ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 512.54

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ГРУППЫ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННОЙ ЛИНЕЙНЫМИ И УНИТАРНЫМИ ГРУППАМИ СТЕПЕНИ 3 НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ ЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ[1]

А. А. Шлепкин

Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Если все элементы конечных порядков из группы G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G и обозначается через $T(G)$. Напомним, что группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе нормализатора по ней любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. Группа Шункова не обязана обладать периодической частью. В работе доказано, что группа Шункова, насыщенная конечными линейными и унитарными группами степени 3 над конечными полями характеристики 2, обладает периодической частью, которая изоморфна либо линейной, либо унитарной группе степени 3 над подходящим локально конечным полем характеристики 2.

Ключевые слова: группы с условиями насыщенности, группа Шункова, периодическая часть группы.

A. A. Shlepkin. On the periodic part of a Shunkov group saturated with linear and unitary groups of degree 3 over finite fields of odd characteristic.

Let G be a group, and let $\mathfrak{X}$ be a set of groups. A group G is saturated with groups from the set $\mathfrak{X}$ if any finite subgroup of G is contained in a subgroup of G isomorphic to some group from $\mathfrak{X}$. If all elements of finite orders from G are contained in a periodic subgroup $T(G)$ of G, then $T(G)$ is called the periodic part of G. A group G is called a Shunkov group if, for any finite subgroup H of G, in $G/N(G)$ any two conjugate elements of prime order generate a finite group. A Shunkov group may have no periodic part. It is proved that a Shunkov group saturated with finite linear and unitary groups of degree 3 over finite fields of characteristic 2 has a periodic part, which is isomorphic to either a linear or a unitary group of degree 3 over a suitable locally finite field of characteristic 2.

Keywords: groups with saturation conditions, Shunkov group, periodic part of a group.

MSC: 20K01

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-207-219

Введение

Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$ (множество $\mathfrak{X}$ будем называть *насыщающим множеством* для G) [14]. Если все элементы конечных порядков из G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется *периодической частью группы* G и обозначается через $T(G)$ [2, с. 90]. Напомним, что группа G называется *группой Шункова* (сопряженно-бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [6]. Отметим, что группа Шункова не обязана обладать периодической частью [11]. В работах [7–9] рассмотрен вопрос существования периодической части в группе Шункова при некоторых дополнительных ограничениях (слойная конечность). В [3] доказано, что периодическая группа G (в частности, периодическая группа Шункова), насыщенная группами $L_3(2^n)$, локально конечна и изоморфна $L_3(P)$, где P — подходящее локально конечное поле характеристики 2.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 19-71-10017).

В статье [17] доказано, что группа Шункова G, насыщенная группами $U_3(2^n)$, обладает периодической частью, которая локально конечна и изоморфна $U_3(P)$, где P — подходящее локально конечное поле характеристики 2.

В настоящей работе устанавливается структура группы Шункова с насыщающим множеством

$$\mathfrak{M} = \{L_3(2^n), U_3(2^m) \mid \ n, m \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1,\ m \geqslant 2\}.$$

Теорема. *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна либо $L_3(Q)$, либо $U_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2.*

Пусть G — группа, K — подгруппа G, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 — единичная подгруппа группы G, то через $\mathfrak{X}_G(1)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$ и соответственно вместо $\mathfrak{X}_G(1)$ будем писать $\mathfrak{X}(1)$.

1. Некоторые свойства группы $L_3(2^n)$

Для доказательства основной теоремы статьи приведем известные свойства группы $L_3(2^n)$, которые ранее были выписаны, например, в [3, § 1] с опорой на классические работы Р. В. Картера (1972), Б. Хупперта (1979) и М. Ашбахера (2000).

Пункты 1–4 предложения 1 соответствуют пп. 1–4 из [3, § 1]; п. 5 доказывается непосредственными вычислениями; пп. 6–8 являются следствием п. 5 из [3, § 1]; пп. 9, 10 предложения 1 — это пп. 6, 7 из [3, § 1]; п. 11 предложения 1 — это п. 8 из [3, § 1]; пп. 12, 13 предложения 1 — следствие п. 9 из [3, § 1]; пп. 14, 15 предложения 1 — следствие п. 10 из [3, § 1].

Предложение 1. *Пусть F — поле порядка $q = 2^m, m \geqslant 1, S = SL_3(F) = SL_3(q)$ — группа матриц размерности 3 над F с определителем, равным 1. Тогда*

1. *Центр C группы S состоит из скалярных матриц, $|C| = (3, q-1)$.*

2. *Группа $L = L_3(F) = L_3(q) = S/C$ — простая группа, имеющая порядок*

$$q^3(q^3-1)(q^2-1)/(3, q-1).$$

Пусть $T = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \, \alpha, \beta, \gamma \in F \right\}$ — группа верхних унитреугольных матриц из S.

3. *T — силовская 2-подгруппа порядка q^3 из S. Центр T — это элементарная абелева подгруппа $Z = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \, \gamma \in \ F \right\}$ порядка q, которая одновременно является коммутантом и подгруппой Фраттини группы T . В частности, T двуступенно нильпотентна, период группы T равен 4.*

4. *Любая инволюция из T содержится либо в подгруппе $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \, \alpha, \gamma \in \ F \right\}$, либо в подгруппе $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \, \beta, \gamma \in \ F \right\}$, каждая из которых является элементарной абелевой подгруппой порядка q^2, инвариантной в $N_S(T)$. При этом*

$$A \cap B = Z, \quad AB = T, \quad A = A_Z \times Z, \quad A_Z = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \, \alpha \in F \right\}, \quad B = B_Z \times Z,$$

где $B_Z = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \, \alpha \in F \right\}$. Если X — любая из подгрупп A, B и $x \in X \setminus Z$, то $C_T(x) = X$. Кроме того, $S = \langle N_S(A), N_S(B) \rangle$.

5. *Если элемент y из группы T имеет порядок 4, то $y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, где $\alpha, \beta \in F \setminus \{0\}$, а $\gamma \in F$. $C_T(y) = \langle y \rangle Z(T)$. Если элемент y перестановочен с некоторой инволюцией $x \in T$, то $x \in Z$.*

6. *Пусть* $U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1}\beta^{-1} \end{smallmatrix} \right) \Big| \, \alpha, \beta \in F \setminus \{0\} \right\}$. *Тогда* $U = V \times W_A = V \times W_B$. *Здесь*

$$V = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right) \Big| \, \alpha \in F \backslash \{0\} \right\}, \ \ W_A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{smallmatrix} \right) \Big| \, \beta \in F \backslash \{0\} \right\}, \ \ W_B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \beta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \Big| \, \beta \in F \backslash \{0\} \right\},$$

где V, W_A, W_B *— циклические группы порядка* $q-1$.

$\overline{U} = U/C = \overline{V} \times \overline{W_A} = \overline{V} \times \overline{W_B}$, *где* $\overline{W_A} = W_A C/C, \overline{W_B} = W_B C/C$ *— циклические группы порядка* $q-1$, $\overline{V} = VC/C$ *есть циклическая группа порядка* $(q-1)/(3, q-1)$.

7. $U = H_A \times W_A$ *— прямое произведение двух циклических групп порядка* $q-1$,

$$H_A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right) \Big| \, \alpha \in F \setminus \{0\} \right\}, \quad W_A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{smallmatrix} \right) \Big| \, \beta \in F \setminus \{0\} \right\}.$$

$\overline{U} = U/C = \overline{H_A} \times \overline{W_A}$ *— прямое произведение циклической группы* $\overline{W_A} = W_A C/C$ *порядка* $q-1$ *и циклической группы* $\overline{H_A} = H_A C/C$ *порядка* $(q-1)/(3, q-1)$.

8. $U = H_B \times W_B$ *— прямое произведение двух циклических групп порядка* $q-1$,

$$H_B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-2} \end{smallmatrix} \right) \Big| \, \alpha \in F \setminus \{0\} \right\}, \quad W_B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \beta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \Big| \, \beta \in F \setminus \{0\} \right\}.$$

$\overline{U} = U/C = \overline{H_B} \times \overline{W_B}$ *— прямое произведение циклической группы* $\overline{W_B} = W_B C/C$ *порядка* $q-1$ *и циклической группы* $\overline{H_B} = H_B C/C$ *порядка* $(q-1)/(3, q-1)$.

9. *При естественном гомоморфизме* S *на* L *образ* $\overline{T}$ *группы* T *изоморфен* T *(мы будем отождествлять* T *и* $\overline{T}$ *), и* $N_L(T) = T\overline{U}$. *Если* $q > 4$, *то* $C_L(\overline{U}) = \overline{U}$.

10. *Если* $1 \neq z$ *— элемент из* Z, *то* $C_L(z) = C_L(Z) = T \leftthreetimes \overline{V}$, $\overline{V}$ *нормализует* T, A_Z, B_Z, *централизует* Z, *каждый нетривиальный элемент из* $\overline{V}$ *действует на* $A_Z, B_Z, T/Z$ *при сопряжении без неподвижных точек.*

11. *Любая инволюция из группы* L *сопряжена с инволюцией из* Z. *В частности, централизатор любой инволюции из* L *содержит ровно одну силовскую* 2*-подгруппу из* L. *Для любой нетривиальной подгруппы* Z_1 *из* Z *справедливо включение* $N_L(Z_1) \leqslant N_L(T)$.

12. $N_L(T) = T \leftthreetimes (\overline{H_A} \times \overline{W_A})$, *где* $\overline{W_A}$ *нормализует* A, Z, A_Z *и действует регулярно и транзитивно на* Z, A_Z, $\overline{H_A}$ *нормализует* A, Z, A_Z, *действует регулярно на* Z, A_Z *и централизует* B_Z.

13. $N_L(T) = T \leftthreetimes (\overline{H_B} \times \overline{W_B})$, *где* $\overline{W_B}$ *нормализует* B, Z, B_Z *и действует регулярно и транзитивно на* Z, B_Z, $\overline{H_B}$ *нормализует* B, Z, B_Z, *действует регулярно на* Z, B_Z *и централизует* A_Z.

14. $N_L(A) = A \leftthreetimes (F_A \times \overline{H_A})$ *— максимальная подгруппа в* L, *где*

$$F_A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{smallmatrix} \right) \Big| \, \alpha, \gamma, \beta, \delta \in \ F \right\}, F_A \simeq L_2(q), W_A < F_A, B_Z < F_A, T = A \leftthreetimes B_Z, N_L(T) < N_L(A).$$

Для любого $1 \neq \overline{h} \in \overline{H_A}$ *имеем* $C_L(\overline{h}) = F_A \times \overline{H_A}$.

15. $N_L(B) = B \leftthreetimes (F_B \times \overline{H_B})$ *— максимальная подгруппа в* L, *где*

$$F_B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \Big| \, \alpha, \gamma, \beta, \delta \in \ F \right\}, F_B \simeq L_2(q), W_B < F_B, A_Z < F_B, T = B \leftthreetimes A_Z, N_L(T) < N_L(B).$$

Для любого $1 \neq \overline{h} \in \overline{H_B}$ *имеем* $C_L(\overline{h}) = F_B \times \overline{H_B}$.

2. Доказательство теоремы

Предположим, что теорема неверна. В дальнейшем группа G — контрпример к утверждению теоремы. Положим $\mathfrak{A} = \{L_3(2^n) \mid n = 1, 2, \ldots\}$, $\mathfrak{B} = \{U_3(2^n) \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Тогда $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$ — насыщающее множество для группы G. Поскольку G — контрпример, то $\mathfrak{M}(1) \neq \varnothing$ и G — не периодическая группа.

Лемма 1. *Группа G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. Если G содержит конечное множество элементов конечного порядка, то по лемме Дицмана [1] и условию насыщенности G обладает конечной периодической частью $T(G) \mathrel{\widetilde{\in}} \{L_3(2^n), U_3(2^m)\}$ для подходящих $n,\ m$. Противоречие с выбором G. Следовательно, G содержит бесконечно много элементов конечного порядка, и по [15, лемма 1] группа G содержит бесконечную локально конечную подгруппу. □

Рассмотрим три взаимоисключающих варианта структуры $\mathfrak{M}(1)$.

Вариант I. $\mathfrak{A}(1) = \varnothing,\ \mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$.

В этом варианте $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{B}(1)$ — насыщающее множество для группы G и по [17, теорема 1.5] G обладает периодической частью $T(G)$, которая локально конечна и изоморфна $U_3(P)$, где P — подходящее локально конечное поле характеристики 2.

Противоречие с тем, что группа G — контрпример. □

Вариант II. $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing,\ \mathfrak{B}(1) = \varnothing$.

Ввиду теоремы, доказанной в работе автора 2019 г. (О силовских 2-подгруппах групп Шункова, насыщенных группами $L_3(2^n)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 275–282), справедлива

Лемма 2. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда*

1. *S — бесконечная локально конечная группа периода 4.*
2. *S двуступенно нильпотентна, $Z = Z(S) = S'$ — группа периода 2.*
3. *Для любого $x \in S,\ x^2 \in Z$.*
4. *Пусть z — инволюция из G. Тогда $C_G(z)$ обладает единственной силовской 2-подгруппой.*
5. *Силовские 2-подгруппы в группе G сопряжены с S.*
6. *Группа $N = N_G(S)$ обладает счетной периодической частью $T = T(N) = S \leftthreetimes P$, где группа P — локально конечная абелева группа ранга 2 без инволюций.*
7. *Подгруппа T насыщена группами из множества $\mathfrak{A}_N = \{N_M(S_M) \mid M \in \mathfrak{A}(1), S_M \in Syl_2(M)\}$.*

В дальнейшем, если не оговорено особо, под $T,\ P,\ S$ будут пониматься подгруппы из условия и утверждений леммы 2.

Лемма 3. *Существует последовательность подгрупп $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ группы G такая, что для нее имеют место следующие свойства.*

1. *Для любого n существует k_n такое, что $M_n \simeq L_3(2^{k_n})$.*
2. *$S_{M_1} < S_{M_2} < \ldots < S_{M_n} < \ldots$ для некоторых силовских 2-подгрупп S_{M_n} из M_n.*
3. *$S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_{M_n}$ — силовская 2-подгруппа группы G.*
4. *$Z(S_{M_1}) < Z(S_{M_2}) < \ldots < Z(S_{M_n}) < \ldots$.*
5. *$Z = Z(S) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z(S_{M_n})$.*
6. *$N_{M_1}(S_{M_1}) < N_{M_2}(S_{M_2}) < \ldots < N_{M_n}(S_{M_n}) < \ldots$.*
7. *$T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(S_{M_n})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем инволюцию $z \in Z$. По условию насыщенности $\langle z\rangle < M_1 \in \mathfrak{A}(1)$. Пусть S_{M_1} — силовская 2-подгруппа из M_1, содержащая инволюцию z в своем центре (п. 11 предложения 1). Согласно пп. 4, 6 леммы 2 $N_{M_1}(S_{M_1}) < T = \{c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots\}$ — бесконечная счетная локально конечная группа. Следовательно, для любого натурального m_1 $\langle N_{M_1}(S_{M_1}), c_1, c_2, \ldots, c_{m_1}\rangle$ — конечная группа. Выберем элемент $c_{m_1} \in N \setminus N_{M_1}(S_{M_1})$ с минимально возможным значением номера m_1. Поскольку N — локально конечная группа, то $\langle N_{M_1}(S_{M_1}), c_{m_1}\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle N_{M_1}(S_{M_1}), c_{m_1}\rangle < M_2 \in \mathfrak{A}(1)$. Пусть S_{M_2} — силовская 2-подгруппа из M_2, содержащая S_{M_1}. Тогда $S_{M_1} < S_{M_2}$, $Z(S_{M_1}) < Z(S_{M_2})$ и по п. 11 предложения 1 $N_{M_1}(S_{M_1}) < N_{M_2}(S_{M_2})$. Действуя подобным образом, получаем последовательность $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, обладающую требуемыми свойствами, перечисленными в пп. 1–7 заключения леммы. □

Определим множество значений индекса $i \in \{1, 2\}$.

Лемма 4. *Для групп цепочки $S_{M_1} < S_{M_2} < \ldots < S_{M_n} < \ldots$ имеют место следующие свойства.*

1. $S_{M_n} = S^{(1)}_{M_n} S^{(2)}_{M_n} = S^{(2)}_{M_n} S^{(1)}_{M_n}$, *где* $S^{(1)}_{M_n}, S^{(2)}_{M_n}$ *— максимальные элементарные абелевы подгруппы из* S_{M_n}.
2. $S^{(1)}_{M_n} \cap S^{(2)}_{M_n} = Z(S_{M_n})$.
3. $S^{(1)}_{M_n} = S^{(1)}_{M_n\,Z(S_{M_n})} \times Z(S_{M_n})$.
4. $S^{(2)}_{M_n} = S^{(2)}_{M_n\,Z(S_{M_n})} \times Z(S_{M_n})$.
5. *Любая элементарная абелева подгруппа из* S_{M_n} *содержится либо в* $S^{(1)}_{M_n}$, *либо в* $S^{(2)}_{M_n}$.
6. $S_{M_n} = S^{(1)}_{M_n} \leftthreetimes S^{(2)}_{M_n\,Z(S_{M_n})} = S^{(2)}_{M_n} \leftthreetimes S^{(1)}_{M_n\,Z(S_{M_n})}$.
7. $N_{M_n}(S_{M_n}) < N_{M_n}(S^{(i)}_{M_n})$.
8. $S^{(i)}_{M_1} < S^{(i)}_{M_2} < \ldots < S^{(i)}_{M_n} < \ldots$.
9. *Без ограничения общности можно считать, что*

$$S^{(i)}_{M_1\,Z(S_{M_1})} < S^{(i)}_{M_2\,Z(S_{M_2})} < \ldots < S^{(i)}_{M_n\,Z(Z_{M_n})} < \ldots .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Группы S_{M_n} определены и зафиксированы в п. 2 леммы 3. По условию насыщенности $M_n \simeq L = L_3(2^{k_n})$ (L — группа из п. 2 предложения 1). В соответствии с п. 4 предложения 1 и определением $S^{(1)}_{M_n}, S^{(2)}_{M_n}$ как максимальных элементарных абелевых подгрупп из силовской 2-подгруппы S_{M_n} группы M_n (п. 1 заключения леммы), положив (в обозначениях п. 4 предложения 1)

$$S^{(1)}_{M_n} \simeq A, \quad S^{(2)}_{M_n} \simeq B, \quad S_{M_n} \simeq T, \quad Z(S_{M_n}) \simeq Z, \quad S^{(1)}_{M_n\,Z(S_{M_n})} \simeq A_Z, \quad S^{(2)}_{M_n\,Z(S_{M_n})} \simeq B_Z,$$

получаем доказательство свойств, сформулированных в пп. 1–5 утверждения леммы.

Свойства, сформулированные в пп. 6, 7 — непосредственное следствие (в введенном выше соответствии между погруппами силовской 2-подгруппы группы L из п. 2 предложения 1 и подгруппами группы силовской 2-подгруппы S_{M_n} группы M_n) утверждений, приведенных в пп. 14–15 предложения 1.

Свойство, сформулированное в п. 8 утверждения леммы, вытекает из п. 4 леммы 3 и свойств, сформулированных в пп. 2–5 утверждения леммы, установленных выше.

Докажем свойство, сформулированное в п. 9 утверждения леммы. По п. 2 леммы 3 $S_{M_1} < S_{M_2}$. Согласно п. 1 утверждения леммы $S_{M_1} = S^{(1)}_{M_1} S^{(2)}_{M_1} < S_{M_2} = S^{(1)}_{M_2} S^{(2)}_{M_2}$, Следовательно,

$$S^{(i)}_{M_1} = S^{(i)}_{M_1\,Z(S_{M_1})} \times Z(S_{M_1}) < S^{(i)}_{M_2} = S^{(i)}_{M_2\,Z(S_{M_2})} \times Z(S_{M_2}).$$

Поскольку $Z(S_{M_1}) < Z(S_{M_2}) < \ldots < Z(S_{M_n}) < \ldots$ (п. 4 леммы 3), то $S^{(i)}_{M_1\,Z(S_{M_1})} \cap Z(S_{M_n}) = 1$ для любого n, в частности $S^{(i)}_{M_1\,Z(S_{M_1})} \cap Z(S_{M_2}) = 1$. В этом случае $S^{(i)}_{M_2} = S^{(i)}_{M_2\,Z(S_{M_2})} \times Z(S_{M_2})$

содержит элементарную абелеву подгруппу $C^{(i)}$ такую, что $S^{(i)}_{M_2} = S^{(i)}_{M_2\,Z(S_{M_2})} \times Z(S_{M_2}) = C^{(i)} \times Z(S_{M_2})$ и $S^{(i)}_{M_1\,Z(S_{M_1})} < C^{(i)}$. Возьмем в качестве группы $S^{(i)}_{M_2\,Z(S_{M_2})}$ группу $C^{(i)}$. Далее, рассуждая по индукции, получаем доказательство свойства, сформулированого в п. 9 утверждения леммы. □

Лемма 5. *Имеют место следующие свойства группы S.*

1. $S^{(i)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(i)}_{M_n}$ *— максимальные элементарные абелевы подгруппы группы S.*
2. $S = S^{(1)}S^{(2)} = S^{(2)}S^{(1)}$.
3. $S^{(1)} \cap S^{(2)} = Z$.
4. $S^{(i)} = S^{(i)}_Z \times Z$, *где* $S^{(i)}_Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(i)}_{M_n\,Z(S_{M_n})}$.
5. $S = S^{(1)} \leftthreetimes S^{(2)}_Z = S^{(2)} \leftthreetimes S^{(1)}_Z$.
6. *Любая элементарная абелева подруппа из S лежит либо в $S^{(1)}$, либо в $S^{(2)}$.*
7. $T = T(N) < N_G(S^{(i)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Предположим, что $S^{(i)}$ — не максимальная элементарная абелева подгруппа группы S. Тогда существует инволюция $t \in S$ такая, что $S^{(i)} \times \langle t \rangle$ — элементарная абелева подгруппа группы S, содержащая $S^{(i)}$ в качестве собственной подгруппы. Ввиду пп. 2, 3 леммы 3 $t \in S_{M_n}$ для некоторой группы S_{M_n}. По пп. 5, 8 леммы 4 $t \in S^{(i)}$. Противоречие с выбором t.

2. По п. 3 леммы 3 $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{M_n}$. Согласно пп. 1, 8 леммы 4 и п. 1 леммы, доказанному выше,

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(1)}_{M_n} S^{(2)}_{M_n} = S^{(1)}S^{(2)}, \quad S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(2)}_{M_n} S^{(1)}_{M_n} = S^{(2}S^{(1)}.$$

Следовательно, $S = S^{(1)}S^{(2)} = S^{(2)}S^{(1)}$.

3. По п. 2 леммы 4 $S^{(1)}_{M_n} \cap S^{(2)}_{M_n} = Z(S_{M_n})$. Исходя из пп. 4, 5 леммы 3 $Z \le S^{(1)} \cap S^{(2)}$. Докажем обратное включение. Пусть $1 \ne x \in S^{(1)} \cap S^{(2)} \setminus Z$. Согласно пп. 1, 2 леммы 4 $x \in\ S_{M_n} = S^{(1)}_{M_n} S^{(2)}_{M_n}$. По пп. 1, 2 леммы, установленным выше, $x \in\ S^{(1)}_{M_n} \cap S^{(2)}_{M_n} = Z(S_{M_n}) < Z$ для некоторой группы S_{M_n}. Противоречие с выбором x. Отсюда, $S^{(1)} \cap S^{(2)} = Z$.

4. Ввиду п. 1 леммы, доказанному выше, $S^{(i)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(i)}_{M_n}$. По пп. 3, 4 леммы 4 $S^{(i)}_{M_n} = S^{(i)}_{M_n\,Z(S_{M_n})} \times Z(S_{M_n})$. По п. 9 леммы 4 $S^{(i)}_{M_1\,Z(S_{M_1})} < S^{(i)}_{M_2\,Z(S_{M_2})} < \ldots < S^{(i)}_{M_n\,Z(Z_{M_n})} < \ldots$. Согласно пп. 4, 5 леммы 3

$$Z(S_{M_1}) < Z(S_{M_2}) < \ldots < Z(S_{M_n}) < \ldots, \quad Z = Z(S) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z(S_{M_n}).$$

Значит, $S^{(i)} = S^{(i)}_Z \times Z$.

5. По п. 2 леммы, доказанному выше, $S = S^{(1)}S^{(2)} = S^{(2)}S^{(1)}$. По п. 4 леммы $S^{(i)} = S^{(i)}_Z \times Z = S^{(1)}$. Следовательно, $S = S^{(1)}S^{(2)} = S^{(1)}(S^{(2)}_Z \times Z) = S^{(1)} \leftthreetimes S^{(2)}_Z$. Аналогично показывается, что $S = S^{(2)}S^{(1)} = S^{(2)} \leftthreetimes S^{(1)}_Z$.

6. Пусть X — элементарная абелева подгруппа из S. Без ограничения общности будем считать X — максимальной в указанном смысле. Покажем, что X совпадает либо с $S^{(1)}$, либо с $S^{(2)}$. Предположим обратное — $X \ne S^{(1)}$ и $X \ne S^{(2)}$. Возьмем $t_1 \in X \setminus S^{(1)}$, $t_2 \in X \setminus S^{(2)}$. Группа $\langle t_1, t_2 \rangle$, как подгруппа X, конечна и элементарная абелева. Отсюда либо $\langle t_1, t_2 \rangle \le S^{(1)}_n$, либо $\langle t_1, t_2 \rangle \le S^{(2)}_n$ для некоторого n. По п. 1 леммы $S^{(1)}_n < S^{(1)}$, $S^{(2)}_n < S^{(2)}$. В этом случае либо $\langle t_1, t_2 \rangle \le S^{(1)}$, либо $\langle t_1, t_2 \rangle \le S^{(2)}$, что невозможно в силу выбора инволюций t_1, t_2.

7. Так как $Z < S^{(1)}$, то ввиду п. 2 леммы 2 $S^{(1)}$ — нормальная подгруппа в S. Возьмем в группе T неединичный элемент x нечетного порядка. Тогда ${S^{(1)}}^x$ — максимальая элементарная

абелева подгруппа из S. По п. 6 леммы, доказанному выше, либо ${S^{(1)}}^x = S^{(1)}$, либо ${S^{(1)}}^x = S^{(2)}$. Предположим, что имеет место второй случай — ${S^{(1)}}^x = S^{(2)}$. В силу нечетности порядка элемента x имеем ${S^{(1)}}^{x^2} = S^{(2)}$. Но тогда ${S^{(1)}}^{x^2} = {S^{(1)}}^x$. Следовательно, ${S^{(1)}}^x = S^{(1)}$. $\square$

Определим множество значений индекса $j \in \{1, 2\} \setminus i$.

Лемма 6. *Структура нормализатора силовской 2-подгруппы S_{M_n} в группе M_n следующая :*

$$N_{M_n}(S_{M_n}) = (S^{(i)}_{M_n} \leftthreetimes S^{(j)}_{M_n\,Z(S_{M_n})}) \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{M_n}} \times W_{S^{(i)}_{M_n}})),$$

где $H_{S^{(i)}_{M_n}}$ — циклическая группа порядка $(2^{k_n}-1)/(3, 2^{k_n}-1)$, действующая регулярно на $S^{(i)}_{M_n}$ и централизующая группу $S^{(j)}_{M_n\,Z(S_{M_n})} \leftthreetimes W_{S^{(i)}_{M_n}}$; $W_{S^{(i)}_{M_n}}$ — циклическая группа порядка $(2^{k_n}-1)$, действующая регулярно и транзитивно на $Z(S_{M_n})$, $S^{(j)}_{M_n\,Z(S_{M_n})}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая соответствие, введенное в доказательстве леммы 4, между обозначениями подгрупп группы L из п. 2 предложения 1 и обозначениями подгрупп группы S_{M_n} и дополнительно положив $\overline{H_A} \simeq H_{S^{(1)}_{M_n}}$, $\overline{H_B} \simeq H_{S^{(2)}_{M_n}}$, $\overline{W_A} \simeq W_{S^{(1)}_{M_n}}$, $\overline{W_B} \simeq W_{S^{(2)}_{M_n}}$ (группы $\overline{H_A}, \overline{H_B}, \overline{W_A}, \overline{W_B}$ из пп. 7, 8 предложения 1), получаем, что утверждение леммы имеет место по п. 4 леммы 4 и пп. 12, 13 предложения 1. $\square$

Лемма 7. *Без ограничения общности можно считать, что $P = (H_{S^{(i)}} \times W_{S^{(i)}})$, где $H_{S^{(i)}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{S^{(i)}_{M_n}}$ — максимальная локально циклическая подгруппа без инволюций из $T < N_G(S^{(i)})$ с тем свойством, что она действует регулярно на $S^{(i)}$ и централизует $S^{(j)}_Z$, $W_{S^{(i)}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_{S^{(i)}_{M_n}}$ — максимальная локально циклическая подгруппа без инволюций из $T < N_G(S_i)$, действующая регулярно на $S^{(i)}$ и $S^{(j)}_Z$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду леммы 6 $N_{M_n}(S_{M_n}) = (S^{(i)}_{M_n} \leftthreetimes S^{(j)}_{M_n\,Z(S_{M_n})}) \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{M_n}} \times W_{S^{(i)}_{M_n}})$. По п. 6 леммы 3 $N_{M_1}(S_{M_1}) < N_{M_2}(S_{M_2}) < \ldots < N_{M_n}(S_{M_n}) < \ldots$. Тогда,

$$(S^{(i)}_{M_n} \leftthreetimes S^{(j)}_{M_n\,Z(S_{M_n})}) \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{M_n}} \times W_{S^{(i)}_{M_n}}) < (S^{(i)}_{M_{n+1}} \leftthreetimes S^{(j)}_{M_{n+1}\,Z(S_{M_{n+1}})}) \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}} \times W_{S^{(i)}_{M_{n+1}}})$$

для любого n. По [2, теорема 20.1.1 (Ф. Холл)] $(H_{S^{(i)}_{M_n}} \times W_{S^{(i)}_{M_n}}) < (H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}} \times W_{S^{(i)}_{M_{n+1}}})^x$ для некоторого $x \in S_{M_{n+1}}$. Как отмечалось выше (п. 4 леммы 3, пп. 8, 9 леммы 4),

$$Z(S_{M_1}) < Z(S_{M_2}) < \ldots < Z(S_{M_n}) < \ldots,$$

$$S^{(i)}_{M_1\,Z(M_1)} < S^{(i)}_{M_2\,Z(M_2)} < \ldots < S^{(i)}_{M_n\,Z(M_n)} < \ldots,$$

$$S^{(i)}_{M_1} < S^{(i)}_{M_2} < \ldots < S^{(i)}_{M_n} < \ldots .$$

Следовательно, $x \in S^{(i)}_{M_{n+1}}$, и подгруппа $H^x_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$ централизует подгруппу $S^{(j)}_{M_{n+1}\,Z(S_{M_{n+1}})}$ (см. пп. 12, 13 предложения 1). Возьмем в качестве $H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$ подгруппу $H^x_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$. Так как

$$S^{(i)}_{M_n\,Z(M_n)} < S^{(i)}_{M_{n+1}\,Z(M_{n+1})},$$

то по построению $H_{S^{(i)}_{M_n}} < H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$. Выберем в качестве $W_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$ подгруппу, являющуюся прямым дополнением к подгрупе $H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$ в группе $(H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}} \times W_{S^{(i)}_{M_{n+1}}})^x$ и содержащую $W_{S^{(i)}_{M_n}}$ (согласно пп. 12, 13 предложения 1 такое прямое дополнение существует). Используя индукцию по n, получаем, что группы $H_{S^{(i)}_{M_n}}, W_{S^{(i)}_{M_n}}$ можно выбрать так, что

$$H_{S^{(i)}_{M_1}} < H_{S^{(i)}_{M_2}} < \cdots < H_{S^{(i)}_{M_n}} < \cdots ,$$

$$W_{S^{(i)}_{M_1}} < W_{S^{(i)}_{M_2}} < \dots < W_{S^{(i)}_{M_n}} < \cdots .$$

Положим $H_{S^{(i)}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{S^{(i)}_{M_n}}$. По построению $H_{S^{(i)}}$ — максимальная локально циклическая подгруппа без инволюций из $N_G(S) < N_G(S_i)$ с тем свойством, что она действует регулярно на $S^{(i)}$ и централизует $S^{(j)}_Z$. Положим $W_{S^{(i)}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_{S^{(i)}_{M_n}}$. По построению $W_{S^{(i)}}$ — максимальная локально циклическая подгруппа без инволюций из $N_G(S) < N_G(S_i)$, действующая регулярно на $S^{(i)}$ и $S^{(j)}_Z$. По пп. 6, 7 леммы 3 имеем

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(S_{M_n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((S^{(i)}_{M_n} \leftthreetimes S^{(j)}_{M_n Z(S_{M_n})}) \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{M_n}} \times W_{S^{(i)}_{M_n}}))$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} (S^{(i)}_{M_n} \leftthreetimes S^{(j)}_{M_n Z(S_{M_n})}) \leftthreetimes \bigcup_{n=1}^{\infty} (H_{S^{(i)}_{M_n}} \times W_{S^{(i)}_{M_n}}) = S \leftthreetimes (H_{S^{(i)}} \times W_{S^{(i)}}) = S \leftthreetimes P,$$

где в качестве P взята группа $H_{S^{(i)}} \times W_{S^{(i)}}$. □

Лемма 8. *Пусть z — инволюция из Z, $K \in \mathfrak{A}(1)$, S_K — силовская 2-подгруппа из K, содержащая инволюцию z в $Z(S_K)$. Тогда $N_K(S^{(i)}_K) < N_G(S^{(i)})$, где $S^{(i)}_K$ — максимальные элементарные абелевы подгруппы группы S_K. В частности, $N_{M_n}(S^{(i)}_{M_n}) < N_G(S^{(i)})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $S_K < S$, $S^{(i)}_K < S^{(i)}$ (п. 4 леммы 2, п. 6 леммы 5). Пусть $g \in N_K(S^{(i)}_K)$. Тогда $S^{(i)}_K = (S^{(i)}_K)^g < (S^{(i)})^g$. Так как

$$z \in Z(S_K) < S^{(i)}_K = S^{(i)}_K \cap S^{(i)g}_K < S^{(i)} \cap S^{(i)g},$$

и $S^{(i)}, S^{(i)g}$ — элементарные абелевы группы, то $\langle S^{(i)}, S^{(i)g}\rangle < C_G(z)$. По п. 4 леммы 2 $\langle S^{(i)}, S^{(i)g}\rangle < S$. Покажем, что $\langle S^{(i)}, S^{(i)g}\rangle$ — элементарная абелева группа. Предположим обратное, и пусть h — элемент порядка 4 из $\langle S^{(i)}, S^{(i)g}\rangle$. Тогда $h \in C_S(S^{(i)}_K)$. Так как S — локально конечная группа, то $\langle S_K, h\rangle$ — конечная подгруппа из S, и по условию насыщенности $\langle S_K, h\rangle < K_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Пусть S_{K_1} — силовская 2-подгруппа группы K_1 такая, что $S_K < S_{K_1}$. В силу п. 5 предложения 1 $z \in Z(K_1)$. По выбору элемента h, $h \in C_G(S^{(i)}_K)$. Значит, $h \in C_{K_1}(S^{(i)}_K)$, и $S^{(i)}_K < Z(S_{K_1})$ (п. 5 предложения 1), что невозможно по причине того, что $S^{(i)}_K$ содержит инволюции, не лежащие в $Z(S_K)$ (п. 4 предложения 1). Итак, $\langle S^{(i)}, S^{(i)g}\rangle$ — элементарная абелева подгруппа в S. По п. 1 леммы 5 $S^{(i)}, S^{(i)g}$ — максимальные элементарные абелевы подгруппы в S. Следовательно, $S^{(i)} = \langle S^{(i)}, S^{(i)g}\rangle = S^{(i)g}$. □

Лемма 9. *Структура периодической части централизатора подгруппы $H_{S^{(i)}}$ в группе $N_G(S^{(i)})$ следующая:*

$$T(C_{(N_G(S^{(i)}))}(H_{S^{(i)}}) = (H_{S^{(i)}} \times F_{S^{(i)}}),$$

где $F_{S^{(i)}} \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 7 $H_{S^{(i)}} < N_G(S_i)$. Фактор-группа $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})/H_{S^{(i)}}$ ввиду [13, предложение 4; 16, следствие 2.4.4] является группой Шункова. Покажем, что она насыщена группами из множества $\{L_2(2^n) | n \geqslant 2\}$.

Действительно, пусть $\overline{K}$ — конечная подгруппа из $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})/H_{S^{(i)}}$ и K — ее конечный прообраз из $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})$. Зафиксируем некоторую подгруппу M_n из утверждения леммы 3. По условию насыщенности $M_n \simeq L_3(2^n)$ для некоторого n. Возьмем в M_n подгруппу $S^{(i)}_{M_n} < S^{(i)}$ (п. 1 леммы 5). Так как $H_{S^{(i)}_{M_n}} < H_{S^{(i)}}$, то $\langle K, H_{S^{(i)}_{M_n}}\rangle$ — конечная подгруппа из $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})$. Следовательно, $D = \langle S^{(i)}_{M_n}, H_{S^{(i)}_{M_n}}, K\rangle$ — конечная подгруппа из $N_G(S^{(i)})$. По условию насыщенности $D < D_1 \in \mathfrak{A}(1)$. Пусть S_{D_1} — силовская 2-подгруппа группы D_1 такая, что $Z(S_{M_n}) \leq Z(S_{D_1})$. Значит, $S_{D_1} < S$ (п. 11 предложения 1). По п. 4 предложения 1

$S_{D_1} = S^{(1)}_{D_1} \cdot S^{(2)}_{D_1}$, где $S^{(1)}_{D_1}, S^{(2)}_{D_1}$ — максимальные элементарные абелевы подгруппы группы $S_{D_1}, S^{(1)}_{D_1} < S^{(1)}; S^{(2)}_{D_1} < S^{(2)}$ (п. 6 леммы 5). Согласно пп. 4, 14, 15 предложения 1 и лемме 8

$$N_{D_1}(S^{(i)}_{D_1}) = S^{(i)}_{D_1} \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{D_1}} \times F_{S^{(i)}_{D_1}}) < S^{(i)} \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{D_1}} \times F_{S^{(i)}_{D_1}}),$$

$$N_{D_1}(S^{(i)}_{D_1}) \cap T = S^{(i)}_{D_1} \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{D_1}} \times (S^{(j)}_{D_1 Z(S_{D_1})} \leftthreetimes W_{S^{(i)}_{D_1}})),$$

где

$$S^{(j)}_{M_n Z(S_{M_n})} < S^{(j)}_{D_1 Z(S_{D_1})}, \quad H_{S^{(i)}_{M_n}} < H_{S^{(i)}_{D_1}} < H_{S^{(i)}}, \quad W_{S^{(i)}_{M_n}} < W_{S^{(i)}_{D_1}} < W_{S^{(i)}},$$

$F_{S^{(i)}_{D_1}} \simeq L_2(2^n)$, $S^{(j)}_{D_1 Z(S_{D_1})}$ — силовская 2 подгруппа в $F_{S^{(i)}_{D_1}}$ такая, что $S_{D_1} = S^{(i)}_{D_1} S^{(j)}_{D_1 Z(S_{D_1})}$.

Покажем, что $F_{S^{(i)}_{D_1}} < C_G(H_{S^{(i)}})$. Возьмем элемент $1 \neq h \in \{H_{S^{(i)}} \setminus H_{S^{(i)}_{D_1}}\}$ такой, что для некоторого простого $p, h^p \in H_{S^{(i)}_{D_1}}$. Возьмем инволюцию $v \in F_{S^{(i)}_{D_1}} \setminus S^{(j)}_{D_1 Z(S_{D_1})}$. Поскольку G — группа Шункова и $\langle h, v\rangle < C_G(H_{S^{(i)}_{D_1}})$, то $\langle h, v\rangle$ — конечная группа [13, предложение 4; 16, следствие 2.4.4], а $\langle S^{(i)}_{D_1}, h, v\rangle$ — конечная группа из $N_G(S^{(i)})$. По условию насыщенности $\langle S^{i}_{D_1}, h, v\rangle < D_2 \simeq L_3(2^m)$ для некоторого $m > n$. Так как $Z(S_{M_n}) < Z(S_{D_1}) < S^{(i)}_{D_1} < D_2$, то можно так выбрать силовскую 2-подгруппу S_{D_2} группы D_2, что $S^{(i)}_{D_1} < S_{D_2} < S$. По лемме 8 $N_{D_2}(S^{(i)}_{D_2}) < S^{(i)} \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{D_2}} \times F_{S^{(i)}_{D_2}})$. Ввиду пп. 4, 14, 15 предложения 1

$$N_{D_2}(S^{(i)}_{D_2}) = S^{(i)}_{D_2} \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{D_2}} \times F_{S^{(i)}_{D_2}}), \quad N_{D_2}(S^{(i)}_{D_2}) \cap T = S^{(i)}_{D_2} \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{D_2}} \times (S^{(j)}_{D_2 Z(S_{D_2})} \leftthreetimes W_{S^{(i)}_{D_2}})),$$

где

$$S^{(j)}_{M_n Z(S_{M_n})} < S^{(j)}_{D_2 Z(S_{D_2})}, H_{S^{(i)}_{M_n}} < H_{S^{(i)}_{D_2}} < H_{S^{(i)}}, W_{S^{(i)}_{M_n}} < W_{S^{(i)}_{D_2}} < W_{S^{(i)}};$$

здесь $S^{(j)}_{D_2 Z(S_{D_2})}$ — силовская 2 подгруппа в $F_{S^{(i)}_{D_2}} \simeq L_2(2^m)$ такая, что $S_{D_2} = S^{(i)}_{D_2} S^{(j)}_{D_2 Z(S_{D_2})}$. В силу выбора элемент h и группа $H_{S^{(i)}_{D_1}}$ лежат в $N_{D_2}(S^{(i)}_{D_2}) \cap H_{S^{(i)}} = H_{S^{(i)}_{D_2}}$. Как отмечалось выше, $v \in N_G(S^{(i)})$. Следовательно, $v \in N_{D_2}(S^{(i)}_{D_2})$, $v = ws$, где w — инволюция из $F_{S^{(i)}_{D_2}} \setminus S^{(j)}_{D_2 Z(S_{D_2})}$, s — инволюция из $S^{(i)}_{D_2}$. Тогда для любого $x \in H_{S^{(i)}_{D_2}}$ $x^v = x^{ws} = (x^w)^s = x^s \neq x$, но это невозможно, если $x \in H_{S^{(i)}_{M_n}}$, так как согласно выбору x в этом случае $x^v = x$. Отсюда, $s = 1$, $v = w \in F_{S^{(i)}_{D_2}}$ и v перестановочна с h. Поскольку $F_{S^{(i)}_{D_1}}$ порождается такими инволюциями, то $F_{S^{(i)}_{D_1}}$ централизует h и $K \leq C_{N_{D_1}(S^{(i)}_{D_1})}(H^{(i)}_{D_1})$. Далее, используя индукцию по порядку h ($H_{S^{(i)}}$ — локально циклическая групп), имеем, что $(H_{S^{(i)}} \times F_{S^{(i)}_{D_1}})$ — подгруппа из $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})$, содержащая конечную подгруппу K. Переходя к фактор-группе $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})/H_{S^{(i)}}$, получаем $\overline{K} < (H_{S^{(i)}} \times F_{S^{(i)}_{D_1}})/H_{S^{(i)}} \simeq F_{S^{(i)}_{D_1}} \simeq L_2(2^n)$, что и требовалось. Значит, $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})$ обладает периодической частью $T(C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})/H_{S^{(i)}}) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2 [12, теорема 1]. Отсюда вытекает существование периодической части в $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})$ со структурой $T(C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})) = H_{S^{(i)}} \times F_{S^{(i)}}$, где $F_{S^{(i)}} \simeq L_2(Q)$ [10, теорема 6.15]. □

Зафиксируем группу $F_{S^{(i)}}$ из утверждения леммы 9.

Лемма 10. *В группе G существует подгруппа M, обладающая следующими свойствами.*
1. $M \simeq L_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q характеристики 2.
2. $T < M$.

3. *Пусть S_M — силовская 2-подгруппа группы M. Тогда S_M — силовская 2-подгруппа группы G.*

4. $T(N_G(M)) = M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. В дополнение к соответствию, установленному между подгруппами группы L из п. 2 предложения 1 и подгруппами группы M_n (см. леммы 4, 6), положим $F_A \simeq F_{S^{(1)}_{M_n}}, F_A \simeq F_{S^{2)}_{M_n}}$ (группы F_A, F_B из пп. 14, 15 предложения 1). В силу леммы 9 $F_{S^{(i)}_{M_n}} \simeq L_2(2^{k_n})$ и $F_{S^{(i)}_{M_n}} < F_{S^{(i)}}$. По пп. 14, 15 предложения 1 $S^{(j)}_{M_n Z(S_{M_n})} = S_{M_n} \cap F_{S^{(i)}_{M_n}}$ — силовская 2-подгруппа из $F_{S^{(i)}_{M_n}}$. Согласно п. 9 леммы 4

$$N_{F_{S^{(i)}_{M_1}}}(S^{(j)}_{M_1 Z(M_1)}) < N_{F_{S^{(1)}_{M_2}}}(S^{(j)}_{M_2 Z(M_2)}) < \ldots < N_{F_{S^{(1)}_{M_n}}}(S^{(j)}_{M_n Z(M_n)}) < \ldots .$$

Так как $F^{(i)}_{S_{M_n}} < F_{S^{(i)}}$, то по [4, лемма 19] $F_{S^{(i)}_{M_1}} < F_{S^{(i)}_{M_2}} < \cdots < F_{S^{(i)}_{M_n}} \cdots$. Как отмечалось выше (см. лемму 7), $H_{S^{(i)}_{M_1}} < H_{S^{(i)}_{M_2}} < \cdots < H_{S^{(i)}_{M_n}} < \cdots$. По пп. 14, 15 предложения 1 $N_{M_n}(S^{(i)}_{M_n}) = S^{(i)}_{M_n} \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{M_n}} \times F_{S^{(i)}_{M_n}})$. Значит,

$$N_{M_1}(S^{(1)}_{M_1}) < N_{M_2}(S^{(1)}_{M_2}) < \ldots < N_{M_n}(S^{(1)}_{M_n}) < \ldots,$$

$$N_{M_1}(S^{(2)}_{M_1}) < N_{M_2}(S^{(2)}_{M_2}) < \ldots < N_{M_n}(S^{(2)}_{M_n}) < \ldots.$$

Исходя из п. 4 предложения 1 $M_n = \langle N_{M_n}(S^{(1)}_{M_n}), N_{M_n}(S^{(2)}_{M_n})\rangle$. Следовательно,

$$M_1 < M_2 < \ldots < M_n < \ldots.$$

В этом случае $\{M_1,\ M_2,\ \ldots, M_n,\ \ldots\}$ — насыщающее множество для группы $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M$, и по [5, теорема 3] $M \simeq L_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q характеристики 2.

2. По п. 1, доказанному выше, $M_1 < M_2 < \ldots < M_n < \ldots$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M$. В силу пп. 6, 7 леммы 3 $N_{M_1}(S_{M_1}) < \ldots < N_{M_n}(S_{M_n}) < \ldots$ и $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(S_{M_n})$. Таким образом, справедливо неравенство $T < M$.

3. По построению $S < M$. Пусть K — другая силовская 2-подгруппа из M и K не является силовской 2-подгруппой в G. Тогда $K < K_1$ — силовская 2-подгруппа в G. Ясно, что $K_1 \not< M$. Так как силовские 2-подгруппы в M сопряжены, то для некоторого $g \in M, S^g = K, S^g < K_1$. Противоречие с тем, что S — силовская 2-подгруппа в группе G (см. лемму 2).

4. Пусть $c \in N_G(M) \setminus M$ и c — элемент конечного порядка. Если $S^c = S$, то согласно п. 2 леммы $c \in M$, что противоречит выбору c. Если $S^c \neq S$, то для некоторого $x \in M$ выполнено $S^{cx} = S$ и $cx \in N_G(S)$. Поскольку cx — элемент конечного порядка из $N_G(M)$, то по п. 2 леммы $cx \in M$. Следовательно, $c \in M$, что противоречит выбору c. $\square$

Завершим рассмотрение в а р и а н т а II. Если все инволюции из группы G содержатся в M, то, очевидно, $M = T(G)$. Противоречие с выбором G. Значит, можно выбрать инволюцию $v \in G \setminus M$. Выберем инволюцию $z \in Z(S) < M$. Так как G — группа Шункова, то $\langle z, v\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle z, v\rangle < R \in \mathfrak{A}(1)$. Ясно, что $R \not< M$.

Пусть K — силовская 2-подгруппа из R такая, что $z \in Z(K)$. Так как $z \in Z(S) < S < M$, то по п. 4 леммы 2 $K < S$. Очевидно, для любого $x \in N_R(K)$ будет выполняться $x \in N_R(Z(K))$. В связи с тем, что K содержит элементы порядка 4, $x \in N_R(S)$. Поэтому, $N_R(K) < M$. Выберем в K инволюцию $w \in K \setminus Z(K)$. Так как в M все инволюции сопряжены и $T(C_G(z)) < M$ (см. п. 4 леммы 2 и п. 2 леммы 10), то $T(C_G(w)) < M, C_R(w) < M$. Поскольку R порождается централизаторами всех инволюций из K, имеем в силу произвольности выбора инволюции w из $K \setminus Z(K)$, что $\langle C_R(x) \mid x \in K^{\#}, x^2 = 1\rangle = R < M$. Противоречие с тем, что $R \not< M$. $\square$

Вариант III. $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$.

Поскольку $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, возьмем $D \in \mathfrak{A}(1)$. Тогда $D \simeq L_3(2^n)$ для некоторого $n \geqslant 1$. Пусть S_D — силовская 2-подгруппа из D. Тогда $S_D < S^*$ — бесконечная силовская 2-подгруппа группы G (по лемме 1 и [13, предложение 9]). Для любой конечной подгруппы $X < S_D$ очевидны включения $X < \langle X, S_D\rangle$ — конечная подгруппа группы S^*. По условию насыщенности $\langle X, S_D\rangle < D_{X,S_D} \in \mathfrak{A}(1)$, $D_{X,S_D} \simeq L_3(2^m)$ для некоторого $m > n$, и группа S^* насыщена словскими 2-подгруппами групп из $\mathfrak{A}(1)$. Отсюда и из того факта, что в группе Шункова любая инволюция конечна, вытекает справедливость доказательств лемм 2.1–2.7 из работы [5] для варианта III. Следовательно, лемма 2 также выполняется для варианта III. Ввиду сказанного леммы 3–10 также справедливы и для варианта III (группа S везде заменяется на группу S^*). Так как группа G — контрпример, найдутся инволюции z, w такие, что $w \in G \setminus M$, $z \in Z(S) < M$. Поскольку G — группа Шункова, то $\langle z, w\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle z, w\rangle < R \in \mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$. Ясно, что $R \not< M$.

Пусть K — силовская 2-подгруппа из R такая, что $z \in Z(K)$. Рассмотрим случай $R \in \mathfrak{A}(1)$. Тогда $R \simeq L_3(2^n)$ для некоторого $n \geqslant 1$. Поскольку $z \in Z(S) < S < M$, то по п. 4 леммы 2 $K < S$. Очевидно, для любого $x \in N_R(K)$ будет выполняться $x \in N_R(Z(K))$. Так как K содержит элементы порядка 4, то $x \in N_R(S)$. Отсюда, $N_R(K) < M$. Выберем в K инволюцию $v \in K \setminus Z(K)$. Так как в M все инволюции сопряжены и $T(C_G(z)) < M$ (см. п. 4 леммы 2 и п. 2 леммы 10), то $T(C_G(v)) < M, C_R(v) < M$. Ввиду того что R порождается централизаторами всех инволюций из K, получаем в силу произвольности выбора инволюции v из $K \setminus Z(K)$, что $\langle C_R(x) \mid x \in K^{\#}, x^2 = 1\rangle = R < M$. Противоречие с тем, что $R \not< M$.

Рассмотрим случай $R \in \mathfrak{B}(1)$. Тогда $R \simeq U_3(q)$, $q = 2^k \geqslant 4$. По [4, пп. 2, 4 предложения 1] $N_R(K) = K \leftthreetimes (H)$. Здесь $H = (H_1 \times H_0)$, H — циклическая группа порядка $\dfrac{2^{2n}-1}{d}$, $d = 3$, если 3 делит число $2^n + 1$, и $d = 1$ — в противном случае; $|H_0| = 2^n - 1$ и $|H_1| = \dfrac{2^n+1}{d}$. Так как $z \in Z(S)$ и подгруппа K содержит элементы порядка 4, $N_R(K) < M$. Возьмем в K инволюцию v такую, что $N_K(H) = H \leftthreetimes \langle v\rangle$, причем v инвертирует H_0 и централизует H_1 [4, п. 7 предложения 1]. Ввиду того что $N_R(K)$ — максимальная подгруппа в R, $v \notin M$ (иначе $R = \langle N_R(K), v\rangle < M$, что невозможно). Без ограничения общности можно считать, что инволюция $t = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0\end{smallmatrix}\right)$ лежит в $N_{M_n}(S_{M_n})$. Следовательно, $t \in N_{M_n}(H)$, причем t инвертирует H_0 и централизует H_1. Так как G — группа Шункова, то $\langle H, v, t\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle H, v, t\rangle < W \in \mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$. Ясно, что $W \not< M$.

Пусть K_t — силовская 2-подгруппа из W такая, что $t \in Z(K_t)$. В этом случае $N_W(K_t) < M$. Если теперь $N_W(K_t)$ — максимальная подгруппа в W, то $W \in \mathfrak{B}(1)$ и

$$W = \langle N_W(K_t), H \leftthreetimes \langle t\rangle\rangle < M.$$

Противоречие с тем, что $W \not< M$. Следовательно, $N_W(K_t)$ — не максимальная подгруппа в W и $W \in \mathfrak{A}(1)$. Тогда $W \simeq L_3(2^n)$ для некоторого $n \geqslant 1$.

Пусть X — силовская 2-подгруппа из W такая, что $z \in Z(X)$. Так как $z \in Z(S) < S < M$, то по п. 4 леммы 2 $X < S$. Очевидно, для любого $x \in N_W(X)$ будет выполняться $x \in N_W(Z(X))$. Поскольку X содержит элементы порядка 4, то $N_R(X) < M$. Выберем в X инволюцию $v \in X \setminus Z(X)$. Так как в M все инволюции сопряжены и $T(C_G(z)) < M$ (см. п. 4 леммы 2 и п. 2 леммы 10), то $T(C_G(v)) < M, C_W(v) < M$. Ввиду того что W порождается централизаторами всех инволюций из X, получаем в силу произвольности выбора инволюции v из $X \setminus Z(X)$, что $\langle C_W(x) \mid x \in K^{\#}, x^2 = 1\rangle = W < M$. Противоречие с тем, что $W \not< M$. $\square$

Таким образом, любой из трех возможных вариантов для структуры $\mathfrak{M}(1)$ приводит к противоречию. Теорема полностью доказана. $\square$

Заключение

Группы Шункова в общем случае могут содержать элементы бесконечного порядка. Более того, существуют примеры групп Шункова, которые содержат как элементы конечного порядка, так и элементы бесконечного порядка, но не обладают периодической частью. Данные обстоятельства создают трудности при изучении групп Шункова. Основа этих трудностей в том, что известные результаты о периодических группах, связанные со свойством инволюций (теоремы В. П. Шункова, В. Д. Мазурова, Н. М. Сучкова, А. И. Созутова), на данный класс групп не обобщены. Одной из возможностей использования этих теорем является доказательство существования в группе Шункова (в каждом конкретном случае) бесконечных периодических подгрупп, в частности периодической части группы Шункова, к которым упомянутые выше результаты могут быть применены. В работе получил развитие метод доказательства существования периодической части в группе Шункова с условием насыщенности конечными простыми неабелевыми группами на основе анализа бесконечных последовательностей конечных простых неабелевых подгрупп группы Шункова. С использованием этого метода удалось завершить описание групп Шункова, насыщенных линейными и унитарными группами степени 3 над конечными полями характеристики 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дицман А.П.** О центре p-групп. В сб // Тр. семинара по теории групп. М., 1938. С. 30–34.
2. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
3. **Лыткина Д.В., Мазуров В.Д.** Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$ // Алгебра и логика. 2007. Т. 46. № 5. С. 606–626.
4. **Лыткина Д.В, Тухватулина Л.Р., Филиппов К.А.** Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами $U_3(2^m)$ // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 288–306.
5. **Лыткина Д.В.** О группах, насыщенных конечными простыми группами // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 5. С. 628–653.
6. **Сенашов В.И., Шунков В.П.** Группы с условиями конечности. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 326 с.
7. **Сенашов В.И.** О группах Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 3. С. 234–239.
8. **Сенашов В.И., Шунков В.П.** Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискрет. математика. 2003. Т. 15, № 3. С. 91–104.
9. **Сенашов В. И.** Характеризация групп с обобщенно черниковской периодической частью // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 2. С. 270–275.
10. **Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Изд-во СФУ, 2011. 149 с.
11. **Череп А.А.** О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 518–521.
12. **Филиппов К.А.** О периодической части группы Шункова, насыщенной $L_2(p^n)$ // Вест. СибГАУ. 2012. С. 611–617.
13. **Шлепкин А.А.** Группы Шункова, насыщенные линейными и унитарными группами степени 3 над полями нечетных порядков // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 341–351.
14. **Шлепкин А.К.** О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Мат. тр. 1998. Т. 1, № 1. С. 129–138.
15. **Шлепкин А.К.** О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. С. 226–231.
16. **Шлепкин А.К.** Группы Шункова с дополнительными ограничениями: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 1998. 163 с.
17. **Шлепкин А.К.** О периодической части некоторых групп Шункова // Алгебра и логика. 1999. Т. 38. С. 96–125.

Поступила 6.08.2020
После доработки 20.11.2020

Принята к публикации 18.01.2021

Шлепкин Алексей Анатольевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
e-mail: shlyopkin@gmail.com

REFERENCES

1. Ditsman A.P. On the center of p-groups. In: *Proc. seminar on group theory*. Moscow, 1938, pp. 30–34.
2. Kargapolov M.I., Merzljakov Yu.I. *Fundamentals of the theory of groups*. N Y; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1979, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0. Original Russian text (3rd ed.) published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp*. Moscow: Nauka Publ., 1982, 288 p.
3. Lytkina D.V., Mazurov V.D. Periodic groups saturated with $L_3(2^m)$. *Algebra and Logic*, 2007, vol. 46, no. 5, pp. 330–340. doi: 10.1007/s10469-007-0033-z.
4. Lytkina D.V., Tukhvatullina L.R., Filippov K.A. Periodic groups saturated by finite simple groups $U_3(2^m)$. *Algebra Logic*, 2008, vol. 47, no. 3, pp. 166–175. doi: 10.1007/s10469-008-9011-3.
5. Lytkina D.V. Groups saturated by finite simple groups. *Algebra and Logic*, 2009, vol. 48, no. 5, pp. 357–370. doi: 10.1007/s10469-009-9063-z.
6. Senashov V.I., Shunkov V.P. *Gruppy s usloviyami konechnosti* [Groups with finiteness conditions]. Novosibirsk: Izdatel'stvo Rossiiskoi Akademii Nauk, Sibirskoe Otdelenie, 2001, 336 p. ISBN: 5-7692-0439-7.
7. Senashov V.I. On Shunkov groups with a strongly embedded almost layer-finite subgroup. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 3, pp. 234–239 (in Russian).
8. Senashov V.I., Shunkov V.P. Almost layer-finiteness of the periodic part of a group without involutions. *Discrete Math. Appl.*, 2003, vol. 13, no. 4, pp. 391–404. doi: 10.1515/156939203322556054.
9. Senashov V.I. Characterization of groups with generalized Chernikov periodic part. *Math. Notes*, 2000, vol. 67, no. 2, pp. 218–222. doi: 10.1007/BF02686249.
10. Sozutov A.I., Suchkov N.M., Suchkova N.G. *Beskonechnye gruppy s involyutsiyami* [Infinite groups with involutions]. Krasnoyarsk: Sib. Fed. Univ. Publ., 2011, 149 p.
11. Cherep A.A. Set of elements of finite order in a biprimitively finite group. *Algebra and Logic*, 1987, vol. 26, no. 4, pp. 311–313. doi: 10.1007/BF01980245.
12. Filippov K.A. On the periodic part of the Shunkov group, saturated with $L_2(p^n)$. *Vestnik SibGAU*, 2012, pp. 611–617 (in Russian).
13. Shlepkin A.A. On Shunkov groups, saturated with linear and unitary groups of dimension 3 over fields of odd orders. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 341–351 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2016.13.029.
14. Shlepkin A. On certain torsion groups saturated with finite simple groups. *Sib. Adv. Math.*, 1999, vol. 9, no. 2, pp. 100–108.
15. Shlepkin A.K. Conjugately biprimitively finite groups with the primary minimal condition. *Algebra Logic*, 1983, vol. 22, no. 2, pp. 165–169. doi: 10.1007/BF01978669.
16. Shlepkin A.K. *Gruppy Shunkova s dopolnitel'nymi ogranicheniyami* [Shunkov groups with additional restrictions]. Dr. Sci. (Phys.–Math.) Diss. Krasnoyarsk, 1999, 187 p.
17. Shlepkin A.K. On the periodic part of some Shunkov groups. *Algebra and Logic*, 1999, vol. 38, no. 1, pp. 51–66. doi: 10.1007/BF02671670.

Received August 6, 2020
Revised November 20, 2020
Accepted January 18, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-10017).

Aleksei Anatolievich Shlepkin, Cand. Phys.-Math. Sci., Siberian federal university, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: shlyopkin@gmail.com.

Cite this article as: A. A. Shlepkin. On the periodic part of a Shunkov group saturated with linear and unitary groups of degree 3 over finite fields of odd characteristic, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 207–219.