ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЦОКОЛЕМ $L_3(q)$ ИЛИ $U_3(q)$ [1]

В. И. Зенков

Ранее автором были описаны с точностью до сопряжения все пары (A, B) нильпотентных подгрупп A и B в конечной группе G с цоколем $L_2(q)$, для которых $A \cap B^g \neq 1$ для любого элемента g из G. Аналогичное описание было позднее получено автором для примарных подгрупп A и B в конечной группе G с цоколем $L_n(2^m)$. В этой работе дается описание с точностью до сопряжения всех пар (A, B) нильпотентных подгрупп A и B конечной группы G с цоколем $L_3(q)$ или $U_3(q)$, для которых $A \cap B^g \neq 1$ для любого элемента g из G. Полученные результаты подтверждают в рассмотренных случаях гипотезу о том, что в конечной простой неабелевой группе G для любой ее нильпотентной подгруппы N найдется такой элемент g, что $N \cap N^g = 1$ (задача 15.40 из "Коуровской тетради").

Ключевые слова: конечная группа, нильпотентная подгруппа, пересечение подгрупп, подгруппа Фиттинга.

V. I. Zenkov. On the intersections of nilpotent subgroups in finite groups with socle $L_3(q)$ or $U_3(q)$.

Earlier, the author described up to conjugation all pairs (A, B) of nilpotent subgroups A and B in a finite group G with socle $L_2(q)$ for which $A \cap B^g \neq 1$ for any element g of G. A similar description was obtained later by the author for primary subgroups A and B of a finite group G with socle $L_n(2^m)$. In this paper, we describe up to conjugation all pairs (A, B) of nilpotent subgroups A and B of a finite group G with socle $L_3(q)$ or $U_3(q)$ for which $A \cap B^g \neq 1$ for any element g of G. The obtained results confirm in the considered cases the hypothesis that for a finite simple non-Abelian group G and its nilpotent subgroup N there is an element $g \in G$ such that $N \cap N^g = 1$ (Problem 15.40 from "The Kourovka Notebook").

Keywords: finite group, nilpotent subgroup, intersection of subgroups, Fitting subgroup.

MSC: 20D06, 20D15, 20D20, 20D30

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-70-78

Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — ее подгруппы. Определим множество $M_G(A, B)$ как множество всех минимальных по включению пересечений вида $A \cap B^g$, где $g \in G$, а $m_G(A, B)$ — как подмножество всех минимальных по порядку элементов из $M_G(A, B)$. Определим также подгруппы $\mathrm{Min}_G(A, B) = \langle M_G(A, B)\rangle$ и $\mathrm{min}_G(A, B) = \langle m_G(A, B)\rangle$. Автором (см. [1, теорема 2.18]) были изучены пересечения абелевых подгрупп в произвольных конечных группах и было доказано, что $\mathrm{Min}_G(A, B) \leq F(G)$ для абелевых подгрупп A и B.

Однако пример группы $G = E_9 \leftthreetimes D_8$, в которой D_8 действует точно на E_9 и $A = B = D_8$, показывает, что $\mathrm{Min}_G(A, B) = \mathrm{min}_G(A, B) = D_8 \not\leq F(G) = E_9$, хотя A и B — минимальные неабелевы группы. Более того, можно рассмотреть пример группы $G = C_2 \times \Sigma_4$, в которой ввиду леммы 2, приведенной ниже, существуют четверная подгруппа A и подгруппа $B \simeq D_8$ такие, что $A \cap B^{g_1} \leq F(G)$ и $A \cap B^{g_2} \not\leq F(G)$ для некоторых элементов g_1 и g_2 из G.

Эти примеры относятся к разрешимым группам. Первый опубликованный пример конечной почти простой группы G с нильпотентными подгруппами A и B, для которых $\mathrm{min}_G(A, B) \neq 1$, появился в нашей работе, написанной в соавторстве с В. Д. Мазуровым [2, теорема 1].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00456, и проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов России (соглашение 02.A03.210006 от 27.08.2013).

Это была группа $G = \Sigma_8$, в которой $A = B \in \mathrm{Syl}_2(G)$. В этой же работе было доказано, что в простой неабелевой группе G для любых ее примарных подгрупп A и B имеем $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$, а для группы $G = \Sigma_n$ также $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$ при $n \geq 5$, за исключением указанной группы $G \simeq \Sigma_8$. Позднее автором в [3] было доказано, что $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$ для любой почти простой группы G и любых ее примарных p-подгрупп A и B, где $p \geq 5$ — простое число. Для случаев $p = 2, 3$ имеются исключения.

Для конечной простой неабелевой группы G и ее нильпотентной подгруппы N в "Коуровской тетради" [4] поставлен вопрос 15.40: "Верно ли, что $N \cap N^g = 1$ для некоторого элемента g из G?'

Положительный ответ на этот вопрос для знакопеременной группы G получен Р. К. Курмазовым в [5].

Кроме того, в [6, теорема 2] для группы G с цоколем $L_2(q)$ и ее нильпотентных подгрупп A и B было дано описание подгруппы $\mathrm{min}_G(A, B) \neq 1$, из которого следовал ответ на вопрос 15.40 из "Коуровской тетради" в этом случае.

В данной работе, продолжая исследование, начатое в [7], мы рассматриваем случай группы G с цоколем, изоморфным $L_3(q)$ или $U_3(q)$, и нильпотентными подгруппами A и B из G, для которых $\mathrm{min}_G(A, B) \neq 1$. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — конечная группа с цоколем $L_3(q)$ или $U_3(q)$, A и B — нильпотентные подгруппы из G и S — силовская 2-подгруппа из G. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) $A \cap B^g \neq 1$;

(2) $\mathrm{Min}_G(A, B) \neq 1$;

(3) $\mathrm{min}_G(A, B) \neq 1$;

(4) *A и B — 2-подгруппы из G и с точностью до сопряжения либо*

(а) *$G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_3(2))$ и $(A, B) = (S, S)$, либо*

(б) *$\mathrm{Soc}\,(G) \simeq L_3(4)$, $G = \mathrm{Soc}\,(G)\langle\tau\rangle$ или $G = \mathrm{Soc}\,(G)\langle\tau, f\rangle$, где инволюции τ и f индуцируют на $\mathrm{Soc}\,(G)$ нетривиальные графовый и полевой автоморфизмы соответственно, $A \cap B \cap \mathrm{Soc}\,(G)\langle\tau\rangle > \mathrm{min}_G(S, S)$, причем $A \geq \mathrm{Min}_G(S, S)$ или $B \geq \mathrm{Min}_G(S, S)$.*

З а м е ч а н и е 1. Подгруппы $\mathrm{min}_G(S, S)$ и $\mathrm{Min}_G(S, S)$ из утверждения (4б) теоремы в случае $Soc(G) \simeq L_3(2^m)$ приведены в лемме 4.

1. Обозначения и предварительные сведения

Обозначения в основном стандартны (см., например, [8; 9].

Симметрическая и знакопеременная группы степени n обозначаются через Σ_n и A_n соответственно.

Лемма 1 [2, теорема 2]. *Пусть G — конечная простая неабелева группа, A и B — ее примарные подгруппы. Тогда* $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Лемма 2 [1, теорема 2.18]. *Пусть G — конечная группа, A и B — ее абелевы подгруппы. Тогда* $\mathrm{Min}_G(A, B) \leq F(G)$.

Лемма 3 [10, теорема]. *Пусть G — конечная группа, A — абелева подгруппа и B — нильпотентная подгруппа из G. Тогда $A \cap B^g \leq F(G)$ для некоторого элемента g из G.*

Лемма 4 [7, теорема 1]. *Пусть G — конечная группа с цоколем, изоморфным $L_n(2^m)$, S — силовская 2-подгруппа из G. Если $\mathrm{min}_G(S, S) \neq 1$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $m = 1$, $n \geq 3$, $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, $\mathrm{min}_G(S, S) = S$ *при* $n = 2k + 1$ *и* $\mathrm{min}_G(S, S) = O_2(N_G(P))$ *при $n = 2k$, где P — параболическая подгруппа, соответствующая центральной вершине в схеме Дынкина для $L_n(2)$;*

(2) $m = 2$, $n = 3$, $G = \mathrm{Soc}\,(G)\langle\tau\rangle$ *или* $G = \mathrm{Soc}\,(G)\langle\tau, f\rangle$, *где инволюции* τ *и* f *индуцируют на* $\mathrm{Soc}\,(G)$ *нетривиальные графовый и полевой автоморфизмы соответственно,* $\mathrm{min}_G(S,S) = \langle\tau^S\rangle$, $\langle\tau^S\rangle > Z(S_0)$, *где* $S_0 = S \cap \mathrm{Soc}\,(G)$, *причем* $\mathrm{Min}_G(S,S) = S_0\langle\tau\rangle$.

Лемма 5 [6, теоремы 1 и 2]. *Пусть* G *— конечная группа с цоколем, изоморфным* $L_2(q)$, *где* q *нечетно,* S *— силовская* 2*-подгруппа из* G, A *и* B *— нильпотентные подгруппы из* G. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$;

(2) $\mathrm{min}_G(A,B) \neq 1$;

(3) *либо* $q = 2^m - 1$ *— простое число Мерсенна,* $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_2(q))$, *пара* (A,B) *с точностью до сопряженности совпадает с парой* (S,S), $M_G(A,B) = m_G(A,B)$ *и* $\mathrm{Min}_G(A,B) = \mathrm{min}_G(A,B) = S$, *либо* $q = 9$, $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_2(9))$, *пара* (A,B) *с точностью до сопряженности принадлежит множеству* $\{(S,S), (\mathrm{min}_G(S,S),S), (S,\mathrm{min}_G(S,S))\}$, $M_G(A,B) = m_G(A,B)$ *и* $\mathrm{Min}_G(A,B) = \mathrm{min}_G(A,B) = \langle i,j\rangle \simeq D_{16}$, *где* i *и* j *— инволюции из* $G\backslash G'$ *и* $|C_S(i)| = |C_S(j)| = 8$.

2. Доказательство теоремы

Пусть выполняются условия теоремы. Положим $K = Soc(G)$. Тогда $K = L_3^\epsilon(q)$, где $q = r^m$ для простого числа r и $\epsilon = \pm 1$, причем $K = L_3(q)$ при $\epsilon = 1$ и $K = U_3(q)$ при $\epsilon = -1$. Пусть $G_0 = G \cap \mathrm{Inndiag}(K)$ и $\overline{G} = G/K$.

Равносильность утверждений (1), (2) и (3) в теореме следует непосредственно из определений подгрупп $\mathrm{Min}_G(A,B)$ и $\mathrm{min}_G(A,B)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что, (3) $\Leftrightarrow$ (4). Но (4) $\Rightarrow$ (3) ввиду лемм 4 и 5 и [7, теорема 2]. Поэтому достаточно доказать, что (3) $\Rightarrow$ (4).

Допустим, что утверждение (3) $\Rightarrow$ (4) ложно. Пусть G — контрпример наименьшего порядка к этому утверждению. Тогда в группе G может существовать несколько пар нильпотентных подгрупп A и B, для которых утверждение (3) $\Rightarrow$ (4) ложно. Выберем среди этих пар такую, для которой число $|A||B|$ минимально.

Лемма 6. $G = AK = BK$, $\overline{G}$ *нильпотентна и* $q = r^m \geq 5$.

Доказательство. Допустим, что $q \leq 4$. Тогда подгруппа K изоморфна $L_3(2)$, $L_3(4)$ или $U_3(4)$. Отсюда ввиду [11, теоремы 1 и 2] получаем, что $K \simeq L_3(2)$ или $L_3(4)$, а подгруппы A и B являются 2-подгруппами. Но тогда ввиду лемм 4 и 5 и [7, теорема 2] группа G — не контрпример к теореме. Следовательно, $q \geq 5$.

Допустим, что $G_1 := AK < G$. Тогда $|G_1| < |G|$ и в подгруппе G_1 для подгрупп A и $B_1 = B \cap G_1$ выполняются условия теоремы. По индукции $\mathrm{Min}_{G_1}(A,B_1) = 1$. Поэтому для некоторого элемента g_1 из G_1 имеем $1 = A \cap B_1^{g_1} = A \cap (G_1 \cap B)^{g_1} = A \cap B^{g_1}$, что противоречит выбору числа $|A||B|$. Следовательно, $G = AK$. Аналогично, $G = BK$.

Так как $\overline{G} \simeq AK/K \simeq A/A\cap K$ и подгруппа A нильпотентна, то и группа $\overline{G}$ нильпотентна. $\square$

Лемма 7. $O_p(A) = \Omega_1(O_p(A))$ *для любого* $p \in \pi(A)$, *причем силовские* p*-подгруппы из* $\overline{G}$ *циклические, за исключением, быть может, случая, когда* $p \leq 3$ *и силовская* p*-подгруппа из* $\overline{G}$ *изоморфна* E_4 *или* E_9. *В любом случае группа* $\overline{G}$ *абелева.*

Доказательство. Допустим, что $\Omega_1(O_p(A)) < O_p(A)$ для некоторого $p \in \pi(A)$. Тогда по выбору числа $|A||B|$ имеем $\Omega_1(O_p(A))O_{p'}(A) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. В частности, $O_{p'}(A) \cap B^g = 1$. Но $A \cap B^g \neq 1$, так как $\mathrm{min}_G(A,B) \neq 1$. Поэтому $D := O_p(A) \cap B^g \neq 1$. Но D содержит элемент порядка p из $\Omega_1(O_p(A))$. Поэтому $\Omega_1(O_p(A)) \cap B^g \neq 1$ и, следовательно, $\Omega_1(O_p(A))O_{p'}(A) \cap B^g \neq 1$; противоречие. Значит, $O_p(A) = \Omega_1(O_p(A))$ для любого $p \in \pi(A)$

По лемме 6 $\overline{G} = G/K \simeq A/A \cap K \simeq \overline{A}$, следовательно, группа $\overline{G}$ нильпотентна. Пусть $p \in \pi(\overline{A})$. По доказанному в предыдущем абзаце $\overline{O_p(A)} \leq \Omega_1(\overline{O_p(A)})$.

Согласно [12, (9-1)] $\mathrm{Aut}\,(K) = \mathrm{Inndiag}(K) \rtimes (\Phi_K \times \Gamma_K)$, где $\mathrm{Inndiag}(K)$ — подгруппа внутренне-диагональных автоморфизмов группы $\mathrm{Aut}\,(K)$, а Φ_K и Γ_K — подгруппы полевых и графовых автоморфизмов соответственно. Кроме того, в факторгруппе $\mathrm{Out}\,(K) = \mathrm{Aut}\,(K)/\mathrm{Inn}\,(K)$ имеем $|\mathrm{Outdiag}(K)| = (3, q-\varepsilon)$, $|\Gamma_K| \le 2$, подгруппа Φ_K циклическая, $[\Phi_K, \Gamma_K] = 1$ и инволютивный графовый автоморфизм инвертирует $\mathrm{Outdiag}(K)$.

В силу равенства $\overline{O_p(A)} = \Omega_1(\overline{O_p(A)})$ порядок силовской p-подгруппы в Φ_K не превосходит p. Поэтому силовская p-подгруппа из $\overline{G}$ изоморфна либо C_p, либо E_4, когда $p = 2$ и в Φ_K и Γ_K есть инволюции, либо E_9, когда $p = 3$, в $\mathrm{Out}\,(K)$ есть полевой автоморфизм порядка 3 и $3|(q-\varepsilon)$.

В любом случае группа $\overline{G}$ абелева. □

Лемма 8. *Подгруппы A и B не являются примарными. Каждая из них имеет неабелеву силовскую подгруппу.*

Доказательство. Допустим, что первое утверждение леммы неверно. Тогда можно считать, что подгруппа A примарна. Поэтому ввиду леммы 6 и [3, теорема $2B$] подгруппа A является 2-группой, $G = AK$ и либо $q = 9$, либо $q \ge 5$ — простое число Ферма или Мерсенна. Если $G = K$, то по лемме 1 имеем $A \cap B^g = 1$; противоречие. Поэтому ввиду леммы 7 и [8, теорема 2.5.12, определение 2.5.13] $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_3(9))$, либо $|G : K| = 2$, причем при $q \ne 9$ имеем $G = K\langle\tau\rangle$, где τ —нетривиальный графовый автоморфизм группы K.

Пусть S — силовская 2-подгруппа в G, содержащая A, z — инволюция из $Z(S) \cap K$ и $C = C_G(z)$. Тогда $A \le C$. Согласно [8, табл. 4.5.1] слой L^* подгруппы C изоморфен $SL_2(q)$ и $C_K(L^*)$ — циклическая подгруппа порядка $q - \varepsilon$.

Предположим, что 2-ранг группы $C_G(L^*)$ не меньше 2, Тогда некоторая инволюция j из $G \backslash K$ централизует L^*. Допустим, что j индуцирует на K полевой или графово-полевой автоморфизм. Тогда согласно [12, (15-4)] j действует на L^* как полевой или графово-полевой автоморфизм. Отсюда следует, что $q = 9$. Ввиду [13] имеем $G \simeq U_3(9).2$ и $C = D \times C_1$, где $D \simeq D_{10}$ и $C_1 \simeq SL_2(9).2$. В подгруппе D любые две различные силовские 2-подгруппы пересекаются тривиально. Из описания множества минимальных по включению пересечений силовских 2-подгрупп в группе C_1, приведенном в лемме 5, следует, что в группе C_1 найдутся силовские 2-подгруппы Q_1 и Q_2 такие, что $Q_1 \cap Q_2 \simeq C_4$. Значит, в C найдутся силовские 2-подгруппы T_1 и T_2 такие, что $T_1 \cap T_2 \simeq C_4$. Поскольку A — 2-группа, то выбор числа $|A||B|$ показывает, что и B — 2-группа. Из теоремы Бэра — Судзуки (см. [9, теорема 2.66]) следует, что $B^g \cap Z(C) = 1$ для некоторого элемента g из G. Положим $B_1 = B^g \cap C$. Поскольку B_1 — 2-группа, без ограничения общности можно считать, что A и B_1 лежат в T_1 и T_2 соответственно. Поэтому $A \cap B_1 < T_1 \cap T_2 \cong C_4$. Но $B_1 \cap \langle z\rangle = 1$. Значит, $B_1 \cap (T_1 \cap T_2) = 1$. Следовательно, $A \cap B_1 = 1$. Но тогда и $A \cap B_1 = A \cap B^g \cap C = 1$. Противоречие с выбором числа $|A||B|$. Следовательно, можно считать, что $j = \tau$, и в любом случае $G \ge K\langle\tau\rangle$, где τ индуцирует на K графовый автоморфизм. Но это противоречит строению группы $C_K(\tau)$ (см. [8, табл. 4.5.1]).

Таким образом, 2-ранг группы $C_G(L^*)$ равен 1. По теореме Бэра — Судзуки (см. [9, теорема 2.66]) $C_G(L^*) \cap B^h = 1$ для некоторого элемента h из G. Рассмотрим подгруппу $B_1 = C \cap B^h$. В факторгруппе $\widehat{C} = C/C_G(L^*)$, изоморфной подгруппе из $\mathrm{Aut}\,(L^*)$ по лемме 5 имеем, что либо $q = 9$, либо q — простое число Мерсенна. Если q — простое число Мерсенна, то $\widehat{S} = \mathrm{min}(\widehat{A}, \widehat{B_1})$. Это означает, что A и B_1 содержат $Z(S)$, так как $|Z(S)| = 2$. Противоречие. Если же $q = 9$, то $|\widehat{S} : \mathrm{min}(\widehat{A}, \widehat{B_1})| \le 2$, причем по лемме 5 $\mathrm{min}_{\widehat{C}}(\widehat{A}, \widehat{B}_1) \simeq D_{16}$. Поэтому снова A и B_1 содержат $Z(S)$. Противоречие.

Второе утверждение леммы следует из леммы 3. □

Лемма 9. $(|A|, r) = 1$.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда $(|A|, r) \ne 1$ и, следовательно, можно взять элемент a порядка r из $Z(A)$.

Допустим, что $O_r(A)\cap K=1$. Тогда, поскольку $|\mathrm{Outdiag}(K)|=(3,q-\varepsilon)$, a индуцирует на K нетривиальный графовый, полевой или графово-полевой автоморфизм. Если $O_{r'}(C_G(a))\neq 1$, то согласно [8, теорема 7.7.1(B)] имеем $K\simeq L_3(4)$, что противоречит лемме 6. Следовательно, $O_{r'}(C_G(a))=1$. Пусть a индуцирует на K полевой или графово-полевой автоморфизм. Тогда исходя из [12, (9-5)] $C_G(O^{r'}(C_K(a)))=\langle a\rangle$. Если $O^{r'}(C_K(a))$ — разрешимая подгруппа, то, учитывая, что по лемме 6 имеем $q\geq 5$, ввиду [12, (9-1)] либо a индуцирует графово-полевой автоморфизм и $K\simeq L_3(4)$, что невозможно, либо a индуцирует на K полевой автоморфизм, и в этом случае $K\simeq U_3(4)$, что также невозможно. Следовательно, $O^{r'}(C_K(a))$ — неразрешимая подгруппа. В этом случае по теореме Бэра — Судзуки $\langle a\rangle\cap B^h=1$ для некоторого элемента h из G. К тому же согласно [12, (9-1)] централизатор $C_K(a)$ изоморфен $L_3(\sqrt[r]{q})$ или $U_3(\sqrt[r]{q})$. Поэтому для подгруппы $T=C_G(a)$ в факторгруппе $\tilde{T}=T/\langle a\rangle$ для $\tilde{A}$, $\widetilde{B_1}$, где $B_1=B^h\cap T$ по индукции и лемме 8 получаем $\min_{\tilde{T}}(\tilde{A},\widetilde{B_1}=\tilde{1})$. По лемме 1 из [7] $\min_G(A,B)=1$; противоречие.

Итак, a индуцирует на K нетривиальный графовый автоморфизм. Так как $|a|=2$, то $r=2$ и согласно [14, (9-3)] слой L^* группы $C_K(a)$ изоморфен $L_2(2^m)$. Заметим, что по [12, (15-4)] полевые или графово-полевые автоморфизмы порядка 2 группы K действуют как полевые или графово-полевые автоморфизмы соответственно и на L^*. Рассмотрим подгруппу $R=AL^*$. Поскольку $O_2(A)\cap K=1$, то $|O_2(R)|=2$. По лемме 7 в факторгруппе $A/A\cap K$ силовские подгруппы нечетного порядка циклические. К тому же $A\cap K\leq C_K(a)$. Поэтому $A_1:=C_A(L^*)=C_R(L^*)$ — абелева подгруппа. По лемме 3 имеем $A_1\cap B^g=1$ для некоторого элемента g из G, и для подгруппы $B_1=B^g\cap R$ в факторгруппе $\widehat{R}=R/A_1$ имеем $\min_{\widehat{R}}(\widehat{A},\widehat{B}_1)=\widehat{1}$. Поэтому ввиду [7, лемма 1] $\min_G(A,B)=1$. Противоречие с выбором числа $|A||B|$.

Таким образом, $O_r(A)\cap K\neq 1$. Согласно [8, следствие 3.1.4] подгруппа A лежит в $N=N_G(R)$, где N — r-скованная группа и $O_{r'}(N)=1$. Рассмотрим подгруппу $P=O_r(N)A$. Подгруппа P r-замкнута. Поэтому, ввиду [3, теорема $B2$] либо $O_r(P)\cap B^h=1$, либо $K\simeq L_3(4)$, что невозможно по лемме 6. Значит, $O_r(P)\cap B^h=1$. Так как $O_{r'}(A)$ действует точно на $O_r(P)$, то по $P\times Q$-лемме Томпсона (см. [9, предложение 4.9]) $O_{r'}(A)$ действует точно на $P_1=C_{O_r(P)}(O_r(A))$.

Предположим, что порядок группы A нечетен. Тогда согласно [15, теорема 1.1] имеем $O_{r'}(A)\cap O_{r'}(A)^t=1$ для некоторого $t\in P_1$. Без ограничения общности можно считать, что $B_1=B^h\cap P\leq O_{r'}(A)$. Так как $B_1\cap O_r(A)=1$ и $O_r(A)=(O_r(A))^t$, то $D:=B_1\cap(O_{r'}(A))\neq 1$. Поэтому $1\neq D\leq O_{r'}(A)\cap(O_{r'}(A))^t=1$; противоречие. Следовательно, порядок группы A четен.

Предположим, что $r=2$. Если $O_{r'}(A)\cap(O_{r'}(A))^t=1$ для некоторого t из P_1, то, как в предыдущем абзаце, приходим к противоречию. Поэтому $O_{r'}(A)\cap(O_{r'}(A))^t\neq 1$ для любого t из P_1. Отсюда согласно [15, теорема 1.1] $O_{r'}(A)$ содержит секцию, изоморфную $C_p\wr C_p$ для некоторого нечетного простого числа p. Из леммы 7 следует, что $p=3$ и силовская 3-подгруппа из $\overline{G}$ может быть только E_9, иначе при $r=2$ подгруппа $O_{r'}(A)$ не может содержать секцию, изоморфную $C_p\wr C_p$. Кроме того, $O_{r'}(A)\cap K$ лежит в некоторой параболической подгруппе из K с циклическими силовскими подгруппами, так что по лемме 7 и $O_{r'}(A)/O_{r'}(A)\cap K$ имеет циклические силовские подгруппы. Пусть x —элемент порядка 3 из $K\cap A$. Поскольку $x\in Z(A)$ и порядок централизатора $C_G(x)$ четен, то исходя из [8, табл. 4.1.4] $C_G(x)$ имеет слой $L^*\simeq L_2(2^n)$. Рассмотрим подгруппу $R=AL^*$. Так как $O_2(A)\cap K>1$, то для $A_1:=C_A(L^*)=C_R(L^*)$ имеем $|A_1|<|A|$. По выбору числа $|A||B|$ имеем $A_1\cap B^g=1$ для некоторого элемента g из G, а для подгруппы $B_1=B^g\cap R$ в факторгруппе $\widehat{R}=R/A_1$ имеем $\min_{\widehat{R}}(\widehat{A},\widehat{B}_1)=\widehat{1}$. Поэтому ввиду леммы 1 из [7] $\min_G(A,B)=1$. Это противоречит выбору числа $|A||B|$.

Таким образом, $r>2$ и $O_{r'}(A)$ имеет секцию, изоморфную D_8. По лемме 7 в факторгруппе $\overline{G}=G/K$ имеем $O_2(\overline{G})\xrightarrow{\sim}E_4$. Следовательно, найдется инволюция i из $Z(A)\cap A'$, лежащая в K. Согласно [8, табл. 4.5.1] слой L^* подгруппы $C_G(i)$ изоморфен $SL_2(q)$ и $C_{G_0}(L^*)$ — циклическая подгруппа порядка $q-\varepsilon$. Если 2-ранг $C_G(L^*)$ не меньше 2, то некоторая инволюция j из $G\backslash G_0$ централизует L^* и поэтому согласно [12, (9-5)] инволюция j индуцирует графовый автоморфизм на K, иначе компоненты в $C_K(j)$ определены над полем порядка $\sqrt{q}$, что невозможно. Противоречие с [8, табл. 4.5.1]. Поэтому 2-ранг $C_G(L^*)$ равен 1 и для подгруппы $M = L^*A$ получаем, что $A_1 := C_M(L^*) \leq A$ и силовские подгруппы подгруппы A_1 имеют ранга 1. По лемме 3 имеем $A_1 \cap B^h = 1$ для некоторого h из G, и для подгруппы $B_1 = B^h \cap M$ в факторгруппе $\widehat{M} = M/A_1$ имеем $\min_{\widehat{M}}(\widehat{A}, \widehat{B_1}) = \widehat{1}$ в силу того, что $2r$ делит $|A|$. Поэтому ввиду леммы 1 из [7] $\min_G(A, B) = 1$. □

Лемма 10. *Порядок группы A четен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что лемма неверна. Тогда число $|A|$ нечетно. Поэтому по лемме 8 некоторое простое число $p \geq 5$ делит $|A|$. По лемме 9 $(r, |A|) = 1$. Возьмем в $Z(A)$ элемент a порядка p.

Предположим, что $a \notin K$. Тогда a индуцирует на K нетривиальный полевой автоморфизм с $C_K(a) = L_3^{\epsilon}(\sqrt[p]{q})$. Следовательно, по [12, (9-5)] имеем $C_G(O^{r'}(C_K(a))) = \langle a \rangle$. Значит, для подгруппы $\langle a \rangle$ по теореме Бэра — Судзуки имеем $\langle a \rangle \cap B^g = 1$ для некоторого g из G. Таким образом, для $B_1 = C_G(a) \cap B^g$ в силу нечетности $|A|$ в факторгруппе $\overline{T} = C_G(a)/\langle a \rangle$ имеем $\min_{\overline{T}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$. По лемме 1 из [7] $\min_G(A, B) = 1$; противоречие. Таким образом, a является полупростым элементом из K.

Предположим, что $C_G(a)$ — неразрешимая группа. Тогда согласно [8, теорема 4.8.2] в $C_{G_0}(a)$ имеется единственная компонента $L^* \simeq L_2(q)$ или $SL_2(q)$ и $C_{G_0}(L^*)$ — абелева подгруппа. Следовательно, в подгруппе $R = AL^*$ имеем $C_1 := C_{R \cap G_0}(L^*)$ — абелева подгруппа и элементы из $A \cap G_0$ индуцируют на L^* внутренне-диагональные автоморфизмы нечетного порядка. Отсюда по лемме 3 $C_1 \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G и для подгруппы $B_1 = B^g \cap R$ в случае $A \leq G_0$ по индукции для $\widehat{R} = R/C_1$ имеем $\min_{\widehat{R}}(\widehat{A}, \widehat{B_1}) = \widehat{1}$, так как $\widehat{A}$ и $\widehat{B_1}$ имеют нечетные порядки. Отсюда по лемме 1 из [7] $\min_G(A, B) = 1$, что противоречит выбору числа $|A||B|$. Следовательно, $A \not\leq G_0$. Но если в $C_R(L^*)$ силовские подгруппы абелевы, то снова по лемме 3 имеем $C_R(L^*) \cap B^g = 1$ и, как и выше, получаем противоречие. Следовательно, в $C_R(L^*)$ есть неабелева силовская подгруппа. Поскольку $C_{G_0}(L^*)$ — абелева подгруппа, то по лемме 3 имеем $C_{G_0}(L^*) \cap B^g = 1$ для некоторого g из G. Следовательно, в разности $C_R(L^*) \setminus C_{R \cap G_0}(L^*)$ есть элемент x простого порядка t, индуцирующий на K нетривиальный полевой автоморфизм. Но это невозможно, так как $C_{G_0}(x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inndiag}(L_3^{\epsilon}(\sqrt[t]{q})$ и $\langle a \rangle * L^*$ лежит в $C_K(x)$, но поле определения компоненты L^* имеет порядок q, а в $C_{G_0}(x)$ поле определения L^* должно иметь порядок $\sqrt[t]{q}$. Противоречие. Следовательно, $C_R(L^*)$ — абелева подгруппа и, как и выше, G — не контрпример к теореме.

Значит, группа $C_{G_0}(a)$ разрешима. Если в $C_{G_0}(a)$ есть разрешимая компонента, то ввиду [16, (9.1)] $q = 2, 3$ и G — не контрпример к теореме по [7].

Поэтому $T = C_{G_0}(a)$ — максимальный тор в G_0. Если $G = G_0$, то по лемме 3 $T \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Противоречие с выбором пары (A, B). Следовательно, $G \neq G_0$. По лемме 6 $G = AK \leq AG_0$. Поэтому $G = AG_0$ и в разности $G \setminus G_0 = AG_0 \setminus G_0$ найдется элемент x простого порядка t. Так как $|x|$ нечетен, то x индуцирует нетривиальный полевой автоморфизм на K. Но $x \notin Z(A)$, иначе, согласно [12, (9-5)] $\langle x \rangle = C_G(O^t(C_K(x))$ и, как это уже подробно было доказано в лемме 9, получаем противоречие. Поэтому нильпотентность A влечет, что $O_t(A \cap T) \neq 1$ и x действует нетривиально на $O_t(A \cap T)$. С другой стороны, $C_{O_t(A \cap T)}(x) \neq 1$. Пусть x_1 — элемент порядка t из $C_{O_t(A \cap T)} \cap Z(A)$. Рассмотрим $C_{G_0}(x_1)$.

Предположим, что $\mathrm{ord}_t(q) = 1$. Тогда исходя из [8, теорема 4.8.2] для слоя L^* централизатора $C_{G_0}(x_1)$ имеем $L^* \simeq SL_2(q)$ или $L_2(q)$ и $C_{G_0}(L^*)$ — абелева подгруппа. Допустим, что в $C_G(L^*) \setminus C_{G_0}(L^*)$ есть элемент y простого порядка t_1. Согласно [12, (9-1)] и нечетности $|x|$ элемент x индуцирует нетривиальный полевой автоморфизм на L^*. Элемент y централизует подгруппу $\langle x_1 \rangle * L^*$. Но ввиду [12, (9-1)] $C_{G_0}y \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inndiag}(L_3^{\epsilon}(\sqrt[t_1]{q})$ и согласно [8, теорема 4.8.2] содержит единственную компоненту, определенную над полем порядка $\sqrt[t_1]{q}$. Противоречие с тем, что $C_{G_0}(y) \geq \langle x_1 \rangle * L^*$, где L^* определена над полем порядка q. Следовательно, $C_G(L^*)$ не содержит элементов простого порядка вне $C_{G_0}(L^*)$. Поэтому по лемме 3 имеем $C_G(L^*) \cap B^g = 1$

для некоторого элемента g из G. Тогда в подгруппе $M = N_G(L^*)$ имеем $C_M(L^*) \cap B^g = 1$ и в факторгруппе $\widehat{M} = M/C_M(L^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}\,(L^*)$ для подгруппы $B_1 = M \cap B^g$ по индукции имеем $\min_{\widehat{M}}(\overline{A}, \widehat{B_1}) = \widehat{1}$ в силу нечетности $\widehat{A}$. Следовательно, по лемме 1 из [7] $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие с выбором числа $|A||B|$.

Итак, $\mathrm{ord}_t(q) > 1$.

Допустим, что $\mathrm{ord}_t(q) = 2$. Тогда $t|(q^2-1)$ и $t \nmid (q-\varepsilon)$. Согласно [8, теорема 4.8.2] $C_{G_0}(x_1) \xrightarrow{\sim} C_{q^2-1}$, поэтому силовская t-подгруппа T_1 в торе T циклическая порядка $\geq t^2$ в силу того, что x действует нетривиально на этой подгруппе T_1. По лемме 7 силовские подгруппы нечетного порядка в $\overline{G}$ имеют простой порядок, за исключением, возможно, случая $t = 3$, когда K имеет диагональный автоморфизм порядка 3. Но в этом случае $3|(q-\epsilon)$, что в нашем случае невозможно. Поэтому силовская t-подгруппа T_0 в A имеет вид $T_0 = T_1 \leftthreetimes \langle x\rangle$.

Допустим, что подгруппа T_0 имеет класс нильпотентности 2. Так как t нечетно и в T_0 каждый элемент имеет вид $t_0 = t_1x_1$, где $t_1 \in T_1$ $x_1 \in \langle x\rangle$, то по известной формуле (см., например, [17, с. 15]) $t_0^t = t_1^t t_2^t [t_1, t_2]^t = t_1^t$. Следовательно, $\Omega_1(T_0) \neq T_0$, что противоречит лемме 7.

Если же класс группы T_0 больше 2, то достаточно взять факторгруппу $\widehat{T_0} = T_0/T_3$, где $T_3 \leq T_1$ и $\widehat{T_0}$ имеет класс два. Снова получаем, что $\Omega_1(T_0) < T_0$, что противоречит лемме 7.

Следовательно, $\mathrm{ord}_t(q) > 2$.

Так как $K \simeq L_3^\varepsilon(q)$, то $\mathrm{ord}_t(q) \leq 3$. Поэтому $\mathrm{ord}_t(q) = 3$. Значит, $t|(q^3-\varepsilon)$, причем $t \nmid (q^2-1)$. Ввиду [8, теорема 4.8.2] $T \xrightarrow{\sim} C_{q^2+\varepsilon q+1}$. Поскольку из леммы 3 следует, что $T \cap B^g = 1$, то $G \neq G_0$ и, как и в случае $\mathrm{ord}_t(q) = 2$, найдется элемент x, индуцирующий на K полевой автоморфизм порядка t. Дословно повторяя рассуждения случая $\mathrm{ord}_t(q) = 2$, получаем, что $\Omega_1(T_0) < T_0$ для $T_0 \in \mathrm{Syl}_t(A)$. Противоречие с леммой 7. □

Лемма 11. *G — не контрпример к теореме.*

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда по лемме 10 порядок $|A|$ четен, а по лемме 7 факторгруппа G/K абелева с силовскими подгруппами простого порядка, за исключением, может быть, силовской 2-подгруппы, которая вкладывается в E_4, или силовской 3-подгруппы, которая вкладывается в E_9.

Предположим, что $O_2(A) \cap G_0 = O_2(A) \cap K = 1$. Тогда инволюция $i \in Z(A)$ индуцирует на K нетривиальный полевой, графово-полевой или графовый автоморфизм.

Пусть выполняется случай графово-полевого или полевого автоморфизмов. Тогда согласно [12, (9-5)] имеем $C_G(O^{2'}(C_K(i))) = \langle i\rangle$.

Если $O^{2'}(C_K(i))$ — неразрешимая подгруппа, то $F(C_G(O^{2'}(C_K(i)))) = \langle i\rangle$. По теореме Бэра — Судзуки $\langle i\rangle \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. К тому же для подгрупп $C = C_G(i)$ и $B_1 = B^g \cap C$ в факторгруппе $\widehat{C} = C/\langle i\rangle \simeq L_3^\varepsilon(\sqrt{q})$ в силу леммы 8 число $|\widehat{A}|$ не является степенью двойки. Следовательно, по индукции $\min_{\widehat{C}}(\widehat{A}, \widehat{B_1}) = \widehat{1}$ и по лемме 1 из [7] $\min_G(A, B) = 1$, что противоречит выбору пары (A, B). Поэтому $O^{2'}(C_K(i))$ — разрешимая подгруппа. Если инволюция i индуцирует на K графово-полевой автоморфизм, то исходя из [12, (9-5)] имеем $K \simeq L_3(4)$, что невозможно по лемме 6. Если i индуцирует на K полевой автоморфизм, то $K \simeq U_3(4)$, что также невозможно по лемме 6.

Значит, инволюция i индуцирует на K графовый автоморфизм и, следовательно, по лемме 9 имеем $r > 2$. Так как по лемме 6 $q = r^m \geq 5$, то по [8, табл. 4.5.1] $O^{2'}(C_K(i))$ — неразрешимая подгруппа, что, как и выше, приводит к противоречию с выбором пары (A, B).

Таким образом, $O_2(A) \cap K \neq 1$. С учетом [8, табл. 4.5.1] в K один класс инволюций, можно считать, что инволюция a из $Z(O_2(A) \cap K)$ лежит в $Z(S)$ для $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Поскольку по лемме 9 $r > 2$, а по лемме 6 $q = r^m \geq 5$, то по [8, табл. 4.5.1] слой L^* подгруппы $C_{G_0}(a)$ изоморфен квазипростой группе $SL_2(q)$ и $C_{G_0}(L^*)$ — циклическая группа порядка $q - \varepsilon$.

Рассмотрим подгруппы $R = L^*A$, $A_0 = C_A(L^*)$ и $R_0 = C_R(L^*)$. По определению $R_0 \geq A_0$. Поскольку образ подгруппы R_0 в факторгруппе R/L^* нильпотентен и подгруппа R_0 нормальна в R, то подгруппа R_0 нильпотентна. Если $|R_0| < |A|$, то по выбору числа $|A||B|$ имеем

$R_0 \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Далее, рассуждения последнего абзаца из доказательства леммы 8 показывают, что G — не контрпример к теореме. Поэтому $|R_0| \geq |A|$. Но $R_0 = A_0 Z(L^*)$, где $|Z(L^*)| = 2$. Поэтому $|R_0| \leq 2|A_0|$. Значит, $|A| \leq |R_0| \leq 2|A_0|$, откуда $|A : A_0| \leq 2$. Последнее неравенство влечет, что $O(A) \leq A_0$. По лемме 8 $O(A) \neq 1$, и согласно [8, табл. 4.5.1] и [12, (5-4)] $O(A) \leq C_{G_0}(L^*)$ и любая инволюция из $C_{G_0}(L^*) \setminus Z(L^*)$ инвертирует $O(A)$. Поэтому $C_R(L^*) = C_{G_0}(L^*) = O(A)Z(L^*)$. Так как группа $O_2(A)$ неабелева, то можно считать, что $\langle i \rangle = Z(L^*)$ и $G/G_0 \simeq E_4$. Но тогда по [12, (9-1)] некоторая инволюция f из $G \setminus G_0$ индуцирует на K нетривиальный полевой автоморфизм и, следовательно, по [12, (5-4)] f действует нетривиально на L^*. Но тогда $|R_0| < |A|$; противоречие. □

Приведенная выше лемма 11 завершает доказательство теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Isaacs I.M.** Finite group theory. Providence, RI: AMS, 2008. 350 p.
2. **Мазуров В.Д., Зенков В.И.** О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 424–432.
3. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фунд. и прикл. математика. 1994. Т. 56. С. 1–91.
4. Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook [e-resource]. No. 19. Novosibirsk. 2018. 250 p. URL: http://math.nsc.ru/~alglog/19tkt.pdf .
5. **Курмазов Р.К.** О пересечении сопряженных нильпотентных подгрупп в группах подстановок // Сиб. мат. журн. 1913. Т. 54, № 1. С. 98–104.
6. **Зенков В.И.** О пересечениях двух нильпотентных подгрупп в конечных группах с цоколем $L_2(q)$ // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1280–1290.
7. **Зенков В.И.** О пересечениях примарных подгрупп в неразрешимых конечных группах с цоколем, изоморфным $L_n(2^m)$ // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 337–344.
8. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups, Number 3. Providence, RI: AMS, 1998. 420 p.
9. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
10. **Зенков В.И.** О пересечении абелевой и нильпотентной подгрупп в конечной группе. II // Мат. заметки. 2019. Т. 105, № 3. С. 383–394.
11. **Зенков В.И.** О пересечении двух нильпотентных подгрупп в небольших конечных группах // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1099–1115.
12. **Gorenstein D., Lyons R.** The local structure of finite groups of characteristic 2 type // Mem. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 42. P. 1–731.
13. Atlas of finite group / Conway J. H. [et. al.] Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
14. **Aschbacher M., Seitz G.** Involutions in Chevalley groups over fields of even order // Nagoya Math. J. 1974. Vol. 60. P. 1–91.
15. **Yong Yang.** Regular orbits of nilpotent subgroups of solvable linear groups // J. Algebra. 2011. Vol. 325, no. 1. P. 56–69.
16. **Aschbacher M.** Overgroups of Sylow subgroups in sporadic groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 60, no. 343. P. 1–235. 10.1090/memo/0343
17. **Гаген Т.** К теории конечных групп. Некоторые вопросы теории конечных групп. М.: Мир, 1979. С. 13–96.

Поступила 22.09.2020
После доработки 20.12.2020
Принята к публикации 11.01.2021

Зенков Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет
e-mail: v1i9z52@mail.ru

REFERENCES

1. Isaacs I.M. *Finite group theory.* Providence, RI: AMS, 2008. 350 p.
2. Mazurov V.D., Zenkov V.I. The intersection of Sylow subgroups in finite groups. *Algebra and Logic*, 1996, vol. 35, no. 4, pp. 236–240.
3. Zenkov V.I. Intersections of nilpotent subgroups in finite groups. *Fund. i Prikl. Matematika*, 1994, vol. 56, pp. 1–91 (in Russian).
4. *Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook.* No. 19. Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2018, 250 p. Available on: `http://math.nsc.ru/~alglog/19tkt.pdf` .
5. Kurmazov R.K. On the intersection of conjugate nilpotent subgroups in permutation groups. *Siberian Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 73–77. doi: 10.1134/S0037446613010102 .
6. Zenkov V.I. Intersections of two nilpotent subgroups in finite groups with socle $L_2(q)$. *Siberian Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 6, pp. 1002–1010. doi: 10.1134/S0037446616060070 .
7. Zenkov V.I. Intersections of primary subgroups in nonsoluble finite groups isomorphic to $L_n(2^m)$. *Siberian Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 2, pp. 264–269. doi: 10.1134/S0037446618020088 .
8. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups, Number 3. Providence, RI: AMS, 1998. 420 p.
9. Gorenstein D., *Finite simple groups. An introduction to their classification.* N Y; London: Plenum Press, 1982, 352 p.
10. Zenkov V.I. On intersections of abelian and nilpotent Subgroups in finite groups. II, *Math. Notes*, 2019, vol. 105, no. 3, pp. 366–375. doi: 10.1134/S0001434619030076 .
11. Zenkov V.I. On intersections of two nilpotent subgroups in small finite groups. *Sib. Elektron. Math. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 1099–1115 (in Russian).
12. Gorenstein D., Lyons R. The local structure of finite groups of characteristic 2 type. *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 42, 1983, pp. 1–731. doi: 10.1090/memo/0276 .
13. *Atlas of finite group* / Conway J. H. [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p.
14. Aschbacher M., Seitz G. Involutions in Chevalley groups over fields of even order. *Nagoya Math. J.*, 1974, vol. 60, pp. 1–91.
15. Yang Y. Regular orbits of nilpotent subgroups of solvable linear groups. *J. Algebra*, 2011, vol. 325, no. 1, pp. 56–69.
16. Aschbacher M. Overgroups of Sylow subgroups in sporadic groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1986, vol. 60, no. 343. pp. 1–235. doi: 10.1090/memo/0343 .
17. Gagen T. *Topics in finite groups.* Cambridge: Cambridge University Press, 1976, 83 p.

Received September 22, 2020
Revised December 20, 2020
Accepted January 11, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00456) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Zenkov Victor Ivanovich, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, 620000 Russia, e-mail: v1i9z52@mail.ru .

Cite this article as: V. I. Zenkov. On the intersections of nilpotent subgroups in finite groups with socle $L_3(q)$ or $U_3(q)$, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 70–78 .