

УДК 517.958:533.7

**ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ ГАЗА, ПОСТРОЕННОЕ ПО ГРУППЕ ГАЛИЛЕЯ<sup>1</sup>****С. В. Хабиров**

Инварианты группы Галилея определяют инвариантные и частично инвариантные решения уравнений механики сплошной среды. Инвариантные движения имеют точечный коллапс плотности с прямыми мировыми линиями. Рассмотрены инвариантные характеристики уравнений газовой динамики, с помощью которых можно построить слабые решения с разрывом производных. Частично инвариантные решения с линейным полем скоростей исследованы для специальных уравнений состояния газа. Они будут регулярными. Возможны решения с точечным коллапсом в бесконечно удаленной точке. Проведена классификация таких решений для уравнений состояния из групповой классификации уравнений газовой динамики. Движение частиц газа для таких решений происходит по криволинейным траекториям к точечному коллапсу или из точечного источника. При классификации использован метод разделения переменных в уравнении для функций от разных независимых переменных. Одно и то же движение частиц газа возможно для разных уравнений состояния.

Ключевые слова: газовая динамика, группа Галилея, частично инвариантные решения, линейное поле скоростей, точечный коллапс, уравнение состояния, метод разделения переменных.

**S. V. Khabirov. Motion of gas particles based on the Galilei group.**

Invariants of the Galilei group determine the invariant and partially invariant solutions of continuum mechanics equations. Invariant motions have a point density collapse with straight world lines. The invariant characteristics of the equations of gas dynamics, which can be used to construct weak solutions with a discontinuity of the derivatives, are considered. Partially invariant solutions with a linear velocity field are investigated for special gas equations; such solutions are regular. There are possible solutions with a point collapse at an infinitely distant point. A classification of such solutions is given for the state equations from the group classification of the gas dynamics equations. The motion of gas particles for such solutions occurs along curvilinear trajectories to a point collapse or from a point source. The classification uses the method of separation of variables in the equation for functions of different independent variables. The same motion of gas particles is possible for different equations of state.

Keywords: gas dynamics, Galilei group, partially invariant solutions, linear field of velocities, point collapse, state equation, method of separation of variables.

MSC: 76M60, 76N15, 35Q70

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-173-187

**Введение**

Групповой анализ уравнений газовой динамики наиболее продвинут [1; 2]. Вычислена алгебра Ли допускаемой группы преобразований, проведена групповая классификация по уравнениям состояния, построены оптимальные системы для основных допускаемых групп [3]. Составлен граф вложенных подалгебр, позволяющий строить цепочки вложенных подмоделей [4]. Вычислены инвариантные подмодели для основной допускаемой группы, некоторые из которых подробно исследованы [5]. Осуществлена классификация возможных частично инвариантных подмоделей [6; 7]. Выделены классы точных решений: с линейным полем скоростей [8–10], изобарические [11], барохронные и небарохронные регулярные частично инвариантные [12; 13] и др. Подробно исследованы некоторые точные групповые решения из выделенных классов, например [14; 15]. Возможность построения новых точных групповых решений не исчерпана, несмотря на теорию эквивалентных решений. Это можно объяснить сложностью построения нерегулярных частично инвариантных и дифференциально инвариантных подмоделей для

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-29-10071) и по госзаданию (№ 0246-2019-0052).

подалгебр большей размерности. Для таких подмоделей имеет смысл рассматривать частные решения из выделенных классов. Изучение движений частиц газа по точным решениям даст возможность использовать точные решения в приложениях.

В статье представлены инвариантные и новые частные решения частично инвариантной подмодели для трехмерной группы Галилея. Такие решения с линейным полем скоростей имеют точечный коллапс с искривленными траекториями частиц. В результате

1) проведена классификация таких движений для уравнений состояния из групповой классификации уравнений газовой динамики [1];

2) исследованы новые регулярные частично инвариантные решения как частный случай нерегулярных частично инвариантных решений;

3) при классификации таких решений для некоторых классов уравнений состояния развит метод разделения переменных в уравнении с функциями, зависящими от разных независимых переменных.

## 1. Инвариантные решения группы галилеевых переносов

Уравнения газовой динамики [5]

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad \rho_t + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad S_t + \vec{u} \cdot \nabla S = 0; \quad p = f(\rho, S), \quad (1.1)$$

здесь  $t$  — время,  $\nabla$  — градиент по вектору  $\vec{x}$  с декартовыми координатами  $x^1 = x, x^2, x^3$ ,  $\vec{u}$  — скорость,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $S$  — энтропия, функция  $f$  задает уравнение состояния  $f_\rho > 0$ , допускает группу галилеевых преобразований

$$\vec{x}' = x + t\vec{u}_0, \quad \vec{u}' = \vec{u} + \vec{u}_0,$$

где  $\vec{u}_0$  — групповые параметры. Инварианты группы

$$t, \quad \vec{u} - \frac{\vec{x}}{t}, \quad \rho, \quad p, \quad S$$

позволяют строить групповые решения, назначая одни инварианты функциями других. Простейшая возможность — назначить инварианты, содержащие функции, новыми функциями переменной  $t$ :

$$\vec{u} = \frac{\vec{x}}{t} + \vec{u}_1(t), \quad p = p(t), \quad \rho = \rho(t), \quad S = S(t).$$

Такие инвариантные решения будут барохронными [12] и с линейным полем скоростей [8–10]. Подстановка в (1.1) дает

$$\vec{u}_1 = t^{-1}\vec{x}_0, \quad \rho = \rho_0|t|^{-3}, \quad S = S_0, \quad p = f(\rho_0|t|^{-3}, S_0),$$

где  $\vec{x}_0, \rho_0, S_0$  — постоянные.

С точностью до переносов  $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{x}_0$ , допускаемых системой (1.1), выводим решение

$$\vec{u} = \frac{\vec{x}}{t}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{|t|^3}, \quad S = S_0, \quad p = f(\rho_0|t|^{-3}, S_0). \quad (1.2)$$

Движение частиц удовлетворяет соотношению

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}, \quad (1.3)$$

решение которого для (1.2) имеет вид

$$\vec{x} = t\vec{u}_0,$$

где  $\vec{u}_0$  — скорость частицы (глобальные лагранжевы координаты). В момент  $t = 0$  все частицы находятся в одной точке с разными скоростями. Получаем два решения: первое решение определено для  $t < 0$ , которое задает коллапс частиц  $\rho \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow 0$ ; второе решение определено для  $t > 0$  — мгновенный источник. Матрица Якоби  $J = \|\partial x^i / \partial u_0^j\|$  имеет определитель  $\det J = t^3$ , обращающийся в нуль при  $t = 0$  (коллапс). Ранг матрицы  $\text{rank} J = 0$  при  $t = 0$ , что отвечает нулевой размерности многообразия коллапса. Частица со скоростью  $\vec{u}_0$  движется по прямой в обоих решениях. Для каждого решения можно ввести локальные лагранжевы координаты  $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ . Тогда  $t_0 \vec{u}_0 = \vec{x}_0$ ,  $\vec{x} = t t_0^{-1} \vec{x}_0$  — закон движения частицы. Если начальные положения частиц находятся на сфере радиуса  $r$  с центром в точке  $\vec{x}_1$ :  $|\vec{x}_0 - \vec{x}_1| = r$ , то в момент  $t$  частицы будут на сфере  $|\vec{x} - t t_0^{-1} \vec{x}_1| = t t_0^{-1} r$  с центром,двигающимся как частица, и с изменяющимся с постоянной скоростью радиусом.

Если частицы в начальный момент  $t_0$  находились на плоскости  $\vec{n} \cdot \vec{x}_0 = d$ , где  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали,  $d$  — расстояние плоскости до точки коллапса, то в момент  $t$  частицы будут на плоскости  $\vec{n} \cdot \vec{x} = d t_0^{-1} t$ , параллельной исходной. Таким образом, многогранник перейдет в подобный многогранник, а любая замкнутая поверхность — в подобную поверхность. Для системы (1.1) это контактные характеристики [5].

Звуковая поверхность определяется равенством

$$|\vec{u}|^2 = f_\rho(\rho_0 t^{-3}, S_0) = c^2 \Rightarrow |\vec{x}| = a(t) = |t|c(t)$$

и является сферой, радиус которой при  $t \rightarrow 0$  стремится к бесконечности, к постоянной величине или к нулю в зависимости от поведения при  $\rho \rightarrow \infty$  функции, задающей уравнение состояние:  $\rho^{-2/3} f_\rho \rightarrow \infty, \text{const}$  или  $0$  соответственно.

Вне звуковой сферы движение сверхзвуковое, внутри дозвуковое.

Уравнения (1.1) имеют две звуковые характеристики  $C_\pm$ :  $h(t, \vec{x}) = 0$ , которые определяют системой уравнений [5]

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} \pm c \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{\vec{x}}{t} \pm c(t) \frac{\nabla h}{|\nabla h|}, \quad \frac{dh_j}{dt} = -\vec{u}_j \cdot \nabla h - c_j |\nabla h| = -t^{-1} h_j,$$

где  $h_j = \partial h / \partial x^j$ . Начальная поверхность  $h_0(\vec{x}_0) = 0$  при  $t = t_0$ . Для решения (1.2) формулы

$$h_j = \frac{t_0}{t} h_{j0}, \quad \vec{x} = \frac{t \vec{x}_0}{t_0} \pm t \frac{\nabla_0 h_0}{|\nabla_0 h_0|} \int_{t_0}^t \frac{c(t)}{t} dt$$

задают параметрическое представление характеристик  $C_\pm$ .

Например, для начальной сферы  $h_0(\vec{x}_0) = (\vec{x}_0 - \vec{x}_1) - r^2 = 0$  характеристики  $C_\pm$  определяются равенством

$$|\vec{x} - t t_0^{-1} \vec{x}_1| = \left| t t_0^{-1} r \pm t \int_{t_0}^t \tau^{-1} c(\tau) d\tau \right|.$$

Радиус сферы при  $t \rightarrow 0$ : конечен, если  $f \sim \rho^{5/3}$  при  $\rho \rightarrow \infty$ ; нулевой, если  $\rho^{5/3} f(\rho) \sim 0$ ; и бесконечен, если  $\rho^{5/3} f(\rho) \sim \infty$ . Характеристика  $C_+$  из точки  $\vec{x}_0$  называется *коноидом* [5]:

$$|\vec{x} - t t_0^{-1} \vec{x}_0| = \left| t \int_{t_0}^t \tau^{-1} c(\tau) d\tau \right| = R(t).$$

При  $t \rightarrow \infty$ ,  $t > t_0 > 0$  радиус сферы  $R(t) \rightarrow \infty$ . Вычисление характеристик важно для сопряжения решений через слабый разрыв, например, для сопряжения решений (1.2) с покоем или двух решений (1.2) через решение инвариантной подмодели ранга 2 [16]. Сопряжение можно производить и через устойчивую ударную волну.

## 2. Решения с линейным полем скоростей частично инвариантной подмодели

По группе галилеевых переносов можно рассмотреть нерегулярные частично инвариантные решения дефекта 2 или 1. Для этого нужно выбрать инварианты  $t, p, \rho$  (или  $t, \rho$ ) в качестве независимых переменных для остальных инвариантов. Ранг такого решения равен 3 (или 2). Система (1.1) становится переопределенной. Изучение совместности — сложная задача получения нерегулярной частично инвариантной подмодели. Можно рассмотреть частные решения этой подмодели, например с линейным полем скоростей, но не барахронные

$$\vec{u} = \frac{\vec{x}}{t} + t\vec{u}_1(t), \quad (2.1)$$

$p, \rho$  — функции общего вида. Естественно считать такие решения регулярными частично инвариантными (РЧИР) ранга 1 дефекта 2, что расширяет множество РЧИР из [13]. Подстановка в систему (1.1) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} S_t + \left(\frac{\vec{x}}{t} + t\vec{u}_1'\right) \cdot \nabla S &= 0 \Rightarrow S = S(\vec{y}), \quad \vec{y} = \frac{\vec{x}}{t} - \vec{u}_1(t); \\ \rho_t + \left(\frac{\vec{x}}{t} + t\vec{u}_1'\right) \cdot \nabla \rho + \frac{3}{t}\rho &= 0 \Rightarrow \rho = t^{-3}R(\vec{y}), \quad p = P(t, \vec{y}), \\ R^{-1}\nabla P = \vec{n}(t) = -t^{-3}(t^2\vec{u}_1')' &\Rightarrow \vec{n} = q(t)\vec{N}, \quad |\vec{N}| = 1, \quad \vec{N} = \text{const}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$R = r'(z) \neq 0, \quad z = \vec{N} \cdot \vec{y}, \quad P = q(t)r(z) + Q(t). \quad (2.3)$$

Переменные  $z$  и  $r$  определены с точностью до постоянного слагаемого. Остается уравнение состояния, переопределяющее систему равенств

$$q(t)r(z) + Q(t) = f(S(y), t^{-3}r'(z)). \quad (2.4)$$

Если движение с переменной энтропией  $f_S \neq 0$ ,  $S \neq \text{const}$ , то  $S = S(z)$ . Система (1.1) не изменится, если вместо  $S$  взять функцию от  $S$  (преобразование эквивалентности), изменится лишь уравнение состояния. Поэтому для энтропийных решений можно считать  $S(z) = z$ . Если задать функции  $q(t)$ ,  $r(z)$ ,  $Q(t)$ , то равенство (2.4) определяет функцию  $f(S, \rho)$ . Если уравнение состояния задается некоторым классом функций, зависящих от одного переменного, то движение определяется переопределенным равенством (2.4), в котором надо разделить независимые переменные.

## 3. Изоэнтропические решения

Для решений с постоянной энтропией уравнение (2.4),

$$q(t)r(z) + Q(t) = f(|t|^{-3}r'(z)), \quad (3.1)$$

дифференцируем по  $z$  и по  $t$ :  $qr'^2 = f'\rho r''$ ,  $tq'r + tQ' = -3\rho f'$ . Исключая  $f$ , получим

$$\frac{tq'}{q}r + \frac{tQ'}{q} = -3\frac{r'^2}{r''},$$

где  $r'' \neq 0$ , иначе имеем инвариантное решение.

После дифференцирования по  $t$  переменные разделяются:

$$\begin{aligned} tq' = kq, \quad tQ' = nq &\Rightarrow q = q_0|t|^k, \quad Q = \frac{n}{k}q_0|t|^k \quad (k \neq 0), \quad nq_0 \ln|t| \quad (k = 0), \\ \frac{r''}{r'} = -\frac{3r'}{kr + n} &\Rightarrow r = r_0|z|^{k/(k+3)} \quad (k \neq -3, 0), \quad e^{cz} \quad (k = -3), \quad \frac{1}{3} \ln|z| \quad (k = 0). \end{aligned}$$

При  $k \neq 0$  можно считать  $n = 0$ , при  $k = 0$  можно считать  $n = 1$  (преобразования эквивалентности). Из (3.1) получаем уравнения состояния:

- 1)  $k \neq 0, -3, f(\rho) = q_0 r_0^{1+k/3} \rho^{-k/3}$ ;
- 2)  $k = -3, f(\rho) = C^{-1} q_0 \rho$ ;
- 3)  $k = 0, f(\rho) = \frac{1}{3} q_0 \ln(3\rho)$ .

Формулы (2.1)–(2.3) при уравнениях состояния, описанных выше, дают соответственно следующие решения:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \vec{u} &= \frac{\vec{x}}{t} - \vec{N} q_0, \quad \begin{cases} \frac{t|t|^{k+2}}{k+4}, & k \neq -4, \\ t^{-1} \ln |t|, & k = -4, \end{cases} \quad z = \frac{\vec{N} \cdot \vec{x}}{t} + q_0, \quad \begin{cases} \frac{t|t|^{k+2}}{(k+4)(k+3)}, & k \neq -4, \\ t^{-1}(1 + \ln |t|), & k = -4; \end{cases} \\
 2) \quad \vec{u} &= \frac{\vec{x}}{t} - q_0 \vec{N}, \quad z = t^{-1} \vec{N} \cdot \vec{x} + q_0 \ln |t|; \\
 3) \quad \vec{u} &= \frac{\vec{x}}{t} - \frac{1}{4} q_0 \vec{N} t^3, \quad z = t^{-1} \vec{N} \cdot \vec{x} + \frac{1}{12} q_0 t^3.
 \end{aligned}$$

Движения частиц для полученных решений описываются уравнением (1.3).

При  $k = -4$  решение 1) определяет движение в декартовом базисе  $\vec{i} = \vec{N}, \vec{j}, \vec{k}$ :

$$x = tu_0 + q_0(1 + \ln |t|), \quad x^2 = tv_0, \quad x^3 = tw_0,$$

где  $u_0, v_0, w_0$  — глобальные лагранжевы координаты. Точечный коллапс происходит при  $t = 0$  в бесконечно удаленной точке  $(-\infty, 0, 0)$  при  $q_0 > 0$ . Формулы задают два решения: первое — при  $t < 0$ , второе — при  $t > 0$ . Величина  $\vec{u}_0$  — скорость частицы при  $|t| \rightarrow \infty$ . Первое решение — коллапс переходит во второе решение — источник после замены  $t \rightarrow -t, \vec{u}_0 \rightarrow -\vec{u}_0$ . Проекция мировых линий на плоскость  $(t, x)$  разделяются на два сорта кривых  $x = q_0(1 + \ln |t|)$ , для которых  $u_0 = 0, x_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Кривые первого сорта имеют максимум при  $t_m = -q_0 u_0^{-1}, u_0 < 0, x_m = q_0 \ln |q_0 u_0^{-1}|$ ; кривые второго сорта монотонны  $x_t = u_0 + q_0 t^{-1} \rightarrow u_0 > 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 1). Мировые линии не имеют асимптот при  $t \rightarrow \infty$ .

При  $k = -3$  решение 2) определяет движение частиц  $\vec{x} = t(\vec{u}_0 - q_0 \vec{i} \ln |t|)$  с коллапсом при  $t = 0$  в точке  $\vec{x} = 0$ . Проекция на плоскость  $(t, x)$  — квазилуч (рис. 2):

$$x = t(u_0 - q_0 \ln |t|).$$

Получаем два решения: а) коллапс при  $t < 0$ , б) источник при  $t > 0$ , которые переходят друг в друга при замене  $t \rightarrow -t, \vec{u}_0 \rightarrow -\vec{u}_0$ . Ось  $x$  касается квазилучей в точке коллапса.

При  $k = 0$  решение 3) определяет движение частиц

$$\vec{x} = t\vec{u}_0 - \frac{1}{12} \vec{i} q_0 t^4$$

с коллапсом в точке  $\vec{x} = 0$  при  $t = 0$ . Здесь  $\vec{u}_0$  — скорость частиц в момент коллапса. Два решения при  $t > 0$  и при  $t < 0$  переходят друг в друга при замене  $t \rightarrow -t, \vec{u}_0 \rightarrow -\vec{u}_0$ . Для

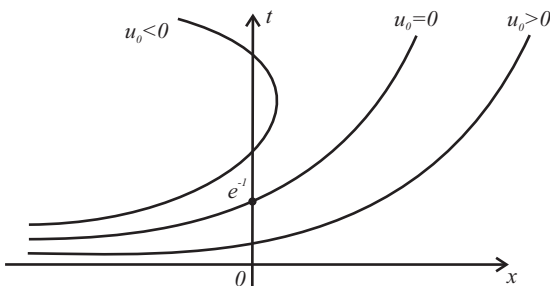


Рис. 1. Источник в бесконечно удаленной точке при  $k = -4$

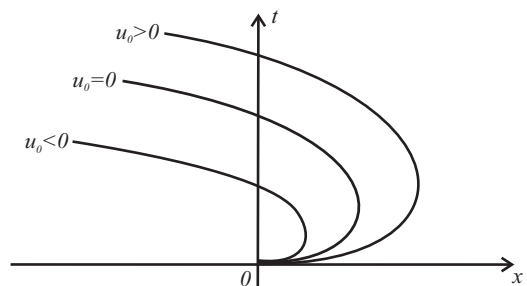


Рис. 2. Источник в начале из квазилучей при  $k = -3$

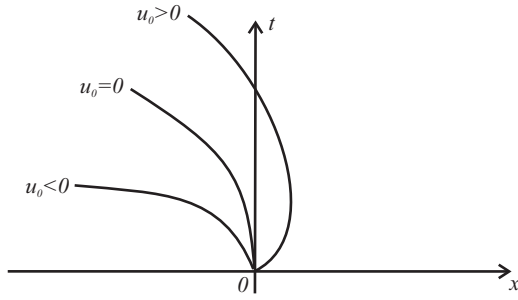


Рис. 3. Источник в начале из лучей инвариантного решения при  $t \rightarrow \infty$  для  $k = 0$

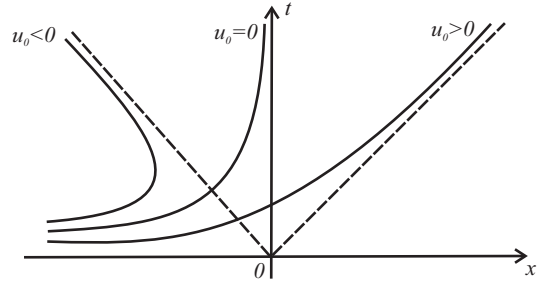


Рис. 4. Источник в бесконечности при  $k < -4$  с асимптотами мировых линий

проекций мировых линий на плоскость  $(t, x)$  при  $t \rightarrow \infty$  частицы двигаются в бесконечность  $x \rightarrow -\infty$ . Для проекций на другие декартовы плоскости и при  $t \rightarrow 0$  — движение, как для инвариантного решения (рис. 3).

При  $k \neq -4, -3, 0$  решение 1) в выбранной декартовой системе координат задается равенствами

$$x = tu_0 - q_0 \frac{|t|^{k+4}}{(k+4)(k+3)}, \quad x^2 = tv_0, \quad x^3 = tw_0.$$

Картина мировых линий зависит от показателя  $k$  (рис. 4) и инвариантна относительно замены  $t \rightarrow -t, \vec{u}_0 \rightarrow -\vec{u}_0$ .

При  $k < -4$  коллапс наступает при  $t \rightarrow 0$  в бесконечно удаленной точке с асимптотой  $t = 0$ , а при  $t \rightarrow \infty$  мировые линии имеют асимптоты (рис. 4).

При  $-4 < k < -3$  коллапс наступает при  $t \rightarrow 0$  в начале, где мировые линии касаются оси  $x$ , при  $t \rightarrow \infty$  асимптот нет (рис. 2).

При  $k > -3$  коллапс при  $t = 0$  в начале имеет веер касательных для мировых линий, как при инвариантном решении, и нет асимптот при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 3).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Для изоэнтропических решений уравнений газовой динамики (1.1) найдутся уравнения состояния такие, что частично инвариантное решение ранга 1 дефекта 2 группы Галилея с линейным полем скоростей задают движения по криволинейным траекториям с точечным коллапсом — источником одного из следующих видов:

- 1) в бесконечно удаленной точке при  $t = 0$  без асимптот при  $t \rightarrow \infty$  (см. рис. 1);
- 2) в начале из квазилучей, касающихся оси  $x$  (см. рис. 2);
- 3) в начале из лучей, как у инвариантного решения при  $t = 0$  (см. рис. 3);
- 4) в бесконечно удаленной точке при  $t = 0$  с асимптотами при  $t \rightarrow \infty$  (см. рис. 4).

#### 4. Решения с переменной энтропией для уравнения состояния, разделенного в произведение функций одного переменного

При групповой классификации уравнений газовой динамики [1] получены уравнения состояния, расширяющие допускаемую группу. Наиболее общее уравнение состояния представляется в виде произведения функций одного термодинамического параметра (энтропии, плотности, давления):  $S = G(\rho)H(p)$ . Соотношение (2.4),

$$z = G(|t|^{-3}r'(z))H(q(t)r(z) + Q(t)), \quad (4.1)$$

должно определить функции  $r(z)$ ,  $q(t) \neq 0$ ,  $Q(t)$ ,  $G(\rho)$ ,  $H(p)$ . Величина  $Q$  определена с точностью до слагаемого  $\lambda_0 q(t) + Q_0$ ,  $\lambda_0, Q_0$  — постоянные.

Дифференцирование (4.1) по  $z$  и по  $t$  дает

$$\frac{1}{z} = \rho \frac{G' r''}{G r'} + \frac{H'}{H} q r', \quad \rho \frac{G'}{G} = \frac{1}{3} \frac{H'}{H} (t q' r + t Q').$$

Из этих равенств исключаем функцию  $H$ :

$$G_1(\rho) \left( \frac{3}{q_1 r + Q_1} - \frac{z''}{z'} \right) = \frac{z'}{z}; \quad (4.2)$$

здесь  $G_1 = \rho G^{-1} G' \neq 0$ ,  $q_1 = q^{-1} q_\tau$ ,  $Q_1 = q^{-1} Q_\tau$ ,  $\tau = \ln |t|$ ,  $z(r)$  — обратная функция к функции  $r(z)$ .

Дифференцируем (4.2) по  $t$  и по  $z$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{G'_1}{G_1} \left( -\frac{z''}{z'} + \frac{3}{q_1 r + Q_1} \right) + \frac{q_{1\tau} r + Q_{1\tau}}{(q_1 r + Q_1)^2} &= 0, \\ \rho \frac{G'_1}{G_1} \frac{z''}{z'} \left( -\frac{z''}{z'} + \frac{3}{q_1 r + Q_1} \right) + \left( \frac{z''}{z'} \right)' + \frac{3q_1}{(q_1 r + Q_1)^2} + G_1^{-1} \left( \frac{z'}{z} \right)' &= 0, \end{aligned}$$

исключим функцию  $G_1$ :

$$\frac{z''}{z'} (q_{1\tau} r + Q_{1\tau}) = 3q_1 + 3 \left( \frac{z''}{z'} - \frac{z'}{z} \right) (q_1 r + Q_1) + \left( \frac{z'''}{z'} - 2 \left( \frac{z''}{z'} \right)^2 + \frac{z''}{z} \right) (q_1 r + Q_1)^2. \quad (4.3)$$

Получили равенство в виде суммы произведений функций от разных независимых переменных  $\tau$  и  $r$ . Путем дифференцирования можно разделить переменные.

Если  $z'' = 0$ , то  $r'' = 0$ ,  $r = \rho_0 z$ , функция  $H(p)$  линейна. Уравнение состояния имеет вид

$$p = p_0 + S f(\rho), \quad Q = p_0, \quad q = \rho_0^{-1} f(\rho_0 |t|^{-3}).$$

Решение определяется функцией  $f(\rho)$  из формул (2.1), (2.2):

$$\rho = \frac{\rho_0}{|t|^3}, \quad \vec{u} = \frac{\vec{x}}{t} - \vec{N} t^{-1} \rho_0^{-1} \int t^3 f(\rho_0 |t|^{-3}) dt. \quad (4.4)$$

Далее считаем  $z'' \neq 0$ . Пусть  $q_1 \neq 0$ ,  $\sigma = z z'^{-1}$ ,  $Q_1 q_1^{-1} = \lambda$ ,  $\lambda$  определено с точностью до постоянного слагаемого. Равенство (4.3) принимает вид

$$\frac{1 - \sigma'}{\sigma} \left( \frac{q_{1\tau}}{q_1} r + \frac{Q_{1\tau}}{q_1} \right) = 3 - 3 \frac{\sigma'}{\sigma} (r + \lambda) - \frac{\sigma''}{\sigma} q_1 (r + \lambda)^2. \quad (4.5)$$

Если  $\sigma' = 1$ , то  $r = r_0 z$  и получим решение (4.4).

Далее  $\sigma' \neq 1$ . Дифференцирование по  $\tau$  убирает два слагаемых из (4.5):

$$\left( \frac{q_{1\tau}}{q_1} \right)_\tau r + \left( \frac{Q_{1\tau}}{q_1} \right)_\tau + \frac{3\sigma'}{1 - \sigma'} \lambda_\tau + \frac{\sigma''}{1 - \sigma'} (q_{1\tau} r^2 + 2r(\lambda q_1)_\tau + (\lambda^2 q_1)_\tau) = 0. \quad (4.6)$$

Дифференцирование по  $r$  дважды убирает еще два слагаемых:

$$3\lambda_\tau \left( \frac{1}{1 - \sigma'} \right)'' + \left( \frac{\sigma''}{1 - \sigma'} \right)'' (\lambda^2 q_1)_\tau + 2 \left( r \frac{\sigma''}{1 - \sigma'} \right)'' (\lambda q_1)_\tau + \left( r^2 \frac{\sigma''}{1 - \sigma'} \right)'' q_{1\tau} = 0. \quad (4.7)$$

Если  $\lambda_\tau \neq 0$ , то деление на  $\lambda_\tau$  и дифференцирование по  $\tau$  дает

$$\left( \frac{\sigma''}{1 - \sigma'} \right)'' \left( \frac{\lambda^2 q_1}{\lambda_\tau} \right)_\tau + 2 \left( r \frac{\sigma''}{1 - \sigma'} \right)'' \left( \frac{\lambda q_1}{\lambda_\tau} \right)_\tau + \left( r^2 \frac{\sigma''}{1 - \sigma'} \right)'' \left( \frac{q_{1\tau}}{\lambda_\tau} \right)_\tau = 0. \quad (4.8)$$

Если  $\sigma_1'' \neq 0$ ,  $\sigma_1 = (1 - \sigma')^{-1}\sigma''$ , то деление на  $\sigma_1''$  и дифференцирование по  $r$  приводит к разделению переменных:

$$2\left(\frac{(r\sigma_1)''}{\sigma_1''}\right)' \left(\frac{(\lambda q_1)_\tau}{\lambda_\tau}\right)_\tau + \left(\frac{(r^2\sigma_1)''}{\sigma_1''}\right)' \left(\frac{q_{1\tau}}{\lambda_\tau}\right)_\tau = 0. \quad (4.9)$$

Если  $(q_{1\tau}\lambda_\tau^{-1})_\tau \neq 0$ ,  $((r\sigma_1)''\sigma_1''^{-1})' \neq 0$ , то

$$\lambda(q_1 - K_1) = Kq_1 + K_2, \quad \sigma_1(r^2 + 2Kr + K_3) = K_4r + K_5, \quad (4.10)$$

где  $K, K_i$  — постоянные. Можно считать  $K = 0$ , так как  $\lambda$  определена с точностью до постоянного слагаемого.

Подстановка (4.10) в (4.8) дает равенство  $-K_3q_{1\tau} + \lambda\lambda_\tau(q_1 + K_1) = K_6\lambda_\tau$ , которое в силу (4.10) с  $K = 0$  принимает вид  $K_3K_2\lambda^{-2} + 2K_1\lambda + K_2 = K_6$ . Так как  $\lambda_\tau \neq 0$ ,  $q_1 \neq 0$ , то  $K_1 = 0$ ,  $K_3 = 0$ ,  $K_6 = K_2 \neq 0$ ,

$$q_1 = K_2\lambda^{-1}, \quad \sigma_1 = K_4r^{-1} + K_5r^{-2} = \sigma''(1 - \sigma')^{-1}. \quad (4.11)$$

Из (4.7) следует уравнение  $K_2\sigma'' + 3 = (K_7r + K_8)(1 - \sigma')$ , которое совместно с (4.11), только если  $K_5 = 0$ ,  $K_7(K_4 - 1) = 0$ ,  $K_4(K_4 + 1) = 0$ ,  $K_4K_8 = 0$ . Если  $K_4 = 0$ , то  $\sigma_1 = 0$ , что противоречит предположению  $\sigma_1 \neq 0$ . Значит,  $K_4 = -1$ ,  $K_7 = K_8 = 0$ ,  $\sigma = r - \frac{3}{2}K_2^{-1}r^2 + \text{const.}$

Из (4.6) следует  $\lambda_\tau = 0$ , что противоречит предположению.

Возвращаемся к альтернативе последнего предположения (4.10). Равенство (4.9) выполнено в следующих трех случаях.

- (1):  $\left(\frac{q_{1\tau}}{\lambda_\tau}\right)_\tau = 0$ ,  $\left(\frac{(\lambda q_1)_\tau}{\lambda_\tau}\right) = 0 \Rightarrow q_1 = k$ , (4.8)  $\Rightarrow k = 0$ ; противоречие.
- (2):  $\left(\frac{q_{1\tau}}{\lambda_\tau}\right)_\tau = 0$ ,  $\left(\frac{(r\sigma_1)''}{\sigma_1''}\right)' = 0 \Rightarrow q_1 = C\lambda + k$ ,  $r\sigma_1 = Dr + n$ ,  $n \neq 0$ ,  
(4.8)  $\Rightarrow 3C\lambda + k = 0 \Rightarrow C = k = 0$ ; противоречие.
- (3):  $\left(\frac{(r\sigma_1)''}{\sigma_1''}\right)' = 0$ ,  $\left(\frac{(r^2\sigma_1)''}{\sigma_1''}\right)' = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{n}{r}$ ,  $n \neq 0 \Rightarrow (1 - \sigma')^{-1} = C_0r^n \neq 0$ ,  
(4.8)  $\Rightarrow \lambda q_1 = D\lambda + D_1$ , (4.7)  $\Rightarrow D = 0$ ,  $n = -1$ ,  $D_1 = 3C_0$ ,  
(4.6)  $\Rightarrow \lambda_\tau = 0$ ; противоречие.

Следовательно, справедлива альтернатива предположению  $\sigma_1'' \neq 0$ :

$$\sigma_1'' = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \left(\frac{1}{1 - \sigma'}\right)'(1 - \sigma') = Ar + B, \quad \lambda_\tau \neq 0, \quad \sigma_1' \neq 1, \quad q_1 \neq 0,$$

$$(4.7), (4.8) \Rightarrow A = B = 0, \quad \sigma' = C \neq 1, \quad \sigma = Cr + B,$$

$$(4.5), (4.6) \Rightarrow q_{1\tau} = kq_1, \quad Q_{1\tau} = Dq_1 - \frac{3C}{C-1}Q_1, \quad k = 0, \quad 3B = D(1 - C).$$

При  $C = 0$  решение принимает вид  $B \neq 0, r = B \ln|z|, q = q_0|t|^n, n \neq 0, Q = 3Bq(\ln|t| + M) + p_0$ ,

$$\rho = \frac{B}{z|t|^3}, \quad \vec{u} = \frac{\vec{x}}{t} - \vec{N}q_0 \begin{cases} \frac{t|t|^{n+2}}{n+4}, & n \neq -4, \\ t^{-1} \ln|t|, & n = -4, \end{cases}$$

$$S = z = \frac{\vec{N} \cdot \vec{x}}{t} + q_0 \begin{cases} \frac{t|t|^{n+2}}{(n+3)(n+4)}, & n \neq 3, -4, \\ \frac{|t|}{t} \ln|t|, & n = -3, \\ -\frac{1}{t}(1 + \ln|t|), & n = -4 \end{cases} \quad (4.12)$$



с уравнением состояния  $p = q_0 B \left| \frac{B}{\rho S} \right|^{n/3} (r_0 - \ln \rho) + p_0$ , где  $B$ ,  $r_0$ ,  $p_0$ ,  $q_0$  — постоянные.

При  $C \neq 0$  решение для  $\vec{u}$ ,  $S$  совпадает с (4.12), а  $r = r_0 |z|^c$ ,  $\rho = C r_0 z |z|^{c-2} |t|^{-3}$ ,

$$p = p_0 + q_0 r_0 |t|^n |z|^c + Q_0 q_0 \begin{cases} \frac{|t|^{n+m}}{n+m}, & n \neq m = \frac{3c}{1-c}, \\ \ln |t|, & n = m. \end{cases}$$

Отсюда получается уравнение состояния после исключения  $t$ .

Рассмотрим следующую возможность:  $\lambda_\tau = 0$ ,  $\sigma' \neq 1$ ,  $q_1 \neq 0$ ,  $z'' \neq 0$ . В этом случае  $\lambda = \lambda_0$  — постоянная,  $Q = \lambda_0 q + p_0$ . Так как  $r(z)$  определена с точностью до постоянного слагаемого, то можно считать  $\lambda_0 = 0$ ,  $Q_1 = 0$ . Уравнение (4.5) принимает вид

$$\frac{q_{1\tau}}{q_1^2} = \frac{3}{q_1} \frac{r^{-1} \sigma - \sigma'}{1 - \sigma'} - \frac{r \sigma''}{1 - \sigma'}. \quad (4.13)$$

После разделения переменных получим уравнения при  $q_{1\tau} \neq 0$

$$\begin{aligned} r^{-1} \sigma &= k + \sigma'(1 - k), \quad k \neq 1 \Rightarrow r = (r_0 |z|^{k/(k-1)} + M)^{(k-1)/k}, \\ \frac{q_{1\tau}}{q_1^2} &= \frac{3k}{q_1} + \frac{k}{k-1} \Rightarrow q = q_0 \left| |t|^{3k} + D \right|^{(k-1)/k}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $r_0$ ,  $M$ ,  $q_0$ ,  $D$  — постоянные. Если  $q_{1\tau} = 0$ , то  $Q = p_0$ ,  $q = q_0 |t|^k$ ,  $k \neq 0$  и уравнение (4.13) имеет 4 типа решений:

$$\begin{aligned} 1) \quad r &= (r_0 |z|^m + M)^{k/(k+3)}, & m \neq 0, & \quad k \neq -3; \\ 2) \quad r &= (r_0 \ln |z| + M)^{k/(k+3)}, & & \quad k \neq -3; \\ 3) \quad r &= r_0 e^{c|z|^m}, & m \neq 0, & \quad k \neq -3; \\ 4) \quad r &= r_0 |z|^n, & n \neq 0, 1, & \quad k = -3. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Решения уравнений газовой динамики строятся по формулам (2.1)–(2.3).

Последний случай:  $q_1 = 0$ ,  $z'' \neq 0 \Rightarrow q = q_0 \neq 0$ ,  $q_0 Q_1 = Q_\tau \neq 0$ . Равенство (4.3) принимает вид

$$\frac{Q_{1\tau}}{Q_1^2} = 3 \left( 1 - \frac{z'^2}{z z''} \right) \frac{1}{Q_1} + \frac{z'''}{z''} - 2 \frac{z''}{z'} + \frac{z'}{z}. \quad (4.16)$$

Если  $Q_{1\tau} \neq \text{const}$ , то коэффициент при  $Q_1^{-1}$  постоянен и разделение переменных дает интегрируемые уравнения  $r = r_0 |z|^{1-k}$ ,  $k \neq 0, 1$ ;  $Q = p_0 + D |t|^{3(1-k^{-1})}$ . Решение выразим следующими соотношениями:

$$\rho = |t|^{-3} r', \quad \vec{u} = \frac{\vec{x}}{t} - \frac{1}{4} \vec{N} q_0 t^3, \quad S = z = t^{-1} \vec{N} \cdot \vec{x} + \frac{1}{12} q_0 t^3 \quad (4.17)$$

для уравнения состояния

$$p = p_0 + |S|^{1-k} (q_0 r_0 + D (r_0 (1-k))^{1-1/k} \rho^{1/k-1}).$$

Если  $Q_1 = m^{-1}$  — постоянная, то  $Q = q_0 m^{-1} \ln |t| + p_0$  и (4.16) принимает вид

$$\sigma'' + 3m\sigma' = 0, \quad \sigma = z z'^{-1}.$$

Решения этого уравнения

$$r = \frac{1}{3m} \ln(|z|^{3mC} + M), \quad \frac{1}{3m} \ln |\ln |z| + M|, \quad C \ln |z|, \quad (4.18)$$

где  $C$ ,  $M$  — постоянные, определяют решения по формулам (2.1)–(2.3).

Из приведенных вычислений следует утверждение.

**Теорема 2.** Для решений системы (1.1) с переменной энтропией найдутся уравнения состояния, разделенные в произведения функций одного переменного, такие что частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 2 группы Галилея с линейным полем скоростей задаются формулами (4.4), (4.12), (4.15), (4.17), (4.18).

## 5. Решения с переменной энтропией для уравнения состояния из групповой классификации

При групповой классификации уравнений газовой динамики (1.1) расширение допускаемой группы до 12-параметрической происходит, если уравнения состояния имеют вид [1]

$$SH(p) = G(\rho S), \quad H' \neq 0 \quad G' \neq 0. \quad (5.1)$$

Для решений (2.1)–(2.3) необходимо исследовать на совместность выражение

$$zH(q(t)r(z) + Q(t)) = G(t^{-3}zr'(z)).$$

Дифференцирование по  $t$  и по  $z$  приводит к соотношениям

$$\frac{H'}{H}(q_\tau r + Q_\tau) = -3\mu \frac{G'}{G}, \quad \frac{1}{z} + r'q \frac{H'}{H} = \left(\frac{r''}{r'} + \frac{1}{z}\right)\mu \frac{G'}{G},$$

где  $\tau = \ln |t|$ ,  $\mu = t^{-3}zr'(z)$ .

Исключая из этих равенств функцию  $H$ , получаем

$$\frac{G}{\mu G'} = \sigma' + \frac{3\sigma}{q_1 r + Q_1},$$

где  $\sigma(r) = zz'^{-1} \neq 0$ ,  $q_1 = q^{-1}q_\tau$ ,  $Q_1 = q^{-1}Q_\tau$ ,  $z(r)$  — обратная к  $r(z)$  функция. Дифференцирование по  $\tau$  и по  $r$ , исключение  $G$  приводят к равенству

$$\sigma'' + \frac{3\sigma'}{q_1 r + Q_1} - \frac{3\sigma q_1}{(q_1 r + Q_1)^2} = \frac{\sigma'(q_{1\tau} r + Q_{1\tau})}{(q_1 r + Q_1)^2}. \quad (5.2)$$

Дифференцирование (5.2) по  $\tau$  дает

$$\begin{aligned} & ((q_{1\tau\tau} + 3q_{1\tau})r + Q_{1\tau\tau} + 3Q_{1\tau})(q_1 r + Q_1) - 2(q_{1\tau} r + Q_{1\tau})^2 \\ & = \frac{3\sigma}{\sigma'}(q_1 q_{1\tau} r + 2q_1 Q_{1\tau} - Q_1 q_{1\tau}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Дифференцирование трижды по  $r$  разделяет переменные:

$$q_1 q_{1\tau} \left(\frac{r\sigma}{\sigma'}\right)''' + (2q_1 Q_{1\tau} - Q_1 q_{1\tau}) \left(\frac{\sigma}{\sigma'}\right)''' = 0. \quad (5.4)$$

Если  $q_{1\tau} \neq 0$ ,  $(\sigma\sigma'^{-1})''' \neq 0$ , то из (5.4) следует  $(r - K)\frac{\sigma}{\sigma'} = Ar^2 + Br + C$ , где  $K, A, B, C$  — постоянные. Величина  $r$  определена с точностью до постоянного слагаемого, поэтому можно считать  $K = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\sigma'} &= Ar + B + \frac{C}{r}, \quad C \neq 0, \\ 2q_1 Q_{1\tau} &= Q_1 q_{1\tau} \Rightarrow q_1 = DQ_1^2, \quad D \neq 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где  $D$  — постоянная,  $Q_1 \neq 0$  (иначе из (5.3) вытекает  $C = 0$ ).

Из (5.3) следует тождество по  $r$ . Приравнявая к нулю коэффициенты при степенях  $r$  (расщепление по  $r$ ), получим 4 равенства, которые при условии (5.5) приводят к противоречию  $q_{1\tau} = 0$ .

Пусть  $q_{1\tau} \neq 0$ ,  $(\sigma\sigma'^{-1})''' = 0$ , тогда из (5.3) выводим

$$\left(r \frac{\sigma}{\sigma'}\right)''' = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\sigma'} = Ar + B, \quad \frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{1 - A}{Ar + B}.$$

Из (5.2) получим тождество по  $r$

$$(1 - A)(q_1 r + Q_1)^2 + 3(Ar + B)(q_1 r + Q_1) - 3q_1(Ar + B)^2 = (Ar + B)(q_{1\tau} r + Q_{1\tau}).$$

Отсюда следует  $A \neq 0$ , и, поскольку  $r$  определено с точностью до постоянного слагаемого, можно считать  $B = 0$ . Расщепление по  $r$  дает равенства

$$q_{1\tau} = (A^{-1} - 1)q_1^2 + 3q_1(1 - A), \quad (A^{-1} - 1)Q_1 = 0, \quad Q_{1\tau} = 3Q_1 \Rightarrow A \neq 1, \quad Q_1 = 0.$$

Получаем решение (2.1)–(2.3):

$$\begin{aligned} p &= p_0 + q(t)r, \quad q = q_0 \left| |t|^{3/(1-k)} + M \right|^k, \quad r = r_0 (\ln |z| + D)^k, \quad k = \frac{A}{A-1} \neq 0, 1, \\ \rho &= |t|^{-3}r', \quad S = z = t^{-1}\vec{N} \cdot \vec{x} + \int t^2 q(t) dt - t^{-1} \int t^3 q(t) dt, \\ \vec{u} &= t^{-1}\vec{x} - \vec{N}t^{-1} \int t^3 q(t) dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Рассмотрим случай  $q_{1\tau} = 0$ ,  $\sigma' \neq 0 \Rightarrow q = q_0|t|^k$ ,  $q_0 \neq 0$ . Из (5.2) выводим

$$kQ_{1\tau}(\sigma\sigma'^{-1})''' = 0. \quad (5.7)$$

Если  $k = 0$ , то  $q = q_0 \neq 0$ ,  $q_1 = 0$  и в (5.2) переменные разделяются:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma''}{\sigma'} &= \frac{Q_{1\tau}}{Q_1^2} - \frac{3}{Q_1} = m \Rightarrow \sigma = \frac{n}{m}e^{mr} + E, \quad m \neq 0; \quad nr, m = 0, \quad n \neq 0; \\ Q - p_0 &= -\frac{q_0}{m} \ln(M + |t|^3), \quad m \neq 0; \quad Q_0|t|^3, \quad m = 0; \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$r = -\frac{1}{m} \ln ||z|^k + D|, \quad m \neq 0, \quad E \neq 0; \quad \frac{n}{m} \ln |\ln |z| + D|, \quad m \neq 0, \quad E = 0; \quad r_0|z|^n, \quad m = 0,$$

где  $p_0, M, q_0, m, k, D, n, r_0$  — постоянные.

Если  $k \neq 0$ ,  $Q_{1\tau} = 0$ , то  $q = q_0|t|^k$ ,  $q_0 \neq 0$ ;  $Q = p_0$ . Из (5.2) следует уравнение для функции  $\sigma(r)$   $kr^2\sigma'' + 3(r\sigma' - \sigma) = 0$ , решение которого

$$\frac{z}{z'} = \sigma = C_1r + C_2r^{-3/k}, \quad k \neq -3; \quad r(C_1 + C_2 \ln r), \quad k = -3,$$

определяет функцию  $r(z)$ :

$$\begin{aligned} r &= r_0 ||z|^n + M|^{k/(k+3)}, \quad k \neq -3, \quad C_1 \neq 0; \\ r &= r_0 |\ln |z| + M|^{k/(k+3)}, \quad k \neq -3, \quad C_1 = 0; \\ r &= r_0 e^{n|z|^m}, \quad m = C_2 \neq 0, \quad k = -3; \\ r &= r_0 |z|^m, \quad C_2 = 0, \quad C_1 = m \neq 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Если  $k \neq 0$ ,  $Q_{1\tau} \neq 0$ , то из (5.6) следует

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = Ar^2 + Br + C, \quad \frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{1 - B - 2Ar}{Ar^2 + Br + C}.$$

Из (5.2) получим  $A = 0$  при  $r \rightarrow \infty$ ,

$$(1 - B)(kr + Q_1)^2 + 3(Br + C)(kr + Q_1) - 3k(Br + C)^2 = Q_{1\tau}(Br + C).$$

Расщепление по  $r$  дает

$$r^2: (1 - B)(k + 3B) = 0 \Rightarrow B \neq 0 \text{ и можно считать } C = 0;$$

$$r^0: (1 - B)Q_1 = 0 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow \sigma = nr, \quad n \neq 0 \Rightarrow r = r_0|z|^n;$$

$$r: Q_{1\tau} = 3Q_1 \Rightarrow Q - p_0 = Q_0|t|^{k+3}, \quad k \neq -3; \quad Q_0 \ln |t|, \quad k = -3,$$

где  $Q_0, r_0, n$  — постоянные.

Итак, для решения (2.3) справедливы соотношения

$$p - p_0 = |t|^k (q_0 r + Q_0 |t|^3), \quad k \neq -3; \quad q_0 |t|^{-3} r + Q_0 \ln |t|, \quad k = -3. \quad (5.10)$$

Остается последний случай  $\sigma' = 0 \Rightarrow r = k \ln |z|$ . Из (5.2) следует  $q = q_0 \neq 0$ . Решение (2.3) имеет вид  $\rho = |t|^{-3} k z^{-1}$ ,  $p = q_0 r + Q(t)$  с произвольной функцией  $Q(t)$ . Уравнение состояния опишем формулой

$$p = q_0 k \ln |S| + Q\left(\left(\frac{K}{\rho S}\right)^{1/3}\right). \quad (5.11)$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

**Теорема 3.** Для решений системы (1.1) с переменной энтропией найдутся уравнения состояния (5.1) такие, что частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 2 группы Галлея с линейным полем скоростей задаются формулами (5.5), (5.8), (5.9), (5.10), (5.11).

## 6. Примеры решения уравнения движения частиц газа (5.5)

Уравнение движения частиц газа для решения (5.6) имеет вид

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{x}}{t} - \vec{N} t^{-1} \int t^3 q(t) dt, \quad q(t) = q_0 |t|^{3/(1-k)} + M|^k, \quad k \neq 0, 1.$$

Решение этой системы в декартовой системе координат  $\vec{N} = \vec{i}$  задается формулами

$$x = tu_0 + \int t^3 q(t) dt - t \int t^2 q(t) dt, \quad y = tv_0, \quad z = tw_0. \quad (6.1)$$

Рассмотрим два примера возможных траекторий.

1)  $k = 2$ ,  $q = q_0 = (|t|^{-3} + M)^2$ .

Интегралы в (6.1) вычисляются следующим образом:

$$x = tu_0 + q_0 \left( -\frac{1}{6} t^{-2} + 2M|t|(1 - \ln |t|) - \frac{1}{12} M^2 t^4 \right), \quad q_0 > 0, \quad M \neq 0.$$

Значения  $x$  инвариантны при замене  $t \rightarrow -t$ ,  $u_0 \rightarrow -u_0$ , поэтому достаточно рассмотреть движение при  $t > 0$ .

При  $t \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\frac{dx}{dt} \rightarrow \infty$  получаем источник в бесконечно удаленной точке. При  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\frac{dx}{dt} \rightarrow -\infty$  получаем разворот потока (рис. 5).

2)  $k = -2$ ,  $q = q_0 |t| + M|t|^{-2}$ .

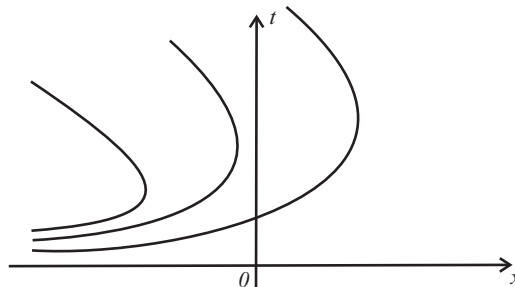


Рис. 5. Источник с разворотом потока

Интегралы в (6.1) вычисляются как

$$x = tu_0 + q_0 \left( -\frac{1}{2}t^2 - 3M|t| - \frac{3}{2}M^2 + M(3M + 2|t|) \ln ||t| + M| \right).$$

Если  $M > 0$ , то при  $t \rightarrow 0$

$$x \rightarrow 3q_0M^2 \left( -\frac{1}{2} + \ln |M| \right), \quad \frac{dx}{dt} \rightarrow u_0 + q_0 2M \ln |M|;$$

при  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\frac{dx}{dt} \rightarrow -\infty$  получаем источник в сдвинутой конечной точке с разворотом потока по типу, изображенному на рис. 3.

Если  $M < 0$ , то за конечное время  $t \in [0, -M)$  при  $t \rightarrow -M$

$$x \rightarrow -\infty, \quad \frac{dx}{dt} \rightarrow -\infty$$

складывается картина траекторий по типу, представленному на рис. 3.

### Заключение

Для группы Галилея рассмотрены инвариантные и частично инвариантные решения с линейным полем скоростей для уравнений газовой динамики. Такие решения описывают точечный коллапс или источник частиц с искривленными траекториями для специальных уравнений состояния. Для уравнений состояния из групповой классификации проведена классификация источников с криволинейными траекториями для специальных уравнений состояния. Одни и те же движения частиц могут происходить для различных уравнений состояния.

Найдена связь между движением частиц газа и уравнением состояния. В некоторых случаях, если измерить движение частиц газа, можно определить класс уравнений состояния. На найденных точных решениях уравнений газовой динамики можно построить характеристики, по которым могут двигаться слабые разрывы и поверхности ударных волн. По этим разрывам примыкают другие решения, возможно, построенные по подалгебре, содержащейся в алгебре группы Галилея. Задача о примыкании решений в пространственном случае важна, но не решена даже для инвариантных решений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Овсянников Л.В.** Программа “Подмодели”. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
2. **Овсянников Л.В.** Некоторые итоги выполнения программы “Подмодели” для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372.
3. **Хабиров С.В.** Оптимальные системы суммы двух идеалов, допускаемых уравнениями гидродинамического типа // Уфим. мат. журн. 2014. Т. 6, № 2. С. 99–103.
4. **Хабиров С.В., Мукминов Т.Ф.** Граф вложенных подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 121–143. doi: 10.33048/semi.2019.16.006.
5. **Овсянников Л.В.** Лекции по основам газовой динамики / Ин-т компьютерных исследований. Москва; Ижевск, 2003. 336 с.
6. **Овсянников Л.В., Чупахин А.П.** Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 990–999.
7. **Овсянников Л.В.** Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.
8. **Овсянников Л.В.** Новые решения уравнений гидродинамики // Докл. АН СССР. 1956. Т. 111, № 1. С. 47–49.
9. **Тарасова Ю.В.** Классификация подмоделей с линейным полем скоростей в газовой динамике // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 4. С. 128–136.

10. Юлмухаметова Ю.В. Подмодели движения газа с линейным полем скоростей в вырожденном случае // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 139–150.
11. Овсянников Л.В. Изобарические движения газа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792–1799.
12. Чупахин А.П. Барохронные движения газа: общие свойства и подмодели типов (1,2) и (1,1). Новосибирск: Препринт ИГиЛ СО РАН. 1998. № 4–98. 67 с.
13. Чупахин А.П. Небарохронные подмодели типов (1,2) и (1,1) уравнений газовой динамики. Новосибирск: Препринт ИГиЛ СО РАН. 1999. № 1–99. 40 с.
14. Овсянников Л.В. Особый вихрь // Прикл. механика и технич. физика. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.
15. Овсянников Л.В. О “простых” решениях уравнений динамики политропного газа // Прикл. механика и технич. физика. 1999. Т. 40, № 2. С. 5–12.
16. Хабиров С.В. Задача Гурса о непрерывном сопряжении радиальных прямолинейных движений газа // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 601–606.

Поступила 25.12.2020

После доработки 8.02.2021

Принята к публикации 15.02.2021

Хабиров Салават Валеевич  
 д-р физ.-мат. наук, профессор  
 главный науч. сотрудник  
 Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН  
 г. Уфа  
 e-mail: habirov@anrb.ru

## REFERENCES

1. Ovsyannikov L.V. The “podmodeli” program. Gas dynamics. *J. Appl. Math. Mech.*, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 601–627. doi: 10.1016/0021-8928(94)90137-6.
2. Ovsyannikov L.V. Some results of the implementation of the “podmodeli” program for the gas dynamics equations. *J. Appl. Math. Mech.*, 1999, vol. 63, no. 3, pp. 349–358. doi: 10.1016/S0021-8928(99)00046-5.
3. Khabirov S.V. Optimal system for sum of two ideals admitted by hydrodynamic type equations. *Ufa Math. J.*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 97–101. doi: 10.13108/2014-6-2-97.
4. Khabirov S.V., Mukminov T.F. Graf of embedded subalgebras of 11-dimensional symmetry algebra for continuous medium. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, vol. 16, pp. 121–143 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2019.16.006.
5. Ovsyannikov L.V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on the fundamentals of gas dynamics]. Moscow; Izhevsk: Institut Komp’yuternykh Issledovaniy, 2003, 336 p. ISBN: 5-93972-201-6.
6. Ovsyannikov L.V. Regular partially invariant submodels of the equations of gas dynamics. *J. Appl. Math. Mech.*, 1996, vol. 60, no. 6, pp. 969–978. doi: 10.1016/S0021-8928(96)00119-0.
7. Ovsyannikov L.V. The regular and nonregular partially invariant solutions. *Doklady Akademii nauk*, 1995, vol. 343, no. 2, pp. 156–159 (in Russian).
8. Ovsyannikov L.V. New solutions of hydrodynamics equations. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1956, vol. 111, no. 1, pp. 47–49 (in Russian).
9. Tarasova Yu.V. Classification of submodels with a linear velocity field in gas dynamics. *J. Appl. Industr. Math.*, 2010, vol. 4, no. 4, pp. 570–577. doi: 10.1134/S1990478910040125.
10. Yulmukhametova Yu.V. Submodels of gas motion with a linear velocity field in the degenerate case. *J. Appl. Industr. Math.*, 2012, vol. 6, no. 1, pp. 123–133. doi: 10.1134/S1990478912010139.
11. Ovsyannikov L.V. Isobaric gas flows. *Diff. Eq.*, 1994, vol. 30, no. 10, pp. 1656–1662.
12. Chupakhin A.P. *Barokhronnye dvizheniya gaza: obshchie svoistva i podmodeli tipov (1,2) i (1,1)* [Barochronous gas motions: general properties and submodels of types (1,2) and (1,1)]. Novosibirsk: Preprint IGiL SO RAN, 1998, no. 4–98, 67 p.
13. Chupakhin A.P. *Nebarokhronnyye podmodeli tipov (1,2) i (1,1) uravneniy gazovoy dinamiki* [Non-barochronous submodels of types (1,2) and (1,1) of equations of gas dynamics]. Novosibirsk: Preprint IGiL SO RAN, 1999, no. 1–99, 40 p.
14. Ovsyannikov L.V. Singular vortex. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1995, vol. 36, no. 3, pp. 360–366. doi: 10.1007/BF02369772.

15. Ovsyannikov L.V. “Simple” solutions of the equations of dynamics for a polytropic gas. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 191–197. doi: 10.1007/BF02468514.
16. Khabirov S.V. Goursat problem of the continuous conjugation of radial rectilinear motions of a gas. *Math. Notes*, 2006, vol. 79, no. 4, pp. 555–560. doi: 10.1007/s11006-006-0062-2.

Received December 25, 2020

Revised February 8, 2021

Accepted February 15, 2021

**Funding Agency:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-29-10071) and within the State Assignment no. 0246-2019-0052.

*Salavat Valeevich Khabirov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Mavlyutov Institute of Mechanics – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, 450054 Russia, e-mail: habirov@anrb.ru.

S. V. Khabirov. Motion of gas particles based on the Galilei group, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 173–187.