periodic orbits // Nonlinear Analysis. 2020. Vol. 192. P. 1–9. doi: 10.1016/j.na.2019.111659 .

Поступила 8.12.2020
После доработки 25.12.2020
Принята к публикации 11.01.2021

Игнатьев Александр Олегович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий научный сотрудник
Институт прикладной математики и механики
г. Донецк
e-mail: aoignat@mail.ru

REFERENCES

1. Bainov D.D., Simeonov P.S. *Systems with impulse effect: stability, theory and applications.* N Y; Chichester; Brisbane; Toronto: Halsted Press, 1989, 256 p. ISBN: 0-7458-0457-8 .
2. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. *Theory of impulsive differential equations.* Singapure; N J; London: World Scientific, 1989, 273 p. doi: 10.1142/0906 .
3. D'Onofrio A. Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model: Global asymptotic stable eradication in presence of vaccine failures. *Mathematical and Computer Modelling*, 2002, vol. 36, pp. 473–489. doi: 10.1016/S0895-7177(02)00177-2 .
4. Smith R.J., Wahl L.M. Distinct effects of protease and reverse transcriptase inhibition in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects. *Bulletin Math. Biology*, 2004, vol. 66, pp. 1259–1283. doi: 10.1016/J.BULM.2003.12.004 .

5. Jiao J., Liu Z., Li L., Nie X. Threshold dynamics of a stage-structured single population model with non-transient and transient impulsive effects. *Applied Math. Letters*, 2019, vol. 97, no. 1, pp. 88–92. doi: 10.1016/j.aml.2019.05.024 .
6. Ignatyev A.O. Method of Lyapunov functions in problems of stability of systems of differential equations with impulse action. *Sb. Math.*, 2003, vol. 194, no. 10, pp. 1543–1558. doi: 10.1070/SM2003v194n10ABEH000776 .
7. Dvirnyi A.I., Slyn'ko V.I. A counterpart of A.M. Molchanov's critical case for impulse systems. *Autom. Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 6, pp. 945–956. doi: 10.1134/S0005117915060016 .
8. Haddad W.M., Chellaboina V., Nersesov S.G. *Impulsive and hybrid dynamical systems: stability, dissipativity, and control.* Princeton: Princeton University Press, 2006, 520 p. doi: 10.1515/9781400865246 .
9. Graef J.R., Kadari H., Ouahab A., and Oumansour A. Existence results for systems of second-order impulsive differential equations. *Acta Math. Univ. Comenianae*, 2019, vol. 88, no. 1, pp. 51–66.
10. Levinson N. and Smith O. A general equation for relaxation oscillations. *Duke Math. J.*, 1942, vol. 9, no. 2, pp. 382–403. doi: 10.1215/S0012-7094-42-00928-1 .
11. Ignat'ev A.O. Estimate for the amplitude of the limit cycle of the Liénard equation. *Diff. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 302–310. doi: 10.1134/S0012266117030028 .
12. Ignatyev A.O. The domain of existence of a limit cycle of Liénard system. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 2, pp. 271–279. doi: 10.1134/S199508021702010X .
13. Carletti T., Villari G. A note on existence and uniqueness of limit cycles for Liénard systems. *J. Math. Analysis Appl.*, 2005, vol. 307, no. 2, pp. 763–773. doi: 10.1016/j.jmaa.2005.01.054 .
14. Sabatini M., Vilari G. On the uniqueness of limit cycles for Lienard equation: the legacy of G. Sansone. *Matematiche* (*Catania*), 2010, vol. 65, no. 2, pp. 201–214.
15. Belley J.M., Guen R. Periodic van der Pol equation with state dependent impulses. *J. Math. Analysis Appl.*, 2015, vol. 426, pp. 995–1011. doi: 10.1016/j.jmaa.2015.02.026 .
16. Herrera L., Montano O., Orlov Yu. Hopf bifurcation of hybrid Van der Pol oscillators. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2017, vol. 26, pp. 225–238. doi: 10.1016/j.nahs.2017.05.003 .
17. Ding B., Pan S., Ding C. The index of impulsive periodic orbits. *Nonlinear Analysis*, 2020, vol. 192, pp. 1–9. doi: 10.1016/j.na.2019.111659 .

Received December 8, 2020
Revised December 25, 2020
Accepted January 11, 2021

Alexander Olegovich Ignatyev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, 83114 Ukraine, e-mail: aoignat@mail.ru .

Cite this article as: A. O. Ignatyev. On the existence of a periodic solution of the Liénard system with impulse effect, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 79–87 .