ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 517.968.4

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДА[1]

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Исследуется класс нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки, имеющих непосредственное применение в эконометрике. Изучаются некоторые качественные свойства решения: асимптотическое поведение, монотонность, гладкость. Приводится конкретный пример прикладного характера.

Ключевые слова: распределение богатств, асимптотика, волновой фронт, предел решения, монотонность.

A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan. Asymptotic behavior of a solution for one class of nonlinear integro-differential equations in the income distribution problem.

We study a class of nonlinear integro-differential equations of convolution type, which have direct application in econometrics. Some qualitative properties of the solution are studied: its asymptotic behavior, monotonicity, and smoothness. A specific example of an applied nature is given.

Keywords: wealth distribution, asymptotics, wavefront, solution limit, monotonicity.

MSC: 45G05

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-188-206

1. Введение

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + m\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + aP(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y)G(P(x-y,t))dy, \qquad x \in \mathbb{R} := (-\infty,+\infty), \quad t \in \mathbb{R}^+ := [0,+\infty) \tag{1}$$

относительно искомого волнового фронта $P(x,t) := \Phi(x+ct)$, где $c > 0$ — волновая скорость, а m и a — положительные параметры. Уравнение (1) возникает в эконометрике (см. [1–9]). В частности, уравнением (1) описывается задача распределения богатства страны между ее экономическими агентами, при этом $P(x,t)$ играет роль плотности распределения. Выражение $P(x,t)dx$ приближенно представляет долю экономических агентов в интервале $[x, x+dx]$ в момент времени t. Ядро K — это функция перераспределения, обусловленная разными экономическими причинами (капитальные трансферты, в том числе пожертвования между агентами, возникновение новых агентов, объединение двух или нескольких предприятий, исчезновение старых предприятий и переход имущества в качестве наследства полностью или частично к другим агентам и т. д.). В уравнении (1) число m характеризует среднее сбережение и рост капиталов, а параметр a описывает “потери богатств” в связи с банкротством и исчезновением агентов.

[1]Исследование второго и третьего авторов выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00223). Результаты разд. 1, 3, 4 принадлежат Х.А. Хачатряну и А.С. Петросян, а результаты разд. 2 и 5 — А.Х. Хачатряну.

В линейном случае, когда $K(x-y)=0$ при $y<0$, уравнение (1) достаточно подробно исследовалось в работах [1;5;7]. Для случая, когда интегрирование в правой части совершается в пределах от 0 до $+\infty$, соответствующее нелинейное стационарное уравнение (т. е. когда P не зависит от переменной t) было изучено в работах [6;8;9].

В настоящей работе при определенных ограничениях на нелинейность функции G и на ядро K займемся построением неотрицательного нетривиального волнового фронта (решения в виде бегущей волны) для уравнения (1) и изучением некоторых качественных свойств построенного решения: асимптотического поведения, монотонности, гладкости. В конце мы приведем конкретный пример прикладного характера, для которого выполняются все условия сформулированной теоремы.

2. Сведение уравнения (1) к интегральному уравнению. Существование решения

В уравнении (1) ядро K — определенная на множестве $\mathbb{R}$ положительная ограниченная и суммируемая функция, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = a, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|^j K(y)dy < +\infty, \quad j=0,1,2. \tag{2}$$

Решение $P(x,t) := \Phi(x+ct)$ уравнения (1) будем искать в следующем классе функций:

$$\mathfrak{M} := \{f\colon f^{(k)} \in C_M(\mathbb{R}),\ f(-\infty)=0,\ k=0,1\}, \tag{3}$$

Здесь $f^{(k)}$ — k-я производная функции f, а $C_M(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных и ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}$.

Прежде чем накладывать соответствующие условия на функции G и K, уравнение (1) запишем в терминах функции Φ:

$$c\Phi'(x+ct) + m\Phi'(x+ct) + a\Phi(x+ct) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y)G(\Phi(x-y+ct))dy \tag{4}$$

или

$$(m+c)\Phi'(x) + a\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y)G(\Phi(x-y))dy, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

где $x := x+ct \in \mathbb{R}$.

Уравнение (5) перепишем в виде

$$\Phi'(x) + \lambda\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(x-y)G(\Phi(y))dy, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

где

$$\lambda := \frac{a}{m+c}, \quad \tilde{K}(x) := \frac{1}{m+c}K(x), \quad x\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Умножая обе части уравнения (6) на функцию $e^{-\lambda(z-x)}$ и интегрируя обе части полученного равенства по x в пределах от $-\infty$ до z (при этом учитывая тот факт, что $\Phi\in\mathfrak{M}$), при всяком фиксированном z будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\lambda(z-x)}\Phi'(x)dx + \lambda\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\lambda(z-x)}\Phi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\lambda(z-x)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(x-y)G(\Phi(y))dydx$$

или

$$e^{-\lambda(z-x)}\Phi(x)\,|_{x=-\infty}^{z} -\lambda \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\lambda(z-x)}\Phi(x)dx + \lambda \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\lambda(z-x)}\Phi(x)dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\lambda(z-x)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(x-y)G(\Phi(y))dydx. \tag{8}$$

Меняя порядок интегрирования в правой части (8), получаем

$$\Phi(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(z-y)G(\Phi(y))dy, \quad z \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

где

$$T(z) := \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda\tau}\tilde{K}(z-\tau)d\tau, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Заметим, что

$$\mu(T) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(z)dz = 1. \tag{11}$$

Действительно, учитывая (2), (7) и (10), а также теорему Фубини (см. [10]), выводим

$$\mu(T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda\tau}\tilde{K}(z-\tau)d\tau dz = \frac{1}{\lambda(m+c)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = \frac{1}{a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1.$$

Волновые скорости ниже выберем так, чтобы

$$\nu(T) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} zT(z)dz > 0. \tag{12}$$

Здесь, также используя (2), (7), (10) и теорему Фубини, имеем

$$\nu(T) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} z \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda\tau}\tilde{K}(z-\tau)d\tau dz = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} \int\limits_{-\infty}^{\infty} z\tilde{K}(z-\tau)dzd\tau$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\tau+y)\tilde{K}(y)dyd\tau = \frac{m+c}{a} + \frac{\nu(K)}{a} > 0 \ \text{ при } \ c > \max\{-\nu(K)-m; 0\}.$$

Так как $m, c > 0$, то легко заметить, что неравенство $\nu(T) > 0$ выполняется автоматически, если дополнительно потребовать, чтобы $\nu(K) \geq -m$.

Относительно G предположим, что она удовлетворяет следующим условиям (рис. 1):

1) существует ее производная в нуле $G'(0)$, так что $1 < G'(0) < +\infty$ и

$$G(u) \leq G'(0)u, \quad u \in [0, \eta],$$

где $\eta > 0$ — первая положительная неподвижная точка функции G;

2) функция G монотонно возрастает на $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ и выпукла вверх на $\mathbb{R}^+$;

3) существуют числа $\varepsilon > 0$ и $c_0 > 0$ такие, что

$$G(u) \geq G'(0)u - c_0 u^{1+\varepsilon}, \quad u \in [0, \eta].$$

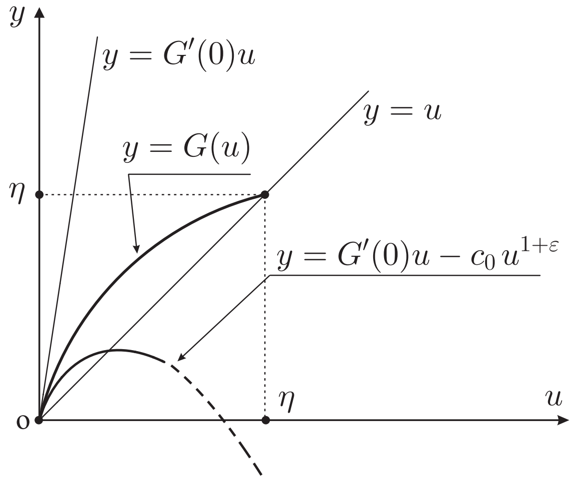

Рис. 1

Рассмотрим теперь функцию Дикмана (см. [12])

$$L(\mu) := G'(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x} T(x)dx, \quad 0 \le \mu < \mu^*, \quad \mu^* < +\infty$$

(в предположении, что последний интеграл сходится).

Заметим, что $L(0) = G'(0)\int_{-\infty}^{\infty} T(x)dx > 1$. В силу (12) имеем

$$L'(+0) = \frac{d}{d\mu} L(\mu) \mid_{\mu=0} = -G'(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} xT(x)dx = -G'(0)\nu(T) < 0.$$

Из структуры функции $L(\mu)$ следует также, что

$$L''(\mu) = G'(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 T(x) e^{-\mu x} dx > 0 \tag{13}$$

(может быть и равным $+\infty$). Поэтому функция $L(\mu)$ выпукла вниз на множестве $[0, \mu^*)$.

Если исходить из предположения о существовании числа $0 < \mu_1 \le \mu^*$ такого, что при $\mu \in (0, \mu_1]$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x} |x| T(x)dx < +\infty,$$

то в силу непрерывности функции $L'(\mu)$ на интервале $(0, \mu_1]$ и того, что $L'(+0) < 0$, можно говорить о существовании числа $\mu_0 \in (0, \mu_1]$ такого, что имеет место $L'(\mu) < 0$ при $\mu \in (0, \mu_0]$. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, будем считать, что

$$L(\mu_0) < 1. \tag{14}$$

При таких ограничениях на $L(\mu)$ в работе [11] (а в частном случае, когда $\varepsilon = 1$, — в работе [12]) доказано, что уравнение (9) обладает положительным монотонно неубывающим и ограниченным решением Φ, причем

$$\lim_{z \to -\infty} \Phi(z) = 0, \quad \lim_{z \to +\infty} \Phi(z) = \eta. \tag{15}$$

Данное решение является также непрерывным на множестве $\mathbb{R}$.

Небезынтересно отметить, что нелинейные интегральные уравнения вида (9) имеют также важное применение в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии (см. [12–15]). Более того, в работе [11] доказано, что решение единственно в конкретно выбранном конусном отрезке. В целом решение уравнения (9) не единственно в пространстве неотрицательных и ограниченных функций на $\mathbb{R}$, удовлетворяющих предельным соотношениям (15), ибо всевозможные сдвиги построенного решения $\Phi(z)$ также удовлетворяют уравнению (9).

В следующем разделе мы докажем, что решение $\Phi \in \mathfrak{M}$.

3. Гладкость решения уравнения (9)

Для доказательства включения $\Phi \in \mathfrak{M}$ мы сперва убедимся, что

I) $T \in C^1(\mathbb{R})$;

II) $T^{(k)} \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}),\ k = 0, 1$, где $T^{(k)}$ — k-я производная функции T.

Представление (10) перепишем в следующем виде:

$$T(z) = \int_{-\infty}^{z} \tilde{K}(y) e^{-\lambda(z-y)} dy, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Так как $\tilde{K} \in C_M(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, то из (16) сразу получаем, что $T \in C^1(\mathbb{R})$ и

$$T'(z) = \tilde{K}(z) - \lambda \int_{-\infty}^{z} \tilde{K}(y) e^{-\lambda(z-y)} dy, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Используя (2), (7) из (17) и (16) будем иметь

$$0 \le T(z) \le \int_{-\infty}^{z} \tilde{K}(y) dy \le \frac{1}{m+c} \int_{-\infty}^{\infty} K(y) dy = \frac{a}{m+c},$$

$$0 \le T(z) \le \sup_{y\in\mathbb{R}} \tilde{K}(y) \int_{-\infty}^{z} e^{-\lambda(z-y)} dy = \frac{\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} \tilde{K}(y)(m+c)}{a} = \frac{\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} K(y)}{a},$$

$$|T'(z)| \le \tilde{K}(z) + \lambda \int_{-\infty}^{z} \tilde{K}(y) e^{-\lambda(z-y)} dy \le \frac{\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} K(y)}{m+c} + \frac{\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} K(y)}{m+c} \lambda \int_{-\infty}^{z} e^{-\lambda(z-y)} dy = \frac{2\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} K(y)}{m+c},$$

$$|T'(z)| \le \frac{\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} K(y)}{m+c} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(y) dy = \frac{\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} K(y)}{m+c} + \left(\frac{a}{m+c}\right)^2.$$

Из полученных оценок немедленно следует, что

$$0 \le T(z) \le \min\left\{\frac{\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} K(y)}{a}; \frac{a}{m+c}\right\}, \quad |T'(z)| \le \min\left\{\frac{2\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} K(y)}{m+c}; \frac{\sup\limits_{y\in\mathbb{R}} K(y)}{m+c} + \left(\frac{a}{m+c}\right)^2\right\}.$$

Кроме того, из (17) выводим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |T'(z)|dz \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(z)dz + \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{z} \tilde{K}(y)e^{-\lambda(z-y)}dydz$$

$$= \frac{a}{m+c} + \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(y) \int\limits_{y}^{\infty} e^{-\lambda(z-y)}dzdy = \frac{2a}{m+c}. \qquad (18)$$

Итак, согласно вышеприведенному неравенству с учетом равенства (11) приходим к включениям I и II.

Так как в силу (18) и (7) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} T(z-y)G(\Phi(y))dy \leq G(\eta) \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(z)dz = \eta,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |T'(z-y)|G(\Phi(y))dy \leq G(\eta) \int\limits_{-\infty}^{\infty} |T'(z)|dz \leq \frac{2a\eta}{m+c},$$

а ядро T обладает свойствами I и II, то, ввиду правила дифференцирования под знаком интеграла (см. [16]), можем утверждать, что существует

$$\Phi'(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} T'(z-y)G(\Phi(y))dy \in C(\mathbb{R}). \qquad (19)$$

Очевидно, что

$$|\Phi'(z)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |T'(z-y)|G(\Phi(y))dy \leq \frac{2a\eta}{m+c}.$$

Заметим также, что $\Phi'(+\infty) = \Phi'(-\infty) = 0$. Действительно, используя известное предельное соотношение в операции свертки (см. [17; 18]), с учетом (15) из (19) будем иметь

$$\Phi'(+\infty) = G(\Phi(+\infty)) \int\limits_{-\infty}^{\infty} T'(\tau)d\tau = \eta(T(+\infty) - T(-\infty)) = 0,$$

$$\Phi'(-\infty) = G(\Phi(-\infty)) \int\limits_{-\infty}^{\infty} T'(\tau)d\tau = 0(T(+\infty) - T(-\infty)) = 0,$$

ибо

$$T(+\infty) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(z)dz \lim_{\tau\to+\infty} e^{-\lambda\tau} = 0, \quad 0 \leq T(z) \leq \int\limits_{-\infty}^{z} \tilde{K}(y)dy \to 0 \text{ при } z \to -\infty \Rightarrow T(-\infty) = 0.$$

4. Асимптотическое поведение решения граничной задачи (9), (15)

Пусть Φ — любое ограниченное неотрицательное решение граничной задачи (9), (15). Сперва докажем, что Φ есть непрерывная функция на множестве $\mathbb{R}$. Как известно, свертка суммируемой и ограниченной функций является непрерывной функцией (см. [19]). Воспользуемся этим замечательным фактом. Поскольку $G(\Phi(x))$ также ограничена, а $T \in L_1(\mathbb{R})$, то из (9) сразу следует, что $\Phi \in C(\mathbb{R})$. Докажем теперь, что $\eta - \Phi \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \eta$ и $\Phi(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$, то существует число $r > 0$ такое, что при $x > r$

$$\Phi(x) > \frac{\eta}{2}. \tag{20}$$

Убедимся, что

$$\Phi(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Обозначим через $c_0 := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \Phi(x)$. Из (9) с учетом монотонности функции G и соотношения (11) будем иметь

$$c_0 \leq G(c_0). \tag{22}$$

Теперь предположим обратное: $c_0 > \eta$. Тогда в силу выпуклости (вверх) функции G получим (рис. 2)

$$\frac{G(c_0)}{c_0} < \frac{G(\eta)}{\eta} = 1.$$

Последнее противоречит неравенству (22). Значит, $0 \leq \Phi(x) \leq \eta,\ x \in \mathbb{R}$.

Используя (11), оценим следующую разность:

$$0 \leq \eta - \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dt \leq \eta \int\limits_{-\infty}^{0} T(x-t)dt + \int\limits_{0}^{\infty} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dt$$

$$= \eta \int\limits_{x}^{\infty} T(\tau)d\tau + \int\limits_{0}^{r} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dt + \int\limits_{r}^{\infty} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dt,$$

где число $r > 0$ определяется из (20).

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} |x|K(x)dx < +\infty$, то с использованием теоремы Фубини легко можно убедиться, что

$$\int\limits_{0}^{r} T(x-t)dt \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \int\limits_{x}^{\infty} T(\tau)d\tau \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

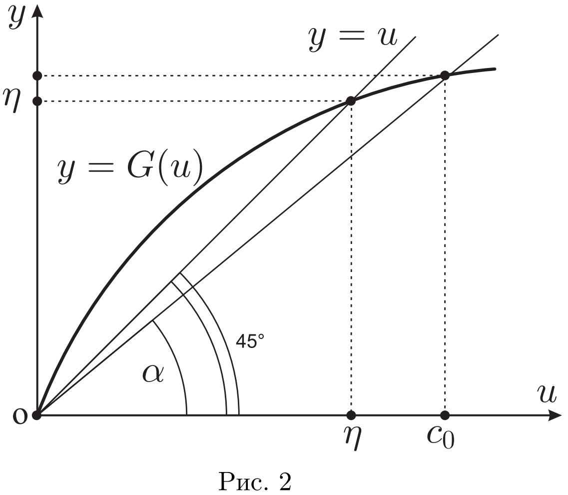

Рис. 2

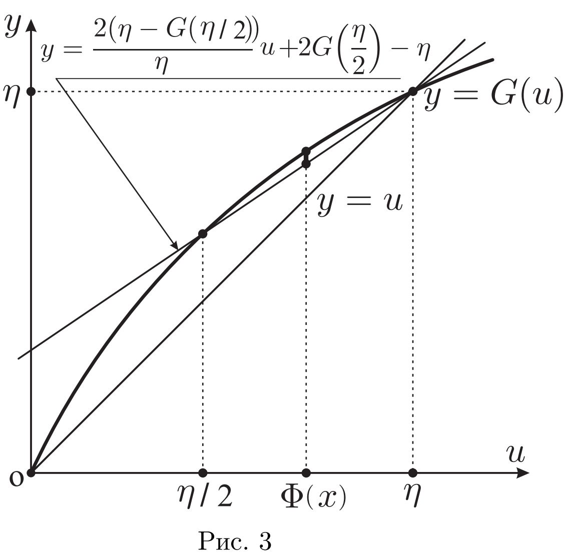

Рис. 3

Следовательно, из вышеприведенного неравенства получим

$$0 \le \eta - \Phi(x) \le g_0(x) + \int_r^\infty T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dt, \tag{23}$$

где

$$g_0(x) := \eta\Big(\int_x^\infty T(\tau)d\tau + \int_0^r T(x-t)dt\Big) \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{24}$$

Пусть $R > r$ — произвольное число. Тогда из (23) с учетом (24) и конечности первого момента ядра T будем иметь

$$0 \le \int_r^R (\eta - \Phi(x))dx \le \int_r^\infty g_0(x)dx + \int_r^R \int_r^\infty T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx$$

$$= \int_r^\infty g_0(x)dx + \int_r^R \int_r^R T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx + \int_r^R \int_R^\infty T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx$$

$$\le \int_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int_0^R \int_R^\infty T(x-t)dtdx + \int_r^R \int_r^R T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx$$

$$= \int_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int_0^R \int_{-\infty}^{x-R} T(y)dydx + \int_r^R \int_r^R T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx$$

$$= \int_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int_{-R}^0 \int_{-\infty}^z T(y)dydz + \int_r^R \int_r^R T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx$$

$$\le \int_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z T(y)dydz + \int_r^R \int_r^R T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx$$

$$= \int_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int_{-\infty}^0 T(y)(-y)dy + \int_r^R \int_r^R T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx$$

$$= \int_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int_0^\infty zT(-z)dz + \int_r^R \int_r^R T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx.$$

Из (20), (21) в силу выпуклости (вверх) функции G следует, что при $x > r$ справедливо (рис. 3)

$$G(\Phi(x)) \ge \frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta}\Phi(x) + 2G(\eta/2) - \eta,$$

откуда получим, что для всех $x > r$

$$0 \le \eta - G(\Phi(x)) \le \frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta}(\eta - \Phi(x)). \tag{25}$$

Поэтому, используя (25), из вышеприведенной цепочки неравенств приходим к следующей оценке сверху:

$$0 \le \int_r^R (\eta - \Phi(x))dx \le \int_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int_0^\infty zT(-z)dz + \frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta} \int_r^R \int_r^R T(x-t)(\eta - \Phi(t))dtdx$$

$$\le \int_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int_0^\infty zT(-z)dz + \frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta} \int_r^R (\eta - \Phi(t))dt,$$

из которой имеем, что

$$0 \le \int_r^R (\eta - \Phi(x))dx \le \frac{\eta \left(\int_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int_0^\infty zT(-z)dz \right)}{2G(\eta/2) - \eta}, \tag{26}$$

ибо $2G(\eta/2) > \eta/2$.

В неравенстве (26), устремляя $R \to +\infty$, заключаем, что $\eta - \Phi \in L_1(r, +\infty)$ и

$$\int_r^\infty (\eta - \Phi(x))dx \le \frac{\eta \left(\int_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int_0^\infty zT(-z)dz \right)}{2G(\eta/2) - \eta}. \tag{27}$$

Так как $\Phi \in C(\mathbb{R})$, то из (27) получаем, что $\eta - \Phi \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Повторяя аналогичные рассуждения, можно убедиться, что если $\int_{-\infty}^\infty |y|^p K(y)dy < +\infty$ для некоторого $p > 0$, то $x^{p-1}(\eta - \Phi(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Как известно (см. [20, задача 113, с. 93]), если функция $f(x)$ монотонна в интервале $[1, +\infty)$ и $\int_1^\infty x^\alpha f(x)dx < +\infty$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{1+\alpha} f(x) = 0$. Следовательно, если дополнительно предположить, что $\Phi(x) \uparrow$ на $[1, +\infty)$,

$$\int_{-\infty}^\infty |y|^p K(y)dy < +\infty, \quad p > 0,$$

то $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p(\eta - \Phi(x)) = 0$, т. е.

$$\Phi(x) = \eta - o\left(\frac{1}{x^p}\right), \text{ когда } x \to +\infty.$$

Итак, на основании вышеизложенного приходим к следующим теоремам.

Теорема 1. *При условиях* (2), 1) − 3), (14) *уравнение* (1) *обладает однопараметрическим семейством волновых фронтов* $P_c(x,t) := \Phi(x + ct)$, $c \in (\max\{-\nu(K) - m, 0\}, +\infty)$, *причем* $\Phi \in \mathfrak{M}$ *и*

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \eta, \quad \Phi'(+\infty) = \Phi'(-\infty) = 0.$$

Более того,

$$\Phi(x) \uparrow \text{ на } \mathbb{R}, \quad \eta - \Phi \in L_1(\mathbb{R}^+) \text{ и } \Phi(x) = \eta - o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \to +\infty,$$

где $\eta > 0$ *— положительный корень уравнения* $G(u) = u$. □

Теорема 2. *При условиях* (2), 2), *если* $G(0) = 0$ *и уравнение* $G(u) = u$ *имеет положительное решение, а* $\Phi(x)$ *является ограниченным и неотрицательным решением граничной задачи* (9), (15), *то*

A) $\Phi \in C(\mathbb{R})$;

B) $\eta - \Phi \in L_1(\mathbb{R}^+)$. □

5. Обобщение некоторых результатов

Из результатов работы [11] получаем, что $\Phi(x)$ является поточечным пределом монотонно убывающих по n последовательных приближений

$$\begin{gathered}\Phi_{n+1}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(x-t)G(\Phi_n(t))dt,\quad x\in\mathbb{R},\\ \Phi_0(x)=\begin{cases}\eta e^{\sigma x}, & \text{если}\quad x<0,\quad n=0,1,2,\dots,\\ \eta, & \text{если}\quad x\geq 0,\end{cases}\end{gathered}\tag{28}$$

где число $\sigma\in(0,\mu_0)$ единственным образом определяется из характеристического уравнения $L(\mu)=1$.

Пусть h — определенная на множестве $\mathbb{R}^+$ непрерывная монотонно неубывающая неотрицательная и выпуклая вверх функция. Из перечисленных свойств функции h следует, что для всех $x,y\in\mathbb{R}^+$ справедливо неравенство

$$0\leq h(x+y)\leq h(x)+h(y).\tag{29}$$

Действительно, сперва заметим, что в силу перечисленных свойств функции h для любого $t\in[0,1]$ получаем

$$h(tx)=h(tx+(1-t)\cdot 0)\geq th(x)+(1-t)h(0)\geq th(x),\quad x\in\mathbb{R}^+.$$

Используя последнее неравенство, исходя из выпуклости вверх функции h будем иметь

$$h(x+y)=\frac{x}{x+y}h(x+y)+\frac{y}{x+y}h(x+y)\leq h(x)+h(y).$$

В силу (11) итерации (28) можно записать также в виде

$$\eta-\Phi_{n+1}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(x-t)(\eta-G(\Phi_n(t)))dt,\quad x\in\mathbb{R},$$

$$\Phi_0(x)=\begin{cases}\eta e^{\sigma x}, & \text{если}\quad x<0,\\ \eta, & \text{если}\quad x\geq 0,\end{cases}\qquad n=0,1,2,\dots.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(x)=\Phi(x)$ и $\Phi_n(x)\downarrow$ по n, то согласно (28)

$$\Phi(x)\leq\Phi_n(x)\leq\eta,\quad x\in\mathbb{R}.\tag{30}$$

Учитывая (20) и (30), можем утверждать, что для всех $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ выполняется неравенство

$$\Phi_n(x)>\frac{\eta}{2},\quad x>r.\tag{31}$$

Предположим теперь, что при некотором $m\in\mathbb{N}$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^{\infty}xh^m(x)T(x)dx<+\infty\tag{32}$$

и докажем, что тогда

$$\int\limits_0^{\infty}h^m(x)(\eta-\Phi(x))dx<+\infty.\tag{33}$$

В случае, когда h представляет собой ограниченную функцию, утверждение сразу следует из суммируемости на $\mathbb{R}^+$ функции $\eta - \Phi$. Предположим, что $h(x)$ неограниченно растет. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что $h(x) \geq 1$ при $x \geq \delta$.

С этой целью сперва убедимся, что

$$\int_0^\infty h^m(x)(\eta - \Phi_n(x))dx < +\infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{34}$$

В случае, когда $n = 0$, утверждение (34) автоматически выполняется.

Пусть утверждение (34) имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$.

Сначала установим, что

$$\int_0^\infty h^j(x)(\eta - \Phi_n(x))dx < +\infty, \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \tag{35}$$

В силу последнего индукционного предположения и непрерывности функций h и $\eta - \Phi_n$ будем иметь

$$\int_0^\infty h^j(x)(\eta - \Phi_n(x))dx \leq \int_0^\delta h^j(x)(\eta - \Phi_n(x))dx$$

$$+ \int_\delta^\infty h^m(x)(\eta - \Phi_n(x))dx \leq \int_0^\delta h^j(x)(\eta - \Phi_n(x))dx + \int_0^\infty h^m(x)(\eta - \Phi_n(x))dx < +\infty.$$

Аналогичными рассуждениями можно прийти к выводу, что

$$\int_0^\infty x h^j(x) T(x) dx < +\infty, \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \tag{36}$$

Теперь убедимся, что

$$\int_0^\infty h^m(x)(\eta - \Phi_{n+1}(x))dx < +\infty. \tag{37}$$

Учитывая (25), (31), (30) и неравенство (29), из (28) для любого $d > r$ получим

$$\int_r^d h^m(x)(\eta - \Phi_{n+1}(x))dx = \int_r^d h^m(x) \int_{-\infty}^\infty T(x-t)(\eta - G(\Phi_n(t)))dtdx$$

$$\leq \eta \int_r^d h^m(x) \int_{-\infty}^0 T(x-t)dtdx + \eta \int_r^d h^m(x) \int_0^r T(x-t)dtdx$$

$$+ \frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta} \int_r^d h^m(x) \int_r^\infty T(x-t)(\eta - \Phi_n(t))dtdx$$

$$= \eta \int_r^d h^m(x) \int_x^\infty T(y)dydx + \eta \int_r^d h^m(x) \int_{x-r}^x T(y)dydx$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int\limits_r^{\infty}(\eta-\Phi_n(t))\int\limits_r^{d}h^m(x)T(x-t)dxdt$$

$$\leq \eta\int\limits_r^{d}h^m(x)\int\limits_x^{d}T(y)dydx+\eta\int\limits_r^{d}h^m(x)\int\limits_d^{\infty}T(y)dydx+\eta\int\limits_r^{d}h^m(x)\int\limits_{x-r}^{\infty}T(y)dydx$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int\limits_r^{\infty}(\eta-\Phi_n(t))\int\limits_{r-t}^{d-t}h^m(t+y)T(y)dydt$$

$$=\eta\int\limits_r^{d}T(y)\int\limits_r^{y}h^m(x)dxdy+\eta\int\limits_d^{\infty}T(y)\int\limits_r^{d}h^m(x)dxdy+\eta\int\limits_r^{d}h^m(x)\int\limits_{x-r}^{d-r}T(y)dydx$$

$$+\eta\int\limits_r^{d}h^m(x)\int\limits_{d-r}^{\infty}T(y)dydx+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int\limits_r^{\infty}(\eta-\Phi_n(t))\int\limits_{r-t}^{d-t}h^m(t+y)T(y)dydt$$

$$\leq \eta\int\limits_r^{d}T(y)h^m(y)(y-r)dy+\eta\int\limits_d^{\infty}T(y)h^m(d)(d-r)dy+\eta\int\limits_0^{d-r}T(y)\int\limits_r^{r+y}h^m(x)dxdy$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int\limits_r^{\infty}(\eta-\Phi_n(t))\int\limits_{r-t}^{d-t}h^m(t+y)T(y)dydt$$

$$\leq 2\eta\int\limits_r^{\infty}T(y)h^m(y)ydy+\eta\int\limits_0^{d-r}T(y)(h(r)+h(y))^m ydy$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int\limits_r^{\infty}(\eta-\Phi_n(t))\int\limits_{r-t}^{0}h^m(t+y)T(y)dydt$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int\limits_r^{\infty}(\eta-\Phi_n(t))\int\limits_0^{d-t}(h(r)+h(y))^m T(y)dydt$$

$$\leq 2\eta\int\limits_r^{\infty}T(y)h^m(y)ydy+\eta\sum_{j=0}^{m}C_m^j\int\limits_0^{\infty}T(y)h^{m-j}(r)h^j(y)ydy$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int\limits_r^{\infty}(\eta-\Phi_n(t))h^m(t)dt\int\limits_{-\infty}^{0}T(y)dy$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\sum_{j=0}^{m}C_m^j\int\limits_r^{\infty}(\eta-\Phi_n(t))h^{m-j}(t)dt\int\limits_0^{\infty}T(y)h^j(y)dy<+\infty.$$

Устремляя $d \to +\infty$, из полученного неравенства выводим оценку

$$\int\limits_r^\infty h^m(x)(\eta - \Phi_{n+1}(x))dx \le 2\eta \int\limits_r^\infty T(y)h^m(y)ydy$$

$$+\eta \sum_{j=0}^m C_m^j h^{m-j}(r) \int\limits_0^\infty T(y)h^j(y)ydy + \frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta} \int\limits_r^\infty (\eta - \Phi_n(t))h^m(t)dt \int\limits_{-\infty}^0 T(y)dy$$

$$+\frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta} \sum_{j=0}^m C_m^j \int\limits_r^\infty (\eta - \Phi_n(t))h^{m-j}(t)dt \int\limits_0^\infty T(y)h^j(y)dy < +\infty. \tag{38}$$

Так как $\eta - \Phi_{n+1}$ и h являются непрерывными на $\mathbb{R}^+$, то $\int_0^r h^m(x)(\eta - \Phi_{n+1}(x))dx < +\infty$. Следовательно, учитывая (38), приходим к включению $h^m(\eta - \Phi_{n+1}) \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Теперь индукцией по m докажем, что

$$\int\limits_0^\infty h^m(x)(\eta - \Phi(x))dx < +\infty. \tag{39}$$

Сначала установим сходимость интеграла (39) при $m = 1$.

Из (28), с учетом (11), (25), (30), (29) и (31) имеем

$$\int\limits_r^\infty h(x)(\eta - \Phi_{n+1}(x))dx \le \eta \int\limits_r^\infty h(x) \int\limits_x^\infty T(y)dydx + \eta \int\limits_r^\infty h(x) \int\limits_0^r T(x-t)dtdx$$

$$+\frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta} \int\limits_r^\infty h(x) \int\limits_r^\infty T(x-t)(\eta - \Phi_n(t))dtdx$$

$$\le \eta \int\limits_r^\infty T(y)h(y)(y-r)dy + \eta \int\limits_r^\infty h(x) \int\limits_{x-r}^\infty T(y)dydx$$

$$+\frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta} \int\limits_r^\infty (\eta - \Phi_n(t)) \int\limits_r^\infty T(x-t)h(x)dxdt$$

$$\le \eta \int\limits_r^\infty T(y)yh(y)dy + \eta \int\limits_0^\infty T(y) \int\limits_r^{r+y} h(x)dxdy$$

$$+\frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta} \int\limits_r^\infty (\eta - \Phi_n(t)) \int\limits_{r-t}^\infty T(y)h(t+y)dydt$$

$$\le \eta \int\limits_r^\infty T(y)yh(y)dy + \eta \int\limits_0^\infty T(y)h(r+y)ydy + \frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta} \int\limits_r^\infty (\eta - \Phi_n(t)) \int\limits_{r-t}^0 T(y)h(t+y)dydt$$

$$+\frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta} \int\limits_r^\infty (\eta - \Phi_n(t)) \int\limits_0^\infty T(y)(h(t) + h(y))dydt$$

$$\leq \eta\int_r^\infty T(y)yh(y)dy+\eta\int_0^\infty T(y)h(r+y)ydy+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int_r^\infty(\eta-\Phi_n(t))h(t)\int_{-\infty}^0 T(y)dydt$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int_r^\infty(\eta-\Phi_n(t))h(t)\int_0^\infty T(y)dydt$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int_r^\infty(\eta-\Phi(t))dt\int_0^\infty T(y)h(y)dy$$

$$\leq \eta\int_r^\infty T(y)yh(y)dy+\eta\int_0^\infty T(y)h(r+y)ydy+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int_r^\infty(\eta-\Phi_{n+1}(t))h(t)dt$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int_r^\infty(\eta-\Phi(t))dt\int_0^\infty T(y)h(y)dy.$$

Из последнего неравенства получим

$$\int_r^\infty(\eta-\Phi_{n+1}(t))h(t)dt\leq\frac{\eta}{2G(\eta/2)-\eta}\Bigg[\eta\int_r^\infty T(y)yh(y)dy+\eta\int_0^\infty T(y)h(r+y)ydy$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int_r^\infty(\eta-\Phi(t))dt\int_0^\infty T(y)h(y)dy\Bigg]\equiv C_0. \tag{40}$$

Следовательно, согласно теореме Б. Леви и теореме 2 имеем, что $h(\eta-\Phi)\in L_1(r,+\infty)$ и

$$\int_r^\infty h(t)(\eta-\Phi(t))dt\leq C_0<+\infty. \tag{41}$$

Так как $h(\eta-\Phi)\in C(\mathbb{R}^+)$, то $h(\eta-\Phi)\in L_1(0,r)$. Итак сходимость интеграла при $m=1$ доказана. Предположим теперь, что $h^{m-1}(\eta-\Phi)\in L_1(\mathbb{R}^+)$, и установим, что $h^m(\eta-\Phi)\in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Сперва отметим, что из индукционного предположения следует, что

$$h^j(\eta-\Phi)\in L_1(\mathbb{R}^+),\quad j=0,1,\dots,m-1. \tag{42}$$

Опять учитывая (25),(30), (29), (31), (11) и (42), из (28) получим

$$\int_r^\infty h^m(\eta-\Phi_{n+1}(x))dx\leq\eta\int_r^\infty T(y)yh^m(y)dy+\eta\int_0^\infty T(y)h^m(r+y)dy$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int_r^\infty(\eta-\Phi_n(t))\int_{r-t}^\infty T(y)h^m(t+y)dydt$$

$$\leq\eta\int_r^\infty T(y)yh^m(y)dy+\eta\int_0^\infty T(y)yh^m(r+y)dy$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int_r^\infty(\eta-\Phi_n(t))\int_{r-t}^0 T(y)h^m(t+y)dydt$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\sum_{j=0}^{m}C_m^j\int\limits_r^\infty(\eta-\Phi_n(t))h^j(t)dt\int\limits_0^\infty T(y)h^{m-j}(y)dy$$

$$\leq\eta\int\limits_r^\infty T(y)yh^m(y)dy+\eta\int\limits_0^\infty T(y)yh^m(r+y)dy$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int\limits_r^\infty(\eta-\Phi_{n+1}(t))h^m(t)dt\int\limits_{-\infty}^0 T(y)dy$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\int\limits_r^\infty(\eta-\Phi_{n+1}(t))h^m(t)dt\int\limits_0^\infty T(y)dy$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\sum_{j=0}^{m-1}C_m^j\int\limits_r^\infty(\eta-\Phi(t))h^j(t)dt\int\limits_0^\infty T(y)h^{m-j}(y)dy,$$

из чего выводим, что

$$\int\limits_r^\infty h^m(x)(\eta-\Phi_{n+1}(x))dx\leq\frac{\eta}{2G(\eta/2)-\eta}\Bigg[\eta\int\limits_r^\infty T(y)yh^m(y)dy+\eta\int\limits_0^\infty T(y)yh^m(r+y)dy$$

$$+\frac{2(\eta-G(\eta/2))}{\eta}\sum_{j=0}^{m-1}C_m^j\int\limits_r^\infty(\eta-\Phi(t))h^j(t)dt\int\limits_0^\infty T(y)h^{m-j}(y)dy\Bigg].$$

Используя (42) и теорему Б. Леви, заключаем, что $h^m(\eta-\Phi)\in L_1(r,+\infty)$. Поскольку

$$h^m,\eta-\Phi\in C(\mathbb{R}^+),$$

то из доказанного имеем, что $h^m(\eta-\Phi)\in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Итак, на основе вышеизложенного и теоремы 1 приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *При условиях теоремы* 1, *если сходится интеграл* (32), *то уравнение* (31) *имеет однопараметрическое семейство решений* $p_c(x,t)=\Phi(x+ct)$, $c\in(\max\{-\nu(k)-m,0\},+\infty)$, *где функция* $\Phi\in\mathfrak{M}$ *и обладает свойством*

$$\int\limits_0^\infty h^m(x)(\eta-\Phi(x))dx<+\infty.\qquad\square$$

Следствие. *При условиях теоремы* 1, *если* $\displaystyle\int_0^\infty x^pT(x)dx<+\infty$ *для некоторого* $p\in\mathbb{N}$, *то* $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}(\eta-\Phi(x))dx<+\infty$.

Доказательство. Действительно, если в теореме 3 в качестве $h(x)$ выберем функцию $h(x)=\sqrt{x}$, $x\in\mathbb{R}^+$, а в качестве $m=2p-2$, то приходим к утверждению следствия.

6. Приложение в эконометрике

В теории распределения богатства страны встречаются нелинейные интегро-дифференциальные уравнения вида (1), в которых ядро K и нелинейность функции G допускают следующие представления:

$$K(x) = \frac{a}{2}e^{-|x|}, \quad G(u) = \gamma(1 - e^{-u}), \quad \gamma > 1. \tag{43}$$

Предположим, что

$$c > \max\{4a - m; 0\}. \tag{44}$$

Из (44) сразу выводим, что $\lambda \in (0, 1/4)$. Легко заметить, что функции K и G удовлетворяют условиям (2) и 1), 2). Проверим выполнение условия (14). Сначала заметим, что

$$T(x) = \frac{a}{2(m+c)} \int\limits_0^\infty e^{-|x-t|}e^{-\lambda t}dt$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a}{2(m+c)} \displaystyle\int\limits_0^x e^{-(x-t)}e^{-\lambda t}dt + \dfrac{a}{2(m+c)} \displaystyle\int\limits_x^\infty e^{-(t-x)}e^{-\lambda t}dt, & x \geq 0, \\ \dfrac{a}{2(m+c)} \displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-(t-x)}e^{-\lambda t}dt, & x < 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a(e^{-\lambda x} - e^{-x})}{2(m+c)(1-\lambda)} + \dfrac{ae^{-\lambda x}}{2(m+c)(1+\lambda)}, & x \geq 0, \\ \dfrac{ae^{x}}{2(m+c)(1+\lambda)}, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда функция Дикмана примет вид

$$L(\mu) = \gamma \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(x)e^{-\mu x}dx$$

$$= \frac{\gamma\lambda}{2}\left(\frac{1}{(1-\lambda)(\mu+\lambda)} - \frac{1}{(1-\lambda)(\mu+1)} + \frac{1}{(\lambda+1)(\mu+\lambda)} + \frac{1}{(\lambda+1)(1-\mu)}\right)$$

$$= \frac{\gamma\lambda}{2}\left(\frac{2}{(1-\lambda^2)(\mu+\lambda)} + \frac{1}{(1-\mu)(1+\lambda)} - \frac{1}{(1-\lambda)(\mu+1)}\right) = \frac{\gamma\lambda}{(\mu+\lambda)(1-\mu^2)} \quad \text{при} \quad \mu \in (0,1).$$

Легко заметить, что при $\mu \in \left(0, \dfrac{\sqrt{\lambda^2+3} - \lambda}{3}\right)$

$$L'(\mu) = \gamma\lambda \frac{3\mu^2 + 2\mu\lambda - 1}{(\mu+\lambda)^2(1-\mu^2)^2} < 0,$$

т. е. функция Дикмана $L(\mu) \downarrow$ на $\left(0, \dfrac{\sqrt{\lambda^2+3} - \lambda}{3}\right)$.

Ниже проверим, что, например, для $\gamma = 2,\ \lambda = 1/8$ существует интервал

$$(a_0, b_0) \subset \left(0, \frac{\sqrt{193} - 1}{24}\right) \subset (0,1)$$

такой, что $L(\mu) < 1$ при $\mu \in (a_0, b_0)$. В случае, когда $\gamma = 2$, $\lambda = 1/8$, неравенство $L(\mu) < 1$ для $\mu \in \Big(0, \dfrac{\sqrt{193}-1}{24}\Big)$ примет следующий вид: $\mu^3 + \dfrac{\mu^2}{8} - \mu + \dfrac{1}{8} < 0$. Очевидно, что при $\mu \in \Big(0, \dfrac{\sqrt{193}-1}{24}\Big)$

$$\mu^3 + \frac{\mu^2}{8} - \mu + \frac{1}{8} < \mu^3 + \frac{\mu}{8} - \mu + \frac{1}{8} = (\mu+1)\Big(\mu^2 - \mu + \frac{1}{8}\Big). \tag{45}$$

Поскольку, например при $\mu \in \Big(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\Big)$, имеет место неравенство $\mu^2 - \mu + \dfrac{1}{8} < 0$, то с учетом (45) мы приходим к оценке $L(\mu) < 1$ при $\mu \in (a_0, b_0)$. Осталось проверить условие 3) для функции $G(u) = \gamma(1 - e^{-u})$. Для этого в качестве ε выберем единицу, а в качестве $c_0 = \gamma$, и неравенство 3) принимает следующий вид:

$$1 - e^{-u} \geq u - u^2, \quad u \in [0, \eta].$$

Последнее неравенство выполняется для всех $u \geq 0$, ибо для функции $\chi(u) = 1 + u^2 - u - e^{-u}$, $u \geq 0$:

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(u) = 2u - 1 + e^{-u} \geq u \geq 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sargan I.D.** The distribution of wealth // Econometrics. 1957. Vol. 25, no. 4, P. 568–590. doi: 10.2307/1905384.
2. **Беллман Р. , Кук К.Л.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
3. **Mondelbrot B.** The Pareto–Lévy law and distribution of income // Int. Economic Rev. 1960. Vol. 1, no. 2. P. 79–106. doi: 10.2307/2525289.
4. **Champernowne D.G.** A model of income distribution // Economic J. 1953. Vol. 63, no. 250. P. 318–351. doi: 10.2307/2227127.
5. **Chen Yu, Liao Yujie, Zhang Qi and Zhang Weiping.** Ruin probabilities for the phase-type dual model perturbed by diffusion // Communications in Statistics — Theory and Methods. 2020. P. 1–19. doi: 10.1080/03610926.2020.1737126.
6. **Daliri Birjandi M.H., Saberi-Nadjafi J., Ghorbani A.** An efficient numerical method for a class of nonlinear Volterra integro-differential equations // J. Appl. Math. 2018. Vol. 2018. Article ID 7461058. 7 p. doi: 10.1155/2018/7461058.
7. **Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.** Об одном интегро-дифференциальном уравнении в задаче распределения богатства страны // Экономика и мат. методы ЦЭМИ РАН. 2009. Т. 45, № 4. С. 84–96.
8. **Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.** О разрешимости одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в задаче распределения дохода.// Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 10. С. 1793–1802.
9. **Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A.** On solvability of a nonlinear problem in theory of income distribution // Eurasian Math. J. 2011. Vol. 2, no. 2. P. 75–88.
10. **Колмогоров А.Н., Фомин В.С.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1980. 542 с.
11. **Хачатрян Х.А., Петросян А.С.** О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна — Стильтеса на всей прямой // Тр. МИАН. 2020. Т. 308. С. 253–264.
12. **Diekmann O.** Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection.// J. Math. Biol. 1978. Vol. 6, no. 2. P. 109–130. doi: 10.1007/BF02450783.
13. **Diekmann O.** Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic // J. Diff. Eq. 1979. Vol. 33, no. 1. P. 58–73.
14. **Diekmann Odo, Kaper Hans G.** On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 1978. Vol. 2, no. 6. P. 721–737. doi: 10.1016/0362-546X(78)90015-9.
15. **Diekmann Odo, Gyllenberg Mats.** Equations with infinite delay: blending the abstract and the concrete // J. Diff. Eq. 2012. Vol. 252, no. 2. P. 819–851.

16. **Будак Б.М., Фомин С.В.** Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 608 с.
17. **Геворкян Г.Г., Енгибарян Н.Б.** Новые теоремы для интегрального уравнения восстановления // Изв. НАН Армении. Матемтика. 1997. Т. 32, № 1. С. 5–20.
18. **Енгибарян Н.Б.** Уравнения восстановления на полуоси // Изв. РАН. Сер. математическая. 1999. Т. 63, № 1. С. 61–76.
19. **Рудин У.** Функциональный анализ. М: Мир., 1975. 444 с.
20. **Пойа Г. , Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. М.: Наука, 1978. 392 с.

Поступила 9.10.2020
После доработки 8.11.2020
Принята к публикации 11.01.2021

Хачатрян Агавард Хачатурович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Национальный аграрный университет Армении, г. Ереван
e-mail: Aghavard59@mail.ru

Хачатрян Хачатур Агавардович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики НАН Армении;
Ереванский государственный университет, г. Ереван;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: Khach82@rambler.ru

Петросян Айкануш Самвеловна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Национальный аграрный университет Армении, г. Ереван;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: Haykuhi25@mail.ru

REFERENCES

1. Sargan I.D. The distribution of wealth. *Econometrics*, 1957, vol. 25, no. 4, pp. 568–590. doi: 10.2307/1905384 .
2. Bellman R., Cooke K.L. *Differential-difference equations.* New York: Academic Press, 1963, 462 p. ISBN: 9780080955148 . Translated to Russian under the title *Differentsial'no-raznostnye uravneniya.* Moscow: Mir Publ., 1967, 548 p.
3. Mondelbrot B. The Pareto–Lévy law and distribution of income. *Int. Economic Rev.*, 1960, vol. 1, no. 2, pp. 79–106. doi: 10.2307/2525289 .
4. Champernowne D.G. A model of income distribution. *Economic J.*, 1953, vol. 63, no. 250, pp. 318–351. doi: 10.2307/2227127 .
5. Chen Yu, Liao Yujie, Zhang Qi and Zhang Weiping. Ruin probabilities for the phase-type dual model perturbed by diffusion. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 2020, pp. 1–19. doi: 10.1080/03610926.2020.1737126 .
6. Daliri Birjandi M.H., Saberi-Nadjafi J., Ghorbani A. An efficient numerical method for a class of nonlinear Volterra integro-differential equations. *J. Appl. Math.*, 2018, vol. 2018, art.-no. 7461058, 7 p. doi: 10.1155/2018/7461058 .
7. Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A. On an integro-differential equation in the problem of wealth distribution. *Ekonomika i Mat. Metody TsEMI RAN*, 2009, vol. 45, no. 4, pp. 84–96.
8. Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A. On the solvability of a nonlinear integro-differential equation arising in the income distribution problem. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 10, pp. 1702–1711. doi: 10.1134/S0965542510100064 .
9. Khachatryan A., Khachatryan Kh. On solvability of a nonlinear problem in theory of income distribution. *Eurasian Math. J.*, 2011, vol. 2, no. 2, pp. 75–88.

10. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis.* Two volumes in one, translated from the first Russian edition 1957–1961. United States: Martino Fine Books, 2012, 280 p. ISBN: 1614273049 . Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza.* Moscow: Nauka Publ., 1980.
11. Khachatryan Kh.A., Petrosyan H.S. On the solvability of a class of nonlinear Hammerstein–Stieltjes integral equations on the whole line. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 308, pp. 238–249. doi: 10.1134/S0081543820010198 .
12. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. *J. Math. Biology.*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109–130. doi: 10.1007/BF02450783 .
13. Diekmann O. Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic. *J. Diff. Eq.*, 1979, vol. 33, no. 1, pp. 58–73. doi: 10.1016/0022-0396(79)90080-9 .
14. Diekmann O., Kaper H.G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1978, vol. 2, no. 6, pp. 721–737. doi: 10.1016/0362-546X(78)90015-9 .
15. Diekmann O., Gyllenberg M. Equations with infinite delay: Blending the abstract and the concrete. *J. Diff. Eq.*, 2012, vol. 252, no. 2, pp. 819–851. doi: 10.1016/j.jde.2011.09.038 .
16. Budak B.M., Fomin S.V. *Multiple integrals, field theory and series. An advanced course in higher mathematics.* Moscow: Mir Publ., 1973, 640 p. ISBN: 0828520968 . Original Russian text published in Budak B.M., Fomin S.V. *Kratnye integraly i ryady.* Moscow: Nauka Publ., 1966.
17. Gevorkyan G.G., Engibaryan N.B. New theorems for the renewal integral equation. *J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci.*, 1997, vol. 32, no. 1, pp. 2–16.
18. Engibaryan N.B. Renewal equations on the semi-axis. *Izv. Math.*, 1999, vol. 63, no. 1, pp. 57–71. doi: 10.1070/im1999v063n01ABEH000228 .
19. Rudin W. *Functional Analysis.* New York: McGraw-Hill, 1973, 397 p. ISBN: 978-0070542259 . Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz.* Moscow: Mir Publ., 1975, 444 p.
20. Pólya G., Szegő G. *Problems and theorems in analysis. Vol. 1.* Berlin: Springer, 1972, 392 p. doi: 10.1007/978-1-4757-1640-5 . Translated to Russian under the title *Zadachi i teoremy iz analiza.* T. 1. Moscow: Nauka Publ., 1978, 392 p.

Received October 9, 2020
Revised November 8, 2020
Accepted January 11, 2021

Funding Agency: The research of the second and third authors was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00223).

Aghavard Khachaturovich Khachatryan, Dr. Phys.-Math. Sci., Armenian National Agrarian University, 0009, Yerevan, Republic of Armenia, e-mail: aghavard59@mail.ru .

Khachatur Aghavardovich Khachatryan, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia, 0019, Yerevan, Republic of Armenia; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119991 Russia, e-mail: Khach82@rambler.ru .

Haykanush Samvelovna Petrosyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Armenian National Agrarian University, 0009, Yerevan, Republic of Armenia; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119991 Russia, e-mail: Haykuhi25@mail.ru .

Cite this article as: A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan. Asymptotic behavior of a solution for one class of nonlinear integro-differential equations in the income distribution problem, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 188–206 .