ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 519.17

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С МАССИВАМИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный локально регулярный 1-код, совершенный относительно последней окрестности, то Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a=a_3, c=c_2, p=p^3_{33}$ (А. Юришич и Я. Видали). В первом случае Γ получаем собственное значение $\theta_2=-1$ и Γ_3 — псевдогеометрический граф для $GQ(p+1,a)$. Если $a=c+1$, то $\bar\Gamma_2$ есть псевдогеометрический граф для $pG_2(p+1,2a)$. Если в этом случае псевдогеометрический граф для обобщенного четырехугольника $GQ(p+1,a)$ обладает квазиклассическими параметрами, то Γ имеет массив пересечений $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$ (Махнев А.А., Нирова М.С.). В работе найдены возможные автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, обобщенный четырехугольник, автоморфизм графа.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. On distance-regular graphs with intersection arrays $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$**.**

If a distance-regular graph Γ of diameter 3 contains a maximal locally regular 1-code that is last subconstituent perfect, then Γ has intersection array $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ or $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, where $a=a_3$, $c=c_2$, and $p=p^3_{33}$ (Jurišić, Vidali). In the first case, Γ has eigenvalue $\theta_2=-1$ and the graph Γ_3 is pseudogeometric for $GQ(p+1,a)$. If $a=c+1$, then the graph $\bar\Gamma_2$ is pseudogeometric for $pG_2(p+1,2a)$. If in this case the pseudogeometric graph for the generalized quadrangle $GQ(p+1,a)$ has quasi-classical parameters, then Γ has intersection array $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$ (Makhnev, Nirova). In this paper, we find possible automorphisms of a graph with intersection array $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$.

Keywords: distance-regular graph, generalized quadrangle, graph automorphism.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-146-156

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i\in\{1,2,\ldots,d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ, и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w)=i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,\ldots,b_{d-1}; c_1,\ldots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависит от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). *Графом Тэйлора* называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k,\mu,1;1,\mu,k\}$.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований — ГФЕН Китая в рамках проекта № 20-51-53013.

на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается как $GQ(s,t)$.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии и две различные вершины которого смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, характеризуемый вышеуказанными параметрами, называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Псевдогеометрический граф для обобщенного четырехугольника $GQ(s,t)$ имеет квазиклассические параметры, если $\{s,t\} = \{q,q\}, \{q^2,q\}, \{q^2,q^3\}, \{q-1,q+1\}$ для некоторого натурального числа q.

Для автоморфизма g графа Γ через $\alpha_i(g)$ обозначим число вершин $u \in \Gamma$ таких, что $d(u,u^g) = i$.

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется *e-кодом*, если минимальное расстояние между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le p^d_{dd}+2$. В случае равенства код называется *максимальным*. Для максимального e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $c_d \ge a_d p^d_{dd}$. В случае равенства код называется *локально регулярным*. Наконец, для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le k_d/\sum_{i=0}^{e} p^d_{id}+1$. В случае равенства код называется *совершенным относительно последней окрестности* (см. [2]).

В работе [2] исследовался класс дистанционно регулярных графов, в которых некоторые тройные числа пересечений являются константами. В частности, удалось доказать, что при $r > 1$ не существуют дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{(2r^2-1)(2r+1), 4r(r^2-1), 2r^2; 1, 2(r^2-1), r(4r^2-2)\}$ и $\{2r^2(2r+1), (2r-1)(2r^2+r+1), 2r^2; 1, 2r^2, r(4r^2-1)\}$.

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код C, который локально регулярен и совершенен относительно последней окрестности, то по [2, предложение 5] Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$. В первом случае Γ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$ и $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{ap}((p+1)a, p)$. Отсюда граф Γ_3 — псевдогеометрический для $GQ(p+1, a)$.

В случае $c = a-1$ граф Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), (a-1)p, a+1; 1, a-1, ap\}$, собственные значения $\theta_1 = a+p$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -a$ и $\bar\Gamma_2$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(p+1, 2a)$.

В статье М.С. Нировой (О дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 215–228) доказано, что дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, a-1, ap\}$, для которого граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$ с квазиклассическими параметрами, имеет массив пересечений $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, q^2-q-2\}$, $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ или $\{195, 168, 14; 1, 12, 182\}$. В [4, теорема] доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ и $\{195, 168, 14; 1, 12, 182\}$ не существуют.

Из работы [3, теорема 2, лемма 6] и монографии [1, §4.1B] следует

Предложение 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$. Тогда $q > 6$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *имеет спектр* $(q^2-1)^1, (2q-1)^{q(q^2-1)/6}, -1^{(q+1)(q^2+q-2)/2}, -(q+1)^{q(q-1)(q-2)/3}$ *и не содержит q-клик;*

(2) *граф Γ_3 — псевдогеометрический для $GQ(q-1, q+1)$ и $\bar\Gamma_2$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(q-1, 2q+2)$.*

В работе исследуются автоморфизмы дистанционно регулярного графы Γ с массивом пересечений $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$. Условие Крейна $q_{33}^3 \geq 0$ равносильно неравенству $q \geq 6$, причем в случае $q = 6$ по [2, теорема 3, $r = 2$] граф не существует.

Теорема 1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$, $q \geq 7$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *если Ω — пустой граф, то p делит q, $\alpha_1(g) = q^2 + 2tq - lq$, $\alpha_2(g) = q^3 - 2q^2 + 3lq$, p делит $3l$ и $6t$ для некоторых целых чисел l и t*;

(2) *если Ω является n-кликой, то либо*

(i) *$n = 1$, p делит $q - 1$,*

$$\alpha_1(g) = q^2 + 2tq - lq - 1, \quad \alpha_2(g) = q^3 - 2q^2 + 3lq - q + 2, \quad \alpha_3(g) = q^2 - 2tq - 2lq - 2 + q$$

для некоторых целых чисел l и t таких, что $2t - l$, $3l$ делятся на p, либо

(ii) *$n > 1$, $p = 2$,*

$$\alpha_1(g) = q^2 + 2tq - lq - n, \quad \alpha_2(g) = q^3 - 2q^2 + 3lq - nq + 2n, \quad \alpha_3(g) = q^2 - 2tq - 2lq - 2n + nq$$

и числа q, n четны;

(3) *если Ω — m-коклика, то p делит $q-1$ и m, $d(a, b) = 3$ для любых двух вершины $a, b \in \Omega$,*

$$\alpha_1(g) = q^2 + 2tq - lq - m, \quad \alpha_2(g) = q^3 - 2q^2 + 3lq - mq + 2m, \quad \alpha_3(g) = q^2 - 2tq - 2lq - 2m + mq$$

для некоторых целых чисел l и t таких, что $6t$ и $3l + 6$ делятся на p;

(4) *верно неравенство $p < 2q - 2$ и если $[a] \subset \Omega$ для некоторой вершины a, то*

(i) *для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$ подграф $u^{\langle g \rangle}$ является кликой или кокликой и $p \leq q - 1$,*

(ii) *если $\Omega = a^\perp$, то $p = 2$, $\alpha_1(g) = 2qe$, $\alpha_2(g) = 6ql$ и $6l + 2e \geq q^2 - 2q - 1$,*

(iii) *$|\Omega - a^\perp| \leq 2q$ и либо $p = 2$, либо p делит q.*

Для графов с массивом пересечений $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$, в которых любые две вершины на расстоянии 3 лежат в максимальном коде, полезен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть Γ является точечным графом обобщенного четырехугольника $GQ(q-1, q+1)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *Δ — пустой граф, p делит q, $\alpha_1(g) = lq$, либо p нечетно и p делит l, либо $p = 2$ и 4 делит l*;

(2) *Δ является n-кликой, $n \leq q$, либо $n = 1$, p делит $(q-1)(3, q+2)$ и $\alpha_1(g) = (q+2)(q-1)$, либо $2 \leq n$, $\alpha_1(g) = lq - 2n$, p делит $q^2 - 1$, $q - n$ и $l - 2$, $q - 1$ делит $l - 1 - n$*;

(3) *Δ является m-кокликой, $m \leq q^2$, $\alpha_1(g) = lq - 2m$, p делит $q + 2$ и $2(l + m)$, либо p нечетно и делит $8 + m$, либо $p = 2$ делит $(m - l)/2$*;

(4) *Δ содержится в $a^\perp$ для некоторой вершины a, но не является кликой, $p = 2$ делит $q + 1$ и $|\Delta(a)| + 2$, $\Delta = a^\perp$ и $\alpha_1(g) = -2\alpha_0(g) + lq$, l четно*;

(5) *Δ является $m \times n$-решеткой, p делит (m, n, q), $\alpha_1(g) = lq - 2mn$ и p делит l*;

(6) *Δ является двойственной решеткой $K_{m,n}$, p делит $(m - 4, n - 4, q - 2)$, $\alpha_1(g) = lq - 2m - 2n$ и p делит $l - 8$*;

(7) *Δ является обобщенным четырехугольником $GQ(s', t')$, $s', t' \geq 2$, $s't' \leq q - 1$, p делит $(q - s' - 1, q + 1 - t')$ и $q^3 - (s' + 1)(s't' + 1)$, $\alpha_1(g) = lq - (s' + 1)(s't' + 1)$, p делит $q^3 - lq$ и $((q - 1)^2 q - (1 - l + q))/2$.*

Следствие. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{q^2 - 1, q^2 - 2q, q + 2; 1, q, (q + 1)(q - 2)\}$, в котором любые две вершины на расстоянии 3 лежат в максимальном коде. Тогда для $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $p \in \pi(G)$ либо $p \leq q - 3$, либо $p \in \pi(q) \cup \pi(q - 1) \cup \pi(q + 2)$.*

1. Автоморфизмы обобщенного четырехугольника $GQ(q-1, q+1)$

Сначала приведем один вспомогательный результат.

Лемма 1.1 [5, теорема 2.4.1]. *Пусть g — автоморфизм $GQ(s,t)$, $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$ и $\mathcal{L}(g)$ — множество g-допустимых прямых. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Δ — пустой граф и $\mathcal{L}(g)$ — множество попарно непересекающихся прямых;*

(2) *Δ является кокликой и $\mathcal{L}(g)$ — пустое множество;*

(3) *Δ содержится в $a^\perp$ для некоторой вершины a и каждая прямая из $\mathcal{L}(g)$ содержит a;*

(4) *Δ является кликой, лежащей на некоторой прямой L, и каждая прямая из $\mathcal{L}(g)$ пересекает L;*

(5) *Δ является решеткой или двойственной решеткой;*

(6) *Δ является обобщенным четырехугольником $GQ(s', t')$, $s' \geq 2$, $t' \geq 2$.*

Пусть Γ — точечныq граф обобщенного четырехугольника $GQ(q-1, q+1)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(q^3, (q-1)(q+2), q-2, q+2)$ и спектром

$$((q-1)(q+2))^1, (q-2)^{(q^2-1)(q+2)/2}, -(q+2)^{(q-1)^2 q/2}.$$

Лемма 1.2. *Пусть $g \in G$, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство W_2 размерности $q(q-1)^2/2$. Тогда $\chi_2(g) = ((q-2)\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + q^2)/(2q)$ и число $(q-1)^2 q/2 - \chi_2(g)$ делится на p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (q^2-1)(q+2)/2 & (q^2-q-2)/2 & -(q+2)/2 \\ (q-1)^2 q/2 & -(q^2-q)/2 & q/2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = ((q-1)^2\alpha_0(g)/2 - (q-1)\alpha_1(g)/2 + \alpha_2(g)/2)/q^2$. Подставив в эту формулу равенство $\alpha_2(g) = q^3 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = ((q-2)\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + q^2)/(2q)$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2 [6]. □

Теперь будем рассматривать возможности для Δ из заключения леммы 1.1.

Лемма 1.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Δ — пустой граф, то p делит q, $\alpha_1(g) = lq$, либо p нечетно и p делит l, либо $p = 2$ и 4 делит l;*

(2) *если Δ является n-кликой, то $n \leq q$, либо $n = 1$, p делит $(q-1)(3, q+2)$ и $\alpha_1(g) = (q+2)(q-1)$, либо $n \geq 2$, $\alpha_1(g) = lq - 2n$, p делит q^2-1, $q-n$ и $l-2$, $q-1$ делит $l-1-n$;*

(3) *если Δ является m-кокликой, $m \geq 2$, то $m \leq q^2$, p делит $q+2$, $\alpha_1(g) = lq - 2m$, p делит $2(l+m)$, либо p нечетно и делит $8+m$, либо $p = 2$ делит $(m-l)/2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Δ — пустой граф. Так как $v = q^3$, то p делит q, по лемме 1.2 имеем $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/(2q) + q/2$, $\alpha_1(g) = lq$ и $((q-1)^2 q + l - q)/2$ делится на p. Если p нечетно, то p делит l. Если же $p = 2$, то 4 делит l.

Пусть Δ является n-кликой. Тогда $n \leq q$, $\chi_2(g) = ((q-2)n - \alpha_1(g) + q^2)/(2q)$, $\alpha_1(g) = lq - 2n$ и p делит $lq - 2n$. Если $d(u, u^g) = 1$, то $u^\perp \cap (u^g)^\perp$ является q-кликой.

Для вершины $a \in \Delta$ автоморфизм g действует без неподвижных точек на $\Gamma_2(a)$, поэтому p делит $(q^2-1)(q-1)$. Если $n = 1$, то p делит $(q-1)(q+2)$ и q^3-1, поэтому p делит $(q-1)(3, q+2)$. Если $n > 1$, то для вершины $b \in \Delta(a)$ автоморфизм g действует без неподвижных точек на $[a] - b^\perp$, поэтому p делит q^2-1 и $q-n$. Если p делит n, то p делит q, противоречие. Значит, p делит $l-2$.

В случае $n = 1$ имеем $\{a\} = \Delta$. Если g фиксирует y прямых из $a^\perp$, то $\alpha_1(g) = lq - 2 = y(q-1)$, q делит $y-2$, отсюда либо $y = 2$ и g переставляет q прямых из $a^\perp$, противоречие, либо $y = q+2$, $lq - 2 = (q+2)(q-1)$ и $l = q+1$.

В случае $n > 1$ подграф Δ лежит на единственной прямой L, $\alpha_1(g) = lq - 2n$ и $lq - 2n - (q-n) = (l-1)q - n$ делится на $q-1$. Итак, p делит $l-2$ и $q-1$ делит $l-1-n$. Если g фиксирует отличную от L прямую, то p делит $q-1$.

Пусть Δ является m-кокликой, $m > 1$. Тогда $\alpha_2(g) \geq (q-1)(q+2)m$. Ввиду границы Хофмана имеем $m \leq q^3(q+2)/(2q+q^2) = q^2$. Для двух вершин $a, b \in \Delta$ автоморфизм g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b]$, поэтому p делит $q+2$. Далее, $\chi_2(g) = ((q-2)m - \alpha_1(g) + q^2)/(2q)$, $(q-1)^2q/2 - \chi_2(g)$ делится на p $\alpha_1(g) = lq - 2m$, поэтому $\chi_2(g) = (m-l+q)/2$ p делит $2(l+m)$ и $((q^3 - 2q^2 - (m-l))/2$. Отсюда либо p нечетно и делит $8+m$, либо $p = 2$ делит $(m-l)/2$. □

Лемма 1.4. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Δ содержится в $a^\perp$ для некоторой вершины a, но не является кликой, то p делит $q+1$ и $|\Delta(a)|+2$, $\alpha_1(g) = -2\alpha_0(g) + lq$, p делит $l-2$, либо g фиксирует прямую из $b^\perp$, не содержащую a, p делит $q-1$ и $p = 2$, либо g фиксирует только прямые из $a^\perp$, пересекающие $\Delta(a)$, $l = q+1+|\Delta(a)|/q$ и q делит $|\Delta(a)|$, наконец, $\Delta = a^\perp$*;

(2) *если Δ является $m \times n$-решеткой, то p делит (m,n,q), $\alpha_1(g) = lq - 2mn$ и p делит l*;

(3) *если Δ является двойственной решеткой $K_{m,n}$, то p делит $(m-4, n-4, q-2)$, $\alpha_1(g) = lq - 2m - 2n$ и p делит $l-8$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Δ содержится в $a^\perp$ и не является кликой. Если b, c — две несмежные вершины из $\Delta(a)$, то $[b] \cap [c]$ содержит a и $(q+1)$-коклику из $\Gamma_2(a)$. Отсюда p делит $q+1$, $(q-1)(q+2) - |\Delta(a)|$ и $|\Delta(a)|+2 = \alpha_0(g)+1$. Далее, $\chi_2(g) = ((q-2)\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + q^2)/(2q)$, $\alpha_1(g) = -2\alpha_0(g) + lq$, p делит $lq+2$ и $l-2$.

Если $b \in \Delta(a)$ и g фиксирует прямую из $b^\perp$, не содержащую a, то p делит $q-1$ и $p = 2$. Если же элемент g фиксирует только прямые из $a^\perp$, пересекающие $\Delta(a)$, то $\alpha_1(g) = (q+2)(q-1) - |\Delta(a)|$. В этом случае $\alpha_1(g) = -2(|\Delta(a)|+1) + lq = (q+2)(q-1) - |\Delta(a)|$, $l = q+1+|\Delta(a)|/q$ и q делит $|\Delta(a)|$.

Пусть $d(u, u^g) = 2$. Тогда u смежна с вершиной из Δ, поэтому $\Delta = a^\perp$.

Пусть Δ является $m \times n$-решеткой. Тогда p делит $q-m$, $q-n$, $(q-1)(q+2) - (m+n-2)$ и $q^3 - mn$. Так как две несмежные вершины из Δ смежны с двумя вершинами из Ω, то p делит q. Отсюда p делит (m,n,q).

Далее, $\chi_2(g) = ((q-2)mn - \alpha_1(g) + q^2)/(2q)$ и $\alpha_1(g) = lq - 2mn$. Отсюда $\chi_2(g) = ((q-2)mn - lq + 2mn + q^2)/(2q) = (mn - l + q)/2$, число $((q-1)^2q - (mn-l+q))/2$ делится на p и p делит $l - mn$.

Пусть Δ является двойственной решеткой $K_{m,n}$. Тогда p делит $q+2-m$, $q+2-n$ и $m-n$. Так как некоторая пересекающая Δ прямая содержит две вершины из Δ, то p делит $q-2$. Отсюда p делит $(m-4, n-4, q-2)$. Далее, $\chi_2(g) = ((q-2)(m+n) - \alpha_1(g) + q^2)/(2q)$, $\alpha_1(g) = lq - 2m - 2n$ и p делит $2l - 2m - 2n$. Теперь $\chi_2(g) = ((q(m+n) - lq + q^2)/(2q) = (-l+q+m+n)/2$ и $((q-1)^2q - (-l+q+m+n))/2$ делится на p, поэтому p делит $l-m-n$. Таким образом, p делит $l - (n-m) - 2m$ и $l-8$. □

Лемма 1.5. *Пусть Δ является обобщенным четырехугольником $GQ(s', t')$, $s', t' \geq 2$. Тогда $s't' \leq q-1$, p делит $(q-s'-1, q+1-t')$ и $q^3 - (s'+1)(s't'+1)$, $\alpha_1(g) = lq - (s'+1)(s't'+1)$, p делит $q^3 - lq$ и $((q-1)^2q - (1-l+q))/2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Δ является обобщенным четырехугольником $GQ(s', t')$, $s' \geq 2$, $t' \geq 2$. По [5, лемма 2.2.1] либо $q-1 = s'$, либо $s't' \leq q-1$. Если $q-1 = s'$, то по утверждению (iv) из [5, лемма 2.2.2] имеем $\sqrt{q-1} \leq t' \leq q-1$ и $\sqrt{q-1}^3 \leq q+1 \leq (q-1)^2$, противоречие. Значит, $s't' \leq q-1$, причем в случае равенства $s't' = q-1$ любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с $s'+1$ вершинами из Ω.

Далее, p делит $q-s'-1$, $q+1-t'$ и $q^3-(s'+1)(s't'+1)$. Если g фиксирует прямую, не пересекающую Ω, то p делит q.

Теперь $\chi_2(g) = ((q-2)\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + q^2)/(2q)$, $\alpha_1(g) = lq - (s'+1)(s't'+1)$ и p делит $q^3 - lq$. Отсюда $\chi_2(g) = (1-l+q)/2$ и $((q-1)^2 q - (1-l+q))/2$ делится на p. □

Из лемм 1.3–1.5 следует теорема 2.

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$

Сначала приведем один вспомогательный результат.

Лемма 2.1. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $GQ(q-1, q+1)$, g — автоморфизм Γ и $\Omega = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда $|\Omega| \le q(q+2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это следствие теоремы 3.2 из [7]. □

В леммах 2.2–2.5 предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений

$$\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$$

с $v = 1 + (q^2-1) + (q^2-1)(q-2) + (q-1)(q+2) = q^3$ вершинами и спектром

$$(q^2-1)^1, (2q-1)^{q(q^2-1)/6}, -1^{(q+1)(q^2+q-2)/2}, -(q+1)^{q(q-1)(q-2)/3}.$$

Тогда $k_2 = (q^2-1)(q-2)$, $k_3 = (q-1)(q+2)$. Так как $b^+ = b_1/(\theta_1+1) = (q^2-2q)/2q = q/2-1$, $b^- = b_1/(\theta_3+1) = (q^2-2q)/-q = -q+2$, то ввиду [1, теорема 4.4.3] окрестность любой вершины в Γ является связным графом. Согласно предложению 1 порядок клики в Γ не больше $q-1$.

Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 2.2. Γ *имеет следующие числа пересечений*:

(1) $p^1_{11} = 2(q-1)$, $p^1_{12} = (q-2)q$, $p^1_{22} = (q-3)(q-2)(q+1)$, $p^1_{23} = (q-2)(q+2)$, $p^1_{33} = q+2$*;*

(2) $p^2_{11} = q$, $p^2_{12} = (q-3)(q+1)$, $p^2_{13} = q+2$, $p^2_{22} = q^3 - 4q^2 + 2q + 10$, $p^2_{23} = (q-3)(q+2)$, $p^2_{33} = q+2$*;*

(3) $p^3_{12} = (q-2)(q+1)$, $p^3_{13} = q+1$, $p^3_{22} = (q-3)(q-2)(q+1)$, $p^3_{23} = (q-2)(q+1)$, $p^3_{33} = q-2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычисления по формулам из [1, лемма 4.1.7]. □

Лемма 2.3. *Пусть $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство W_1 размерности $q(q^2-1)/6$, χ_3 — характер проекции представления ψ на подпространство W_3 размерности $(q-2)(q-1)q/3$. Тогда $\chi_1(g) = (q\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/(6q) - q/6$ и $\chi_3(g) = ((q-2)\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/(3q) - (q-2)q/3$. Более того, $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого целого числа l, взаимно простого с p, и числа $(q-1)q(q+1)/6 - \chi_1(g)$ и $(q-2)(q-1)q/3 - \chi_3(g)$ делятся на p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (q-1)q(q+1)/6 & q(2q-1)/6 & -q/6 & -q(q+1)/6 \\ (q-1)(q+1)(q+2)/2 & -(q+2)/2 & -(q+2)/2 & (q-2)(q+1)/2 \\ (q-2)(q-1)q/3 & -(q-2)q/3 & 2q/3 & -(q-2)q/3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $\chi_1(g) = ((q^2-1)\alpha_0(g) + (2q-1)\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - (q+1)\alpha_3(g))/(6q^2)$. Подставив в эту формулу равенство $\alpha_2(g) = q^3 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (q\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/(6q) - q/6$.

Аналогично $\chi_3(g) = ((q-2)(q-1)\alpha_0(g) - (q-2)\alpha_1(g) + 2\alpha_2(g) - (q-2)\alpha_3(g))/(3q^2)$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = q^3 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g)$, получим $\chi_3(g) = ((q-2)\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/(3q) - (q-2)q/3$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2 [6]. □

Лемма 2.4. *Пусть* $|\Omega| = n$. *Тогда* $\chi_1(g) = t$, $\chi_3(g) = l$, $\alpha_1(g) = q^2 + 2tq - lq - n$, $\alpha_2(g) = q^3 - 2q^2 + 3lq - nq + 2n$ *и* $\alpha_3(g) = q^2 - 2tq - 2lq - 2n + nq$, *для некоторых целых чисел* l *и* t.

Доказательство. По лемме 2.3 $\chi_3(g) = ((q-2)n+\alpha_2(g))/(3q)-(q-2)q/3$, поэтому $\alpha_2(g) = sq + 2n$, $s = 3l + (q-2)q - n$. Отсюда $\alpha_2(g) = q(3l + (q-2)q - n) + 2n = q^3 - 2q^2 + 3lq - nq + 2n$. Далее, $\chi_1(g) = (nq + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/(6q) - q/6$, поэтому $2\alpha_1(g) - \alpha_3(g) = rq - nq$ и $r = 6t + q$. Теперь $2\alpha_1(g) - \alpha_3(g) = (6t + q)q - nq$. Наконец, $\alpha_1(g) = q^2 + 2tq - lq - n$ и $\alpha_3(g) = q^2 - 2tq - 2lq - 2n + nq$. □

Лемма 2.5. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* Ω — *пустой граф, то* p *делит* q, $\alpha_1(g) = q^2 + 2tq - lq$, $\alpha_2(g) = q^3 - 2q^2 + 3lq$, p *делит* $3l$ *и* $6t$, *для некоторых целых чисел* l *и* t;

(2) *если* Ω *является* n-*кликой, то либо*

(i) $n = 1$, p *делит* $q - 1$, $\alpha_1(g) = q^2 + 2tq - lq - 1$, $\alpha_2(g) = q^3 - 2q^2 + 3lq - q + 2$, $\alpha_3(g) = q^2 - 2tq - 2lq - 2 + q$, *для некоторых целых чисел* l *и* t *таких, что* $2t - l$, $3l$ *делятся на* p, *либо*

(ii) $n > 1$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = q^2 + 2tq - lq - n$, $\alpha_2(g) = q^3 - 2q^2 + 3lq - nq + 2n$, $\alpha_3(g) = q^2 - 2tq - 2lq - 2n + nq$ *и числа* q, n *четны*;

(3) *если* Ω *является* m-*кокликой, то* p *делит* $q-1$ *и* m, $d(a,b) = 3$ *для любых двух вершины* $a, b \in \Omega$, $\alpha_1(g) = q^2+2tq-lq-m$, $\alpha_2(g) = q^3-2q^2+3lq-mq+2m$, $\alpha_3(g) = q^2-2tq-2lq-2m+mq$, *для некоторых целых чисел* l *и* t *таких, что* $6t$ *и* $3l+6$ *делятся на* p.

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $v = q^3$, то p делит q. По лемме 2.4 имеем $\alpha_1(g) = q^2 + 2tq - lq$, $\alpha_2(g) = q^3 - 2q^2 + 3lq$, $\alpha_3(g) = q^2 - 2tq - 2lq$, $\chi_1(g) = t$, $\chi_3(g) = l$, и по лемме 2.3 числа $(q-1)q(q+1)/6 - t$ и $(q-2)(q-1)q/3 - l$ делятся на p. Отсюда p делит $3l$ и $6t$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является n-кликой. Тогда $n \le q-1$. Для вершины $a \in \Omega$ автоморфизм g действует без неподвижных точек на $\Gamma_2(a)$ и на $\Gamma_3(a)$, поэтому p делит $(q^2-1)(q-2)$ и $(q-1)(q+2)$. Если $n = 1$, то p делит $q^3 - 1$ и $q^2 - 1$, значит, p делит $q - 1$.

Если $n > 1$, то для вершины $b \in \Omega(a)$ автоморфизм g действует без неподвижных точек на $[a] - b^\perp$ и $\Gamma_3(a) \cap \Gamma_3(b)$. По лемме 2.2 имеем $p^1_{12} = q^2 - 2q$, $p^1_{33} = q + 2$, поэтому p делит $q^2 - 2q$, $q + 2$ и $p = 2$. Отсюда q и n четны. С учетом леммы 2.4 утверждение ($2ii$) доказано.

В случае $n = 1$ по лемме 2.4 имеем $\alpha_1(g) = q^2 + 2tq - lq - 1$, $\alpha_2(g) = q^3 - 2q^2 + 3lq - q + 2$ и $\alpha_3(g) = q^2 - 2tq - 2lq - 2 + q$ для некоторых целых чисел l и t. Поэтому p делит $2t - l$, $3l$ и $2(t + l)$. Утверждение (2)(i) доказано.

Пусть Ω — m-коклика, $m > 1$. Тогда p делит $(q^2 - 1)$. Ввиду границы Хофмана [1, предложение 1.3.2] имеем $m \le q^3(q+2)/(2q+q^2) = q^2$.

Если Ω содержит две вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ, то p делит q, противоречие.

Значит, любые две вершины из Ω находятся на расстоянии 3 в Γ, m-коклике в Γ отвечает клика в Γ_3 и $m \le q$. Далее, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g) \ge (q^2-1)m$. Так как $p^3_{13} = q+1$, $p^3_{33} = q-2$, то p делит $q+1$, $q-m$ и q^3-m. По лемме 2.4. имеем $\alpha_1(g) = q^2+2tq-lq-m$, $\alpha_2(g) = q^3-2q^2+3lq-mq+2m$, $\alpha_3(g) = q^2-2tq-2lq-2m+mq$ и числа $l-2t+2$, $3l+6$, $2t+2l+4$ делятся на p. Утверждение (3), а вместе с ним и лемма доказаны. □

Лемма 2.6. *Верно неравенство* $p < 2q - 2$, *и если* $[a] \subset \Omega$ *для некоторой вершины* a, *то выполняются следующие утверждения*:

(1) *для любой вершины* $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$ *подграф* $u^{\langle g \rangle}$ *является кликой или кокликой и* $p \le q-1$;

(2) *если* $\Omega = a^\perp$, *то* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 2qe$, $\alpha_2(g) = 6ql$ *и* $6l + 2e \ge q^2 - 2q - 1$;

(3) $|\Omega - a^\perp| \le 2q$ *и либо* $p = 2$, *либо* p *делит* q.

Доказательство. Пусть $p > 2q - 2$. Тогда для двух смежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит $2q - 2$ вершин и попадает в Ω. По связности $[a]$ получим $[a] \subset \Omega$. Противоречие с тем, что тогда Γ содержится в Ω.

Допустим, что $[a] \subset \Omega$ для некоторой вершины a. Тогда для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$ подграф $u^{\langle g\rangle}$ не содержит геодезических 2-путей и является кликой или кокликой. Если $u^{\langle g\rangle}$ — коклика, то $|(\cup_{w\in u^{\langle g\rangle}} w^{\perp}) - a^{\perp}| \geq p(q^2-q)$. По лемме 2.1 имеем $|\Omega| \leq q(q+2)$, поэтому $|\Omega - a^{\perp}| \leq 2q$. Положим $|\Omega| = q^2+x$.

Если $[u] \cap \Omega$ содержит две несмежные вершины b, c, то $[b] \cap [c]$ содержит a и p вершин из $u^{\langle g\rangle}$, поэтому $p \leq q-1$. Если $p > q-1$, то $[u] \cap \Omega$ является кликой, противоречие с тем, что $\{a\} \cup ([u] \cap \Omega)$ является $(q+1)$-кликой. Значит, $p \leq q-1$.

Допустим, что $\Omega = a^{\perp}$. Так как $p^1_{12} = (q-2)q$ и $p^1_{33} = q+2$, то $p = 2$. Далее, $\chi_3(g) = ((q-2)q^2 + \alpha_2(g))/(3q) - (q-2)q/3$ и $\alpha_2(g) = 6ql$. Теперь $\alpha_3(g) \leq (q-1)(q+2)$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = q^3 - q^2 - 6ql$ и $\chi_1(g) = (3\alpha_1(g) + q^2 + 6ql))/(6q) - q/6$. Отсюда $\alpha_1(g) = 2qe$, $\chi_1(g) = e + l$ и число $(q-1)q(q+1)/6 - \chi_1(g)$ четно, поэтому $e+l$ четно. Наконец, $\alpha_3(g) = q^3 - q^2 - 6ql - 2qe \leq (q-1)(q+2)$ и $6l + 2e \geq q^2 - 2q - 1$.

Допустим, что любая вершина из $[a]$ смежна по крайней мере с двумя вершинами из $\Omega_2(a)$. Тогда число ребер между $[a]$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $2(q^2-1)$ и $|\Omega_2(a)| \geq 2q - 2/q$, противоречие.

Если $p > 2$ и p не делит $(q-2)q$, то p делит $q^2 - 2q - 1$ и любая вершина из $[a]$ смежна либо с единственной вершиной из $\Omega_2(a)$, либо по крайней мере с $p+1$ вершиной из $\Omega_2(a)$. В любом случае $q - 1/q \leq |\Omega_2(a)| \leq 2q$. Далее, p делит $q^3 - 2q^2 - q$ и число $|\Omega|$ сравнимо с $2q^2 + q$ по модулю p. Поэтому $|\Omega|$ сравнимо с $q^2 + 3q + 1$ по модулю p.

Пусть x — число вершин из $[a]$, смежных с единственной вершиной из $\Omega_2(a)$. Тогда число ребер между $[a]$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $x + (p+1)(q^2 - 1 - x)$ и $|\Omega_2(a)| \geq (p+1)q - (px + p + 1)/q$. Отсюда $x \geq q^2 - 1 - (q^2+1)/p$. Далее, число $k_3 = (q-1)(q+2)$ сравнимо с $3q - 1$ по модулю p, $(3q-1, q^2-2q-1) = (3q-1, 5q+3)$ делит 14. Если $p \neq 7$, то $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ содержит некоторую вершину z.

Пусть $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ содержит некоторую вершину z. Тогда $|\Gamma_2(z) \cap [a]| = q^2 - q - 2$, поэтому $\Gamma_2(z) \cap [a]$ содержит вершину b, смежную с единственной вершиной из $\Gamma_2(a) \cap \Omega$. Теперь $[b] \cap [z]$ содержит не более одной вершины из Ω и p делит q или $q-1$, противоречие. Значит, $\Gamma_3(a)$ не пересекает Ω и $p = 7$ делит $q+2$.

Имеем $\chi_3(g) = ((q-2)\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/(3q) - (q-2)q/3$, $(q-2)(q-1)q/3 - \chi_3(g) = (q-2)q^2/3 - ((q-2)\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/(3q)$ делится на p. Поэтому $2\alpha_0(g) - 1$ делится на p. Аналогично $\chi_1(g) = (q\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/(6q) - q/6$ и $(q-1)q(q+1)/6 - \chi_1(g) = q^3/6 - (q\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/(6q)$ делится на p. Число $(q-1)q(q+1)/6 - \chi_1(g)$ сравнимо с $-(8 + \alpha_0(g))/6$ по модулю p. Противоречие с тем, что 17 не делится на $p = 7$.

Пусть p делит $(q-2)q$ и $p > 3$. Тогда число $k_3 = (q-1)(q+2)$ сравнимо с $3q-2$ по модулю p. Далее, $3q-2$ сравнимо с 4 по модулю p, если p делит $q-2$, сравнимо с -2 по модулю p, если p делит q. Пусть $z \in \Gamma_3(a) \cap \Omega$.

Предположим сначала, что p делит $q-2$. Так как $a_3 = q+1$, то $[z] \cap \Gamma_3(a)$ содержит не менее трех вершин из Ω. С учетом равенства $c_3 = (q-2)(q+1)$ подграф $[a]$ содержит $(q-2)(q+1)$ вершин из $\Gamma_2(z)$. Для любой вершины $b \in [a] \cap \Gamma_2(z)$ подграф $[b] \cap [z]$ содержит не менее двух вершин из Ω, поэтому $[z] \cap \Gamma_2(a)$ содержит не менее $2(q-2)(q+1)/q = 2q - 2 - 4/q$ вершин из Ω. Противоречие с тем, что $|\Omega - a^{\perp}| \leq 2q$.

Значит, p делит q. $\square$

Из лемм 2.5, 2.6 следует теорема 1.

3. Доказательство следствия

В этом разделе предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$, $q \geq 7$, в котором любые две вершины на расстоянии 3 лежат в максимальном коде (равносильно граф Γ_3 является точечным граф для $GQ(q-1, q+1)$). Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ и $\Delta = \Omega_3$.

Из теорем 1–2 следует

Предложение 2. *Выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω — *пустой граф, p делит q, $\alpha_1(g) = hq/3$, $\alpha_2(g) = lq$, p делит $l/3$ и $(h+l)/6$, $alpha_3(g) = tq$, либо p нечетно и p делит t, либо $p = 2$ и 4 делит $q/2 - t$*;

(2) *Ω является n-кликой, либо $n = 1$, p делит $q-1$, $alpha_1(g) = q^2-3tq-1$, $\alpha_2(g) = q^3-2q^2+3tq-q+2$, $\alpha_3(g) = q^2+q-2$ и $3t$ делится на p, либо $1 < n < q$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = q^2+lq-n+2nq/3$, $\alpha_2(g) = q^3-2q^2+3lq-nq+2n$, $\alpha_3(g) = q^2-4lq-2n+nq/3$, n делится на 3, числа q, $q/6-l$ и $2(l+n)$ четны*;

(3) *Ω есть m-коклика, $d(a,b) = 3$ для любых двух вершины $a, b \in \Omega$, $p = 2$, $\alpha_3(g) = lq-2m$, числа $q = m$ и $l-1$ нечетны, $q-1$ делит $l-1-m$*;

(4) *Δ является t-кокликой, $t \le q^2$, $\alpha_1(g) = lq-2t$, p делит $q+2$ и $2(l+t)$*;

(5) *Δ содержится в $a^\perp$ для некоторой вершины a, но не является кликой, p делит $q+1$ и $|\Delta(a)|+2$, $\Delta = a^\perp$ и $\alpha_3(g) = -2\alpha_0(g)+lq$, l четно*;

(6) *Δ есть $m \times n$-решетка, p делит (m,n,q), $\alpha_3(g) = lq-2mn$ и p делит l или Δ является двойственной решеткой $K_{m,n}$, p делит $(m-4, n-4, q-2)$, $\alpha_3(g) = lq-m-n$ и p делит $l-8$*;

(7) *Δ — обобщенный четырехугольник $GQ(s',t')$, $s',t' \ge 2$, $s't' \le q-1$, p делит $(q-s'-1, q+1-t')$ и $q^3-(s'+1)(s't'+1)$, $\alpha_3(g) = lq-(s'+1)(s't'+1)$, p делит q^3-lq и $((q-1)^2q-(1-l+q))/2$.*

Докажем следствие.

Лемма 3.1. *Если Δ — точечный граф для $GQ(s',t')$, $s',t' \ge 2$, то $p \le q-3$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1.5 имеем $s't' \le q-1$, p делит $(q-s'-1, q+1-t')$. Поэтому $p \le q-3$. □

Лемма 3.2. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Δ — пустой граф, то p делит q*;

(2) *если Δ является n-кликой, то $p = 2$ и число $n = q$ нечетно*;

(3) *если Δ есть m-коклика, то p делит $q+2$*;

(4) *если Δ содержится в $a^\perp$ для некоторой вершины a, но не является кликой, то p делит $q+1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма следует из предложения 2. □

Лемма 3.3. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Δ является $m \times n$-решеткой, то p делит (m,n,q)*;

(2) *если Δ есть двойственная решетка $K_{m,n}$, то p делит $(m-4, n-4, q-2)$ и $l-8$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма следует из предложения 2. □

Из лемм 3.1–3.3 следует, что для $p \in \pi(G)$ либо $p \le q-3$, либо $p \in \pi(q) \cup \pi(q-1) \cup \pi(q+2)$.

Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Jurišić A., Vidali J.**, Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr. 2012. Vol. 65. P. 29–47.
3. **Нирова М.С.** Коды в дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 155–163 . doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-155-16 .
4. **Махнев А.А., Нирова М.С.** Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ и $\{195, 168, 14; 1, 12, 182\}$ не существуют // Теория групп и ее приложения: тез. докл. XIII шк.-конф. по теории групп. 2020. С. 70. URL: group.imm.uran.ru .

5. **Payne S.E., Thas J.A.** Finite generalized quadrangles. Boston: Pitman, 1984. 312 p. (Ser. Research Notes in Math; vol. 110).
6. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.
7. **Behbahani M., Lam C.** Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math. 2011. Vol. 311, no. 2-3. P. 132–144.

Поступила 10.09.2020

После доработки 20.12.2020

Принята к публикации 11.01.2021

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник, профессор РАН
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195 .
2. Jurišić A., Vidali J. Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3. *Des. Codes Cryptogr.*, 2012, vol. 65, no. 1-2, pp. 29–47. doi: 10.1007/s10623-012-9651-0 .
3. Nirova M.S. Codes in distance-regular graphs with $\theta_2 = -1$. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 155–163 (in Russian) . doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-155-163 .
4. Makhnev A.A., Nirova M.S. Distance-regular graphs with intersection arrays $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ and $\{195, 168, 14; 1, 12, 182\}$ do not exist. In: *Abstr.* XIII *Sch.-Conf. on Group Theory "Teoriya grupp i ee prilozheniya"* [*Group theory and its applications*], *Ekaterinburg, August* 3–6, 2020, p. 70.
5. Payne S.E., Thas J.A. *Finite generalized quadrangles.* Boston: Pitman, 1984, 312 p., Ser. Research Notes in Math, vol. 110 . ISBN: 0273086553 .
6. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A. On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282 .
7. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms. *Discrete Math.*, 2011, vol. 311, no. 2-3, pp. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .

Received September 10, 2020

Revised December 20, 2020

Accepted January 11, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research — the National Natural Science Foundation of China (project no. 20-51-53013).

Information about the authors:

Aleksandr Alekseevich Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: makhnev@imm.uran.ru .

Dmitrii Viktorovich Paduchikh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: dpaduchikh@gmail.com .

Cite this article as: A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. On distance-regular graphs with intersection arrays $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 146–156 .