ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 512.577+519.68:007.5

# ЭНДОМОРФИЗМЫ КОНЕЧНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ГРУППОИДОВ, СВЯЗАННЫХ С МНОГОСЛОЙНЫМИ НЕЙРОННЫМИ СЕТЯМИ ПРЯМОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ[1]

**А. В. Литаврин**

В данной работе вводятся коммутативные, но в общем случае не ассоциативные группоиды $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$, состоящие из идемпотентов. Группоид $(\mathrm{AGS}(\mathcal{N}), +)$ тесно связан с многослойной нейронной сетью $\mathcal{N}$ прямого распределения сигнала (далее — просто нейронная сеть). Выяснилось, что в таких нейронных сетях задание подсети фиксированной нейронной сети равносильно заданию некоторого специального кортежа, составленного из конечных множеств нейронов исходной сети. Все специальные кортежи, задающие подсеть нейронной сети $\mathcal{N}$, содержатся в множестве $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Остальные кортежи из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ также имеют нейросетевую интерпретацию. Таким образом, $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}) = F_1 \cup F_2$, где $F_1$ — множество кортежей, индуцирующих подсети, и $F_2$ — множество остальных кортежей. Если заданы две подсети нейронной сети, то возникают два случая. В первом случае из данных подсетей можно получить новую подсеть путем объединения множеств всех нейронов этих подсетей. Во втором случае такое объединение невозможно по нейросетевым соображениям. Операция $(+)$ для любых кортежей из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$, индуцирующих подсети, возвращает кортеж, индуцирующий некоторую подсеть, либо возвращает нейтральный элемент, который не индуцирует подсети. Если для двух элементов из $F_1$ операция $(+)$ возвращает нейтральный элемент, то подсети, индуцированные этими элементами, не могут быть объединены в одну подсеть. Для любых двух элементов из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ операция имеет нейросетевую интерпретацию. В работе изучаются алгебраические свойства группоидов $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ и строятся некоторые классы эндоморфизмов таких группоидов. Показано, что всякая подсеть $\mathcal{N}'$ сети $\mathcal{N}$ задает подгруппоид $T$ в группоиде $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$, изоморфный $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}')$. Доказывается, что для всякого конечного моноида $G$ будет существовать нейронная сеть $\mathcal{N}$ такая, что $G$ изоморфно вкладывается в моноид всех эндоморфизмов группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$.

Ключевые слова: эндоморфизм группоида, многослойная нейронная сеть прямого распределения, подсеть многослойной нейронной сети.

**A. V. Litavrin. Endomorphisms of finite commutative groupoids related with multilayer feedforward neural networks.**

In this paper, we introduce commutative, but generally not associative, groupoids $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ consisting of idempotents. The groupoid $(\mathrm{AGS}(\mathcal{N}), +)$ is closely related to the multilayer feedforward neural networks $\mathcal{N}$ (hereinafter just a neural network). It turned out that in such neural networks, specifying a subnet of a fixed neural network is tantamount to specifying some special tuple composed of finite sets of neurons in the original network. All special tuples defining some subnet of the neural network $\mathcal{N}$ are contained in the set $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. The rest of the tuples from $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ also have a neural network interpretation. Thus, $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}) = F_1 \cup F_2$, where $F_1$ is the set of tuples that induce subnets and $F_2$ is the set of other tuples. If two subnets of a neural network are specified, then two cases arise. In the first case, a new subnet can be obtained from these subnets by merging the sets of all neurons of these subnets. In the second case, such a merger is impossible due to neural network reasons. The operation $(+)$ for any tuples from $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ returns a tuple that induces a subnet or returns a neutral element that does not induce subnets. In particular, if for two elements from $F_1$ the operation $(+)$ returns a neutral element, then the subnets induced by these elements cannot be combined into one subnet. For any two elements from $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$, the operation has a neural network interpretation. In this paper, we study the algebraic properties of the groupoids $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ and construct some classes of endomorphisms of such groupoids. It is shown that every subnet $\mathcal{N}'$ of the net $\mathcal{N}$ defines a subgroupoid $T$ in the groupoid $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ isomorphic to $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}')$. It is proved that for every finite monoid $G$ there is a neural network $\mathcal{N}$ such that $G$ is isomorphically embeddable into the monoid of all endomorphisms $\mathrm{End}(\mathrm{AGS}(\mathcal{N}))$. This statement is the main result of the work.

Keywords: groupoid endomorphism, multilayer feedforward neural networks, multilayer neural network subnet.

**MSC:** 08A35, 08A62, 68Q06, 94C11

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-130-145

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

## Введение

Представленная работа посвящена исследованию эндоморфизмов конечных коммутативных, но в общем случае неассоциативных группоидов $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ с нейтральным элементом, которые тесно связаны с многослойными нейронными сетями с прямым распределением сигнала. Основным ее результатом является теорема 2 о вложении произвольного конечного моноида $G$ в моноид всех эндоморфизмов группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ для подходящей нейронной сети $\mathcal{N}$. Связь между подсетями нейронной сети $\mathcal{N}$ и подгруппоидами группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ выявляет теорема 1.

Прежде чем перейти к формулировке результатов, рассмотрим общую информацию о нейронных сетях (см. также разд. 1).

Различные подходы к определению нейронных сетей можно найти, например, в [1; 2]. Начало изучению нейросетей было положено в работе [3] (В. Мак-Каллох и В. Питтс, 1943 г.). В 1949 г. Д. Хебб изложил соображения, которые легли в основу обучения некоторых нейросетей. Персептроны Ф. Розенблатта появились в 1959 г. (см. [4]).

В нашей работе рассматриваются только *многослойные нейронные сети с прямым распределением сигнала*. В частности, такие сети не имеют связей между нейронами, лежащими в одном слое. Под *прямым распределением сигнала*, как обычно, понимается движение сигнала от входного слоя нейронной сети к выходному. Поскольку другие нейросети мы не рассматриваем, будем называть их просто *нейронными сетями* (*нейросетями* или *сетями*).

Традиционно в таких сетях нейроны группируются в попарно не пересекающиеся классы, называемые в дальнейшем *слоями*, каждый нейрон $i$-го слоя соединяется со всеми нейронами из соседних слоев. Нейроны $i$-го слоя не соединяются между собой и не соединяются с нейронами $j$-го слоя, когда $j > i + 1$ или $j < i - 1$. Соединение между нейронами называется *синоптической связью* (или коротко *связью*), и каждой синоптической связи ставится в соответствие некоторое действительное число — *вес* связи. Каждому нейрону нейронной сети ставятся в соответствие функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которую принято называть *функцией активации*, и число — *пороговое значение* нейрона. Выбор функций активации зависит от контекста, в котором используется нейронная сеть. В некоторых моделях нейроны первого слоя не имеют функции активации.

Под *вычислительной схемой* в статье, как обычно, будет пониматься способ организации вычислений или способ задания вычислительных алгоритмов.

Для описания вычислений с помощью нейронной сети используют *модель искусственного нейрона* (описание модели искусственного нейрона приведем в разд. 1). В настоящем исследовании нейронные сети понимаются как вычислительные схемы и вопросы обучения не затрагиваются (описание работы сети как вычислительной схемы приведем в разд. 1).

В статье будут рассматриваться *подсети* фиксированной нейронной сети (как вычислительные схемы, являющиеся частью исходной нейросети). *Подсетью фиксированной нейронной сети* $\mathcal{N}$ мы будем называть вычислительную схему, построенную на некоторой совокупности нейронов $W$ исходной сети. Совокупность $W$ должна включать нейроны минимум из двух слоев такие, что из каждого нейрона $i$-го слоя этой совокупности можно попасть в произвольный нейрон $j$-го слоя этой совокупности, когда $i \neq j$. При этом проход осуществляется по синоптическим связям и нейронам других слоев данной совокупности. Проход осуществляется строго от первого слоя в $W$ к последнему слою совокупности $W$. В частности, каждый нейрон данной совокупности соединяется со всеми нейронами данной совокупности, лежащими в соседних слоях. Приведенные условия позволяют рассматривать подсеть как некоторую новую нейронную сеть.

В следующем разделе приведены строгие определения нейросети и ее подсетей как вычислительных схем с помощью базовых математических объектов (кортежей, множеств и отображений). В частности, это необходимо для строгости изложения и упростит восприятие статьи специалистами, привыкшими работать с алгебраическими системами.

Под количеством слоев $n(\mathcal{N})$ нейросети $\mathcal{N}$ в данной работе мы понимаем количество всех слоев, включая входной и выходной слои.

Пусть задана нейросеть $\mathcal{N}$, состоящая из $n = n(\mathcal{N})$ слоев. Ясно, что в этом случае будет определен кортеж $\overline{M} := (M_1, \ldots, M_n)$ из конечных непустых множеств. Элементами множества $M_i$ являются все нейроны $i$-го слоя. Кортеж $\overline{M}$ будем называть *основным кортежем нейронов* для нейросети $\mathcal{N}$.

**Построение группоидов** $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$**.** Вначале сформулируем необходимые понятия и приведем обозначения, необходимы для построения группоидов $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. В статье множества будут обозначаться большими латинскими буквами, а кортежи, составленные из множеств, большими латинскими буквами с чертой.

Кортеж из пустых множеств обозначим символом $\overline{\varnothing} := (\varnothing, \ldots, \varnothing)$ (длина такого кортежа всегда будет понятна из контекста).

Пусть заданы два кортежа $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ и $\overline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ конечных непустых множеств. Тогда через $\overline{X} \cup \overline{Y}$ будем обозначать покомпонентное объединение. Таким образом,

$$\overline{X} \cup \overline{Y} := (X_1 \cup Y_1, \ldots, X_n \cup Y_n).$$

Если $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ и $\overline{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ — два кортежа, компонентами которых являются множества, то будем говорить, что выполняется условие $\overline{X} \subseteq \overline{M}$ в случае, когда выполняются все включения $X_1 \subseteq M_1, \ldots, X_n \subseteq M_n$ (покомпонентное включение).

Пусть $(X_1, \ldots, X_n)$ — некоторый кортеж, составленный из конечных множеств. Будем говорить, что кортеж *непрерывный* в случае, когда для любых различных $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ справедлива следующая импликация: если $X_i \neq \varnothing$ и $X_j \neq \varnothing$ и $i < j$, то для любого $s \in \{i, \ldots, j\}$ выполняется неравенство $X_s \neq \varnothing$. Кортеж $\overline{\varnothing}$ считаем непрерывным по определению. Чтобы кортеж множеств был непрерывным, в нем не должно быть чередования непустого множества с интервалом из пустых множеств, а потом опять с непустым множеством.

П р и м е р 1. В силу сказанного выше кортежи $(\varnothing, \varnothing, \{a, b\}, \{c\}, \varnothing)$ и $(\varnothing, \{c\})$ непрерывны, а кортеж $(\varnothing, \{a\}, \varnothing, \varnothing, \{c\}, \varnothing)$ непрерывным не является.

Теперь сформулируем определение группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть определена нейросеть $\mathcal{N}$ с основным кортежем нейронов $\overline{M}$. Множество всевозможных непрерывных кортежей $\overline{X} \subseteq \overline{M}$ будем обозначать символом $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$.

Полагаем, что $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — два произвольных элемента из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Определим бинарную алгебраическую операцию $(+)$ на множестве $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$:

$$\overline{X} + \overline{Y} := \begin{cases} \overline{X} \cup \overline{Y}, & \text{если } \overline{X} \cup \overline{Y} \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N}) \\ \overline{\varnothing}, & \text{если } \overline{X} \cup \overline{Y} \notin \mathrm{AGS}(\mathcal{N}). \end{cases}$$

Тогда группоид $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}) := (\mathrm{AGS}(\mathcal{N}), +)$ будем называть *аддитивным группоидом подсетей нейронной сети* $\mathcal{N}$.

Далее выявится связь между элементами группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ и подсетями нейросети $\mathcal{N}$. Обзначение $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ вводится как аббревиатура "additive groupoid of subnets" (аддитивный группоид подсетей). Нейросетевое значение группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ будет раскрыто в замечании 3 (см. разд. 1).

**Основные цели исследования.** Данная работа направлена на изучение алгебраических свойств группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Изучаются эндоморфизмы данного группоида. Было установлено, что группоид $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ обладает нейтральным элементом, коммутативен, но в общем случае он не ассоциативен и состоит из идемпотентов (см. утверждения 1, 2). Группоид $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ является моноидом тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}$ — двухслойная нейросеть, т. е. $n(\mathcal{N}) = 2$ (см. утверждение 2). Группоид $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ не является квазигруппой (доказывается тривиально).

Напомним определение эндоморфизма группоида.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $G = (G, *)$ — группоид. Тогда отображение $\phi : G \to G$ будем называть *эндоморфизмом* группоида $G$, если для любых $x, y \in G$ выполняется равенство

$$(x * y)^{\phi} = x^{\phi} * y^{\phi}. \tag{0.1}$$

Множество всех эндоморфизмов группоида $G$, как обычно, будем обозначать $\mathrm{End}(G)$. Хорошо известно, что множество $\mathrm{End}(G)$ является моноидом (полугруппой с 1) относительно композиции двух отображений.

**Основные задачи и результаты исследования.** Известно, что всякий моноид можно представить как моноид всех эндоморфизмов некоторой алгебраической системы. При этом вопрос о вложении произвольного моноида в моноид всех эндоморфизмов некоторой алгебраической системы из фиксированного класса алгебраических систем является нетривиальным и заслуживающим изучения. Нетривиальность объясняется необходимостью рассмотрения в каждом отдельном случае эндоморфизмов конкретных алгебраических систем. В связи с чем возникает интерес к следующей задаче.

З а д а ч а 1. Выяснить, можно ли всякий конечный моноид изоморфно вложить в моноид всех эндоморфизмов группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ для подходящей нейросети $\mathcal{N}$.

Положительный ответ на указанный вопрос дает теорема 2 (доказывается в разд. 4).

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — некоторый конечный моноид и $\mathcal{N}$ — нейронная сеть, имеющая хотя бы один слой $M_i$ такой, что выполняется неравенство $|M_i| \geq |G|$. Тогда $G$ изоморфно вкладывается в моноид* $\mathrm{End}(\mathrm{AGS}(\mathcal{N}))$.

Моноид всех эндоморфизмов алгебраической системы — важная характеристика этой системы. Эндоморфизмы различных алгебраических систем часто становятся объектом исследования (см., например, работы [5–7]). В этой статье исследуется

З а д а ч а 2. Привести поэлементное описание моноида $\mathrm{End}(\mathrm{AGS}(\mathcal{N}))$.

Этот вопрос остается открытым. Были построены некоторые классы эндоморфизмов, которые полезны для решения указанной задачи. Для каждого $i \in \{1, \ldots, n(\mathcal{N})\}$ построен класс эндоморфизмов $P_i(\mathcal{N})$ группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$, индуцированный с помощью правила (4.3), кортежами эндоморфизмов моноида $(2^{M_i}, \cup)$, где $M_i$ — компонента с номером $i$ в основном кортеже нейронов нейросети $\mathcal{N}$. Эндоморфизмов из $P_i(\mathcal{N})$ хватило для доказательства основной теоремы 2. Множества эндоморфизмов $P_i(\mathcal{N})$ являются подмоноидами в моноиде $\mathrm{End}(\mathrm{AGS}(\mathcal{N}))$.

Кроме приведенных выше эндоморфизмов с помощью задания действия эндоморфизма на порождающем множестве элементов группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ были построены и другие эндоморфизмы группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Порождающее множество элементов задается равенством (5.1). Построена серия эндоморфизмов $\eta[i, \overline{X}, \overline{Y}]$ (см. (5.3) и утверждение 3); данные эндоморфизмы не могут быть получены как композиция эндоморфизмов из $P_i(\mathcal{N})$. Построенные эндоморфизмы будут полезны для дальнейшего исследования задачи 2.

Выявилась интересная связь между подсетями нейронной сети $\mathcal{N}$ и подгруппоидами группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Так, для любой подсети $\mathcal{N}'$ нейронной сети $\mathcal{N}$ в группоиде $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ найдется подгруппоид $T$, изоморфный $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}')$ (см. теорему 1 в разд. 2).

## 1. Нейронные сети, связанные определения и замечания

В данном разделе описано стандартное действие нейронной сети как вычислительной схемы.

Как обычно, $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел. Через $F(\mathbb{R})$ обозначим множество всех функций $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (здесь понимается, что область определения функции $h$ совпадает с множеством $\mathbb{R}$).

О п р е д е л е н и е 3. Пусть заданы следующие объекты:

1) кортеж $(M_1, \dots, M_n)$ длины $n > 1$ конечных непустых множеств, где при $i \neq j$ справедливо $M_i \cap M_j = \varnothing$;

2) множество $S := (M_1 \times M_2) \cup (M_2 \times M_3) \cup \ldots \cup (M_{n-1} \times M_n)$;

3) отображение $f : S \to \mathbb{R}$, которое каждой паре из $S$ ставит в соответствие действительное число;

4) множество $A := M_1 \cup \ldots \cup M_n$;

5) отображение $g : A \to F(\mathbb{R})$, которое каждому элементу из $A$ ставит в соответствие функцию из $F(\mathbb{R})$;

6) отображение $l : A \to \mathbb{R}$, которое каждому элементу из $A$ ставит в соответствие некоторое число из $\mathbb{R}$.

Тогда кортеж $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ будем называть *многослойной нейронной сетью прямого распределения* (в рамках данной работы просто нейронные сети).

Кортеж $(M_1, \dots, M_n)$ интерпретируется как основной кортеж нейронов нейросети $\mathcal{N}$, $S$ — как совокупность синоптических связей. Функция $f$ задает веса синоптических связей, функция $g$ определяет функции активации у каждого нейрона, а функция $l$ — пороговые значения нейронов. *Входным слоем* будем называть совокупность нейронов $M_1$.

**Работа нейронной сети.** Работу нейросети $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ как вычислительной схемы будет реализовывать функция $F_{\mathcal{N}} : \mathbb{R}^{|M_1|} \to \mathbb{R}^{|M_n|}$. Действие этой функции мы опишем, используя прием, который называют *моделью искусственного нейрона* (см. [1, с. 26; 2, с. 13]). Полагаем, что $n$ — некоторый нейрон слоя $M_i$, где $i > 1$. Нейрон $n$ получает сигнал (в виде числа) от каждого нейрона предыдущего слоя. Обозначим эти нейроны символами $n_1, \dots, n_{|M_{i-1}|}$, а сигналы (числа), которые они посылают, — символами $a_1, \dots, a_{|M_{i-1}|}$. Нейрон $n$ генерирует свой сигнал $G_n$ по правилу

$$G_n = y\Big(\sum_{i=1}^{|M_{i-1}|} f\left((n_i, n)\right) \cdot a_i + l(n)\Big),$$

где $f, g$ и $l$ — функции из определения 1, а $y \equiv g(n)$ — функция активации нейрона $n$. Дальше сигнал передается через соответствующие синоптические связи. Правило вычисления сигнала $G_n$ можно найти в [1, с. 28; 2, с. 14] (*нелинейный преобразователь сигнала*).

Рассмотрим теперь действие функции $F_{\mathcal{N}}$. Упорядочим $M_1$ и $M_n$. На входной слой $M_1$ подается вектор входных сигналов $(x_1, x_2, \dots, x_{|M_1|})$. Нейрон $n$ входного слоя через соответствующие синоптические связи передает сигнал $y(x_i + l(n))$ на второй слой, где $y \equiv g(n)$ — функция активации нейрона $n$. А начиная со второго слоя, нейроны работают по правилу, описанному выше. В конце выходной слой сгенерирует выходной сигнал $(y_1, \dots, y_{|M_n|})$. Таким образом, $F_{\mathcal{N}}(x_1, x_2, \dots, x_{|M_1|}) := (y_1, \dots, y_{|M_n|})$ (определение векторов, стоящих в аргументе и в результате см. выше).

Формально можно сказать, что *нейронная сеть как вычислительная схема* — это кортеж $(M_1, \dots, M_n, f, g, l, F_{\mathcal{N}})$, где $F_{\mathcal{N}}$ — функция, определенная выше. Определение сети $\mathcal{N}$ задает функцию $F_{\mathcal{N}}$ с точностью до порядка координат во входном и выходном векторах.

Замечание 1. Обычно (но не всегда), нейроны входного слоя не имеют функции активации и порогового значения. Если полагать, что $f(n) \equiv \mathrm{id}(x)$ и $l(n) = 0$ для любого $n \in M_1$, то мы придем к стандартной модели многослойной нейронной сети с прямым распределением сигнала (см., например, [1, с. 228]). Также с помощью определения 1 и описанной модели работы нейросети как вычислительной схемы можно построить модель многослойного персептрона [1, с. 66]. Стоит отметить, что существуют различные вариации работы нейросети как вычислительной схемы (см., например, [1, с. 76]).

Приведем определение подсети нейросети.

Определение 4. Пусть определена нейросеть $\mathcal{N} = (M_1, \dots, M_n, f, g, l)$ и задан непрерывный кортеж $(X_1, \dots, X_n)$ такой, что в нем имеется более одной компоненты, отличной от пустого множества, и $(X_1, \dots, X_n) \subseteq (M_1, \dots, M_n)$.

Полагаем, что $(Y_1, \dots, Y_m)$ — кортеж, полученный из кортежа $(X_1, \dots, X_n)$ вычеркиванием компонент, равных пустому множеству, где $m \le n$.

Если $f'$ — ограничение функции $f$ на множестве

$$S' := (Y_1 \times Y_2) \cup (Y_2 \times Y_3) \cup \ldots \cup (Y_{m-1} \times Y_m)$$

и $g'$, $l'$ — ограничение функций $g$ и $l$ на множестве $A' := Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$, то объект

$$\mathcal{N}' := (Y_1, \dots, Y_m, f', g', l')$$

будем называть *подсетью* сети $\mathcal{N}$. Будем говорить, что кортеж $(X_1, \dots, X_n)$ *индуцирует* подсеть $\mathcal{N}'$. Кортеж $(Y_1, \dots, Y_m)$ является основным кортежем нейронов подсети $\mathcal{N}'$. В общем случае кортежи $(X_1, \dots, X_n)$ и $(Y_1, \dots, Y_m)$ могут быть различны.

З а м е ч а н и е 2. Очевидно, что всякая подсеть $\mathcal{N}'$ нейронной сети $\mathcal{N}$ сама будет нейросетью в смысле определения 3. Непрерывность кортежа $(X_1, \dots, X_n)$ из определения 4 необходима для того, чтобы в подсети $\mathcal{N}'$ из нейрона любого $i$-го слоя сигнал мог пройти в нейрон любого $j$-го слоя, где $j > i$. Причем проход должен осуществляться по синоптическим связям и нейронам данной подсети, которые присутствуют в исходной сети. Из определения 3 следует, что всякий непрерывный кортеж, содержащий более двух компонент, отличных от пустого множества, будет задавать некоторую подсеть. С другой стороны, всякая подсеть $\mathcal{N}'$ будет задавать кортеж $\overline{X}$ из определения 4, который ее индуцирует.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере.

П р и м е р 2. Пусть задана трехслойная нейронная сеть $\mathcal{N} = (M_1, M_2, M_3, f, g, l)$, где

$$M_1 := \{a_1, a_2, a_3\},\ M_2 := \{b_1\},\ M_3 := \{c_1, c_2\}.$$

Считаем, что функции $f, g, l$ определены (их конкретное задание не важно для данного примера). Множества $A$ и $S$ из определения 3 в этом случае следующие:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, b_1, c_1, c_2\}, \quad S = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (b_1, c_1), (b_1, c_2)\}.$$

1. Рассмотрим кортеж $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3) \subseteq (M_1, M_2, M_3)$, где $X_1 = \varnothing$, $X_2 = \{b_1\}$ и $X_3 = \{c_1, c_2\}$. Кортеж $\overline{X}$ непрерывен. Построим подсеть нейронной сети $\mathcal{N}$, используя определение 4. Вычеркиваем из кортежа $\overline{X}$ все пустые множества и получаем кортеж $\overline{Y} = (X_2, X_3)$. Строим множества $A'$ и $S'$ из определения 4. Получаем $A' = \{b_1, c_1, c_2\}$ и $S' = \{(b_1, c_1), (b_1, c_2)\}$. Ясно, что $A' \subseteq A$ и $S' \subseteq S$. Полагаем, что $f', g', l'$ — ограничения из определения 4. Тогда имеем объект $\mathcal{N}' = (X_2, X_3, f', g', l')$. Данный объект удовлетворяет определению 3.

2. Рассмотрим кортеж $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3) \subseteq (M_1, M_2, M_3)$, где $X_1 = \{a_1, a_2\}$, $X_2 = \varnothing$ и $X_3 = \{c_1, c_2\}$. Кортеж $\overline{X}$ не является непрерывным. В силу определения 4 на данном кортеже нельзя построить подсеть.

Проиллюстрируем проблему. Проигнорируем ограничения определения 4 и попытаемся провести процедуру, как в предыдущем пункте. Если из кортежа $\overline{X}$ вычеркнуть компоненты, равные пустому множеству, то получим кортеж $(X_1, X_3)$. Составляем множества $A'$ и $S'$. Получаем $A' = \{a_1, a_2, c_1, c_2\}$ и $S' = \{(a_1, c_1), (a_1, c_2), (a_2, c_1), (a_2, c_2)\}$. При этом выполняется равенство $S \cap S' = \varnothing$ и функция $f$ не определена ни на одном элементе множества $S'$. С точки зрения нейросетей появляются синоптические связи, которых не было в исходной нейронной сети. Такие объекты неуместно трактовать как подсети заданной сети. Данная проблема иллюстрирует необходимость условия непрерывности кортежа $\overline{X}$ из определения 4.

Отметим, что из нейронной сети можно выделить структуры, которые можно интерпретировать как нейронные сети других типов (т. е. не попадающих под описание определения 3). Например, убрав условие наличие всех связей между соседними слоями подсети. Такие случаи остаются за рамками данной работы, имеют свои нюансы в интерпретировании и описании работы сети как вычислительной схемы (требуются корректировка модели искусственного нейрона).

З а м е ч а н и е 3. Пусть заданы две подсети $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}'$ исходной сети $\mathcal{N}$. Значит, определены два непрерывных кортежа $\overline{X}_1, \overline{X}_2 \subseteq \overline{M}$. Естественно возникает интерес к объединению двух подсетей $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}''$ в одну подсеть. Под объединением здесь понимается объединение нейронов, которые имеются в этих двух подсетях (или, что то же самое, покомпонентное объединение кортежей $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$). Ясно, что такое объединение возможно не всегда. Для того чтобы две сети можно было таким способом объединить в одну, необходимо и достаточно, чтобы кортеж $\overline{X}_1 \cup \overline{X}_2$ был непрерывным (вытекает из определения 4). Поэтому возникает необходимость различать случаи, когда кортеж $\overline{X}_1 \cup \overline{X}_2$ непрерывный, а когда нет.

В группоиде AGS($\mathcal{N}$) содержатся все непрерывные кортежи $\overline{X} \subseteq \overline{M}$. Операция (+) реализована так, что $\overline{X}_1 + \overline{X}_2 = \overline{X}_1 \cup \overline{X}_2$, если $\overline{X}_1 \cup \overline{X}_2$ — непрерывный кортеж. И $\overline{X}_1 + \overline{X}_2 = \overline{\varnothing}$ — в противном случае. Таким образом, с помощью операции (+) по двум заданным подсетям нейросети $\mathcal{N}$ можно построить новую подсеть этой нейросети, полученную путем объединения заданных подсетей.

Включение кортежа $\overline{\varnothing}$ в множество AGS($\mathcal{N}$) оказывается полезным, так как очевидно, что кортеж $\overline{\varnothing}$ не задает никакую подсеть нейросети $\mathcal{N}$, и если результат (+) двух подсетей равен кортежу пустых множеств, то это является критерием того, что две данные подсети не могут быть объединены в одну подсеть данной нейросети $\mathcal{N}$.

Включение в множество AGS($\mathcal{N}$) кортежей, у которых только одна компонента отлична от пустого множества, позволяет прибавлять к некоторой подсети одиночный нейрон или набор нейронов, лежащих в одном слое. Такая возможность может быть полезной при переходе от одной подсети к другой с помощью операции (+).

Описанные выше обстоятельства и обуславливают связь между подсетями нейронной сети $\mathcal{N}$ и группоидом AGS($\mathcal{N}$).

**Другие подходы к определению понятия подсети.** В работе [8] вводится понятие *абстрактной нейронной сети* как трехосновной алгебры. Абстрактная нейронная сеть похожа на алгебраическую модель автомата (см., например, [9] или [10]), но отличается от нее операцией вычисления нового состояния, что позволяет моделировать процесс обучения нейронной сети. Указанный подход дает возможность алгебраическими методами исследовать различные аспекты нейросетевых вычислений. В нем нейросеть как вычислительная схема отождествляется с операцией, которая вычисляет выходное значение нейронной сети. Абстрактная нейронноя сеть не может раскрывать структурные свойства нейронной сети (совокупность нейронов и их связей), которую описывает. Для описания структурных свойств нейросетей в работе [8] использовалось понятие *граф-схемы*. Понятие абстрактной нейронной сети может быть удобным инструментом для исследования различных аспектов работы нейронных сетей, не связанных с их структурой.

В [8] предлагается также понятие *подсети абстрактной нейронной сети*. Это понятие вводится по аналогии с соответствующим алгебраическим понятием и получается путем рассмотрения нейронной сети как вычислительной схемы на ограничении множества входных сигналов и состояний. Такой подход принципиально отличается от подходов нашей статьи; здесь под подсетью некоторой нейронной сети понимается именно нейронная сеть, которая как вычислительная схема построена на нейронах, их связях, весах синоптических связей, функциях активации и пороговых значениях исходной нейронной сети; на множество входных сигналов при этом ограничения не накладываются.

Подход к определению понятия подсети (определение 4), представленный в данном исследовании, соответствует обычному подходу работ, направленных на изучение свойств нейросетей и способов их конструирования в контексте конкретных прикладных задач (см. например, [11; 12]).

Конфликт между понятиями не возникает, если различать нейронную сеть и абстрактную нейронную сеть, которая ей соответствует, и относиться к этим объектам как к различным.

## 2. Основные алгебраические свойства группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$

**Утверждение 1.** *Группоид* $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ *является коммутативным группоидом с нейтральным элементом и состоит из идемпотентов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, коммутативность следует из коммутативности объединения множеств. Нейтральным элементом группоида $(\mathrm{AGS}(\mathcal{N}), +)$ является $\overline{\varnothing}$.

Идемпотентность следует из идемпотентности объединения двух множеств. □

**Утверждение 2.** *Группоид* $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ *является ассоциативным группоидом при* $n(\mathcal{N}) = 2$ *и не ассоциативен при* $n(\mathcal{N}) > 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n(\mathcal{N}) = 2$. Тогда $\overline{X_1} + \overline{X_2} = \overline{X_1} \cup \overline{X_2}$ для любых кортежей $\overline{X_1}, \overline{X_2} \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N})$, следовательно, для любых $\overline{Y_1}, \overline{Y_2}, \overline{Y_3} \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ выполняются равенства

$$(\overline{Y_1} + (\overline{Y_2} + \overline{Y_3})) = (\overline{Y_1} \cup (\overline{Y_2} \cup \overline{Y_3})) = ((\overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}) \cup \overline{Y_3}) = ((\overline{Y_1} + \overline{Y_2}) + \overline{Y_3}).$$

В последней цепочке равенств была использована ассоциативность объединения множеств.

Пусть $n(\mathcal{N}) > 2$. Тогда в $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ можно выбрать три элемента

$$\overline{X_1} = (\{a\}, \varnothing, \varnothing, \ldots, \varnothing), \quad \overline{X_2} = (\varnothing, \{b\}, \varnothing, \ldots, \varnothing), \quad \overline{X_3} = (\varnothing, \varnothing, \{c\}, \ldots, \varnothing)$$

$$(a \in M_1,\ b \in M_2,\ c \in M_3).$$

Далее делаем вычисления

$$(\overline{X_3} + (\overline{X_1} + \overline{X_2})) = (\{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing, \ldots, \varnothing), \quad ((\overline{X_3} + \overline{X_1}) + \overline{X_2}) = \overline{\varnothing} + (\varnothing, \{b\}, \varnothing, \ldots, \varnothing) = \overline{X_2}.$$

Таким образом, при $n > 2$ ассоциативности нет. □

Связь между подсетями нейронной сети $\mathcal{N}$ и подгруппоидами группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}')$ выявляет следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathcal{N}'$ *— подсеть нейронной сети* $\mathcal{N}$. *Тогда группоид* $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ *имеет подгруппоид* $T$ *такой, что* $T$ *изоморфен* $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}')$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всякая подсеть $\mathcal{N}'$ может быть индуцирована подходящим кортежем из группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Пусть $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — кортеж из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$, индуцирующий подсеть $\mathcal{N}'$. Полагаем, что $D$ — множество, составленное из номеров компонент, которые в кортеже $\overline{X}$ равны пустому множеству.

Множество всех непрерывных кортежей $\overline{U}$ с условием $\overline{U} \subseteq \overline{X}$ обозначим символом $H$. Множество $H$ замкнуто относительно операции $(+)$. В самом деле, пусть $\overline{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ и $\overline{V} = (V_1, \ldots, V_n)$ — произвольные элементы из $H$. Если $\overline{U} + \overline{V} = \overline{\varnothing}$, то $\overline{U} + \overline{V} \in H$, поскольку $\overline{\varnothing} \in H$. Если $\overline{U} + \overline{V} \neq \overline{\varnothing}$, то $\overline{U} + \overline{V} = (U_1 \cup V_1, \ldots, U_n \cup V_n)$, $U_i, V_i \subseteq X_i$ для $i = 1, \ldots, n$, следовательно, $\overline{U} + \overline{V} \subseteq \overline{X}$.

Пусть $\overline{Y}$ — основной кортеж нейронов подсети $\mathcal{N}'$. Этот кортеж в силу определения 4 получается из кортежа $\overline{X}$ удалением компонент, равных пустому множеству (т. е. компонент с номерами из $D$). Поэтому если удалить из кортежей, лежащих в $H$, компоненты с номерами из $D$, то мы получим множество кортежей, равное $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}')$. Компоненты с номерами из $D$ во всех кортежах из $H$ равны пустому множеству в силу определения множества $H$. Таким образом, $|H| = |\mathrm{AGS}(\mathcal{N}')|$.

Приходим к отображению $\alpha : H \to \mathrm{AGS}(\mathcal{N}')$, которое каждому кортежу $\overline{U} \in H$ сопоставляет кортеж $\overline{U}' \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N}')$, полученный путем вычеркивания из кортежа $\overline{U}$ компонент с номерами, лежащими в $D$. Из сказанного выше ясно, что отображение $\alpha$ является биекцией множества $H$ на множество $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}')$.

Справедливо равенство
$$\alpha(\overline{U}+\overline{V})=\alpha(\overline{U})+_1\alpha(\overline{V}), \tag{2.1}$$
где $(+_1)$ — операция в группоиде $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}')$. Действительно, поскольку кортеж $\overline{X}$ непрерывный и индуцирует подсеть, то он имеет один из четырех видов:
$$(\varnothing,\dots,\varnothing,X_{s_1},\dots,X_{s_d},\varnothing,\dots,\varnothing),\quad (X_{s_1},\dots,X_{s_d},\varnothing,\dots,\varnothing),$$
$$(\varnothing,\dots,\varnothing,X_{s_1},\dots,X_{s_d}),\quad (X_{s_1},\dots,X_{s_d}).$$
В приведенных видах все компоненты с номерами из $D$ явно указаны как пустые множества, а номера $s_1,\dots,s_d$ не лежат в $D$.

Проведем рассуждения для первого случая, в остальных случаях рассуждения аналогичные. Для кортежей $\overline{U}$ и $\overline{V}$ получаем запись
$$\overline{U}=(\varnothing,\dots,\varnothing,U_{s_1},\dots,U_{s_d},\varnothing,\dots,\varnothing),\ \ \overline{V}=(\varnothing,\dots,\varnothing,V_{s_1},\dots,V_{s_d},\varnothing,\dots,\varnothing).$$
Некоторые крайние множества $U_i,V_i$ при $i\in\{s_1,\dots,s_d\}$ могут равняться пустому множеству, но $\{s_1,\dots,s_d\}\cap D=\varnothing$. Если, например, $\overline{U}=\overline{\varnothing}$, то $U_{s_1}=\ldots=U_{s_d}=\varnothing$. Полагаем, что $\overline{U}+\overline{V}\neq\overline{\varnothing}$. Тогда верны равенства
$$\alpha(\overline{U}+\overline{V})=\alpha((\varnothing,\dots,\varnothing,U_{s_1}\cup V_{s_1},\dots,U_{s_d}\cup V_{s_d},\varnothing,\dots,\varnothing))=(U_{s_1}\cup V_{s_1},\dots,U_{s_d}\cup V_{s_d}),$$
$$\alpha(\overline{U})+_1\alpha(\overline{V})=\alpha((\varnothing,\dots,\varnothing,U_{s_1},\dots,U_{s_d},\varnothing,\dots,\varnothing))+_1\alpha((\varnothing,\dots,\varnothing,V_{s_1},\dots,V_{s_d},\varnothing,\dots,\varnothing))$$
$$=(U_{s_1},\dots,U_{s_d})+_1(V_{s_1},\dots,V_{s_d})=(U_{s_1}\cup V_{s_1},\dots,U_{s_d}\cup V_{s_d})=\alpha(\overline{U}+\overline{V}).$$
В этом случае равенство (2.1) выполняется. Обратимся к случаю, когда $\overline{U}+\overline{V}=\overline{\varnothing}$.

Ситуация, когда оба кортежа равны $\overline{\varnothing}$, не имеет отличий от ситуации, рассмотренной выше (множества $U_i$ и $V_i$ заменяются на пустые множества). Поскольку $\overline{U}$ и $\overline{V}$ — непрерывные кортежи и компоненты с номерами из $D$ равны пустому множеству и $\overline{U}+\overline{V}=\overline{\varnothing}$, то будет выполняться равенство $(U_{s_1},\dots,U_{s_d})+_1(V_{s_1},\dots,V_{s_d})=\overline{\varnothing}'$, где кортеж $\overline{\varnothing}'$ имеет $d$ компонент. В этом случае равенство (2.1) выполняется.

Остальные три случая проверяются аналогично. Таким образом, подгруппоид $H$ изоморфен $\mathrm{AGS}(\mathcal{N}')$. Полагаем, что $H=T$ из условия теоремы.

Теорема доказана.

## 3. Эндоморфизмы аддитивного булеана

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются леммы 1 и 2. Пусть $X$ — некоторое конечное множество, $2^X$ — булеан множества $X$, $G(X):=(2^X,\cup)$ — моноид. Для элементов множества $X$ введем обозначения $X=\{a_1,\dots,a_n\}$.

Хорошо известно, что $G(X)=(2^X,\cup)$ — коммутативный моноид, состоящий из идемпотентов.

В данном разделе мы построим подмоноид моноида эндоморфизмов для моноида $G(X)$. Под эндоморфизмом моноида мы понимаем, как обычно, эндоморфизм соответствующего группоида, который действует тождественно на нейтральном элементе моноида. В нашем случае если $\phi$ — эндоморфизм группоида $G(X)$, то $\phi$ — эндоморфизм моноида $G(X)$ тогда и только тогда, когда $\varnothing^{\phi}=\varnothing$.

*Симметрическую полугруппу* всех отображений множества $X$ в себя будем обозначать символом $\mathcal{I}(X)$, композицию двух отображений из $\mathcal{I}(X)$ — символом $(\circ)$. Если $x$ — произвольный элемент из $X$ и $\alpha$ — произвольное отображение из $\mathcal{I}(X)$, то $\alpha(x)$ — образ элемента $x$ под действием отображения $\alpha$. Если $\alpha,\beta\in\mathcal{I}(X)$ и $x\in X$, то полагаем $(\alpha\circ\beta)(x):=\alpha(\beta(x))$.

Для всякого $\alpha\in\mathcal{I}(X)$ введем отображение $\sigma_\alpha$, которое задано правилом
$$\sigma_\alpha:\ U\to\{\alpha(u)\mid u\in U\}\quad (U\in 2^X,\ U\neq\varnothing);\ \ \varnothing\to\varnothing. \tag{3.1}$$

*Обозначения, связанные с действием эндоморфизмов.* Полагаем, что $G$ — некоторый группоид, $x \in G$ и $\phi \in \mathrm{End}(G)$. Тогда $x^{\phi}$ — образ элемента $x$ под действием эндоморфизма $\phi$. Композицию двух эндоморфизмов будем обозначать символом $(\cdot)$. Если $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{End}(G)$ и $x \in G$, то $x^{\phi_1 \cdot \phi_2} := (x^{\phi_2})^{\phi_1}$.

**Лемма 1.** *Отображение $\sigma_\alpha$ — эндоморфизм моноида $G = (2^X, \cup)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U$ и $V$ — произвольные непустые множества из $2^X$. Полагаем, что они имеют вид $U = \{a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_d}\}$, $V = \{a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots, a_{l_m}\}$. Покажем, что для $\sigma_\alpha$ выполняется условие (0.1). Проведем вычисления

$$(U \cup V)^{\sigma_\alpha} = \{\alpha(a_{s_1}), \alpha(a_{s_2}), \ldots, \alpha(a_{s_d}), \alpha(a_{l_1}), \alpha(a_{l_2}), \ldots, \alpha(a_{l_m})\}.$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$U^{\sigma_\alpha} = \{\alpha(a_{s_1}), \alpha(a_{s_2}), \ldots, \alpha(a_{s_d})\}, \quad V^{\sigma_\alpha} = \{\alpha(a_{l_1}), \alpha(a_{l_2}), \ldots, \alpha(a_{l_m})\},$$

$$U^{\sigma_\alpha} \cup V^{\sigma_\alpha} = \{\alpha(a_{s_1}), \alpha(a_{s_2}), \ldots, \alpha(a_{s_d}), \alpha(a_{l_1}), \alpha(a_{l_2}), \ldots, \alpha(a_{l_m})\}.$$

Ясно, что при такой записи элементы в множествах $(U \cup V)^{\sigma_\alpha}$ и $U^{\sigma_\alpha} \cup V^{\sigma_\alpha}$ могут дублироваться (неприведенная запись множества в виде перечисления). При этом $(U \cup V)^{\sigma_\alpha} = U^{\sigma_\alpha} \cup V^{\sigma_\alpha}$.

Рассмотрим случай, когда одно из множеств пусто (полагаем пустым множество $U$). Тогда будут выполняться равенства

$$(U \cup \varnothing)^{\sigma_\alpha} = U^{\sigma_\alpha}, \quad U^{\sigma_\alpha} \cup \varnothing^{\sigma_\alpha} = U^{\sigma_\alpha}.$$

Случай суммы двух пустых множеств доказывается аналогично. □

Далее введем обозначение $E(X) := \{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}(X)\}$.

**Лемма 2.** *Имеет место изоморфизм $\mathcal{I}(X) \cong E(X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что множество $E(X)$ содержит тождественный эндоморфизм из $\mathrm{End}(G(X))$. Множество $E(X)$ является замкнутым относительно композиции. В самом деле, пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{I}(X)$. Полагаем, что $U$ — произвольный элемент, отличный от пустого множества, из булеана $2^X$. Тогда справедливы равенства

$$U^{\sigma_{\alpha_1} \cdot \sigma_{\alpha_2}} = (U^{\sigma_{\alpha_2}})^{\sigma_{\alpha_1}} = \{\alpha_2(u) \mid u \in U\}^{\sigma_{\alpha_1}} = \{\alpha_1(\alpha_2(u)) \mid u \in U\},$$

$$U^{\sigma_{\alpha_1 \circ \alpha_2}} = \{(\alpha_1 \circ \alpha_2)(u) \mid u \in U\} = \{\alpha_1(\alpha_2(u)) \mid u \in U\}.$$

Таким образом, мы показали, что

$$\sigma_{\alpha_1 \circ \alpha_2} = \sigma_{\alpha_1} \cdot \sigma_{\alpha_2} \tag{3.2}$$

и получили замкнутость множества $E(X)$.

Далее, рассмотрим $\delta : \mathcal{I}(X) \to E(X)$ — отображение, заданное правилом

$$\delta(\alpha) = \sigma_\alpha \quad (\alpha \in \mathcal{I}(X)).$$

Несложно убедиться, что $\delta$ — биекция множества $\mathcal{I}(X)$ на множество $E(X)$. В силу (3.2) мы имеем, что $\delta$ — изоморфизм моноида $\mathcal{I}(X)$ на моноид $E(X)$.

В силу леммы 1 выполняется включение $E(X) \subset \mathrm{End}(G(X))$. Таким образом, получаем

$$\mathcal{I}(X) \cong E(X) \subset \mathrm{End}(G(X)).$$ □

## 4. Доказательство теоремы 2

Вначале построим некоторые эндоморфизмы группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ и докажем лемму 3. Далее $\overline{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ — основной кортеж нейронов нейросети $\mathcal{N}$.

Введем обозначение $M := \mathrm{End}(G(M_1)) \times \mathrm{End}(G(M_2)) \times \ldots \times \mathrm{End}(G(M_n))$. Для каждого кортежа $\zeta := (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ из множества $M$ и всякого кортежа $\overline{X} = (X_1, X_2 \ldots, X_n)$ из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ будем использовать обозначение $\overline{X}^{\zeta} := (X_1^{\zeta_1}, X_2^{\zeta_2} \ldots, X_n^{\zeta_n})$. Таким образом, задано отображение $\pi_\zeta : \mathrm{AGS}(\mathcal{N}) \to 2^{M_1} \times 2^{M_2} \times \ldots \times 2^{M_n}$, действующее по правилу

$$\overline{X}^{\pi_\zeta} = \overline{X}^{\zeta}, \quad \overline{X} \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N}). \tag{4.3}$$

Под символом $\varepsilon$ будем понимать тождественное преобразование. Из контекста будет ясно, преобразованием какого множества является $\varepsilon$. Для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ символом $P_i(\mathcal{N})$ обозначим множество всевозможных отображений $\pi_\zeta$ таких, что в кортеже $\zeta$ все компоненты, кроме $i$-й компоненты, равны тождественному преобразованию $\varepsilon$, а $i$-я компонента $\zeta_i$ такая, что выполняется эквиваленция

$$U^{\zeta_i} = \varnothing \Longleftrightarrow U = \varnothing \quad (U \in 2^{M_i}). \tag{4.4}$$

Отметим, что все эндоморфизмы $\zeta_i$ из множества $E(X)$ будут удовлетворять эквиваленции (4.4).

**Лемма 3.** *Для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ отображения из $P_i(\mathcal{N})$ являются эндоморфизмом группоида* $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$.

Доказательство. Пусть $\pi_\zeta \in P_i(\mathcal{N})$, где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, и выполняются условия: $\zeta_j = \varepsilon$ для $j \neq i$. Покажем, что отображение $\phi := \pi_\zeta$ сохраняет операцию $(+)$ (т. е. для $\phi$ выполняется условие (0.1)).

1) Пусть $\overline{U}$ и $\overline{V}$ — элементы из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ такие, что $\overline{U} + \overline{V} \neq \overline{\varnothing}$. Проведем вычисления:

$$(\overline{U} + \overline{V})^\phi = (U_1 \cup V_1, \ldots, U_n \cup V_n)^\phi = ((U_1 \cup V_1)^\varepsilon, \ldots, (U_i \cup V_i)^{\zeta_i}, \ldots, (U_n \cup V_n)^\varepsilon)$$

$$= (U_1 \cup V_1, \ldots, U_i^{\zeta_i} \cup V_i^{\zeta_i}, \ldots, U_n \cup V_n) = U^\phi + V^\phi.$$

2) Пусть $\overline{U}$ и $\overline{V}$ — элементы из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ такие, что $\overline{U} + \overline{V} = \overline{\varnothing}$. Справедливы равенства

$$(\overline{U} + \overline{V})^\phi = \overline{\varnothing}^\phi = \overline{\varnothing}.$$

Предположим, что $\overline{U} + \overline{V} = \overline{\varnothing}$ в виду соотношения $\overline{U} = \overline{V} = \overline{\varnothing}$. В этом случае с учетом (4.4) выводим

$$\overline{U}^\phi = \overline{\varnothing}, \quad \overline{V}^\phi = \overline{\varnothing}, \quad \overline{U}^\phi + \overline{V}^\phi = \overline{\varnothing}.$$

Предположим, что $\overline{U} \cup \overline{V} \neq \overline{\varnothing}$, но в $\overline{U} \cup \overline{V}$ существует некоторая компонента с номером $s$, равная пустому множеству, такая что правее и левее ее лежат компоненты, отличные от пустого множества. Тогда $\overline{U} + \overline{V} = \overline{\varnothing}$ и в силу (4.4) в кортеже $\overline{U}^\phi \cup \overline{V}^\phi$ компонента с номером $s$ будет равна $\varnothing$, при этом правее и левее ее лежат компоненты, отличные от $\varnothing$. Поэтому $\overline{U}^\phi + \overline{V}^\phi = \overline{\varnothing}$.

Мы рассмотрели все возможности, почему кортеж $\overline{U} + \overline{V}$ может быть равен $\overline{\varnothing}$. Во всех случаях выполняется равенство (0.1). $\square$

Несложно убедиться, что множества эндоморфизмов $P_i(\mathcal{N})$ являются подмоноидами в моноиде $\mathrm{End}(\mathrm{AGS}(\mathcal{N}))$ при любом $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Продолжим доказатеьство теоремы 2. Лемма 3 дает включение

$$P_i(\mathcal{N}) \subseteq \mathrm{End}(\mathrm{AGS}(\mathcal{N})).$$

В моноиде $P_i(\mathcal{N})$ определим подмножество $PE_i(\mathcal{N})$, состоящее из эндоморфизмов $\pi_\zeta$ таких, что $\zeta_i$ из $E(M_i)$. Несложно убедиться, что $PE_i(\mathcal{N})$ — подмоноид в моноиде $P_i(\mathcal{N})$ и $E(M_i) \cong PE_i(\mathcal{N})$.

Действительно, покажем, что множество $PE_i(\mathcal{N})$ — подмоноид в моноиде $P_i(\mathcal{N})$. Пусть $\pi_\zeta$ и $\pi_{\zeta'}$ — два произвольных эндоморфизма из $PE_i(\mathcal{N})$, где

$$\zeta = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \zeta_i, \varepsilon, \ldots, \varepsilon), \quad \zeta' = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \zeta_i', \varepsilon, \ldots, \varepsilon),$$

и $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — произвольный элемент из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Тогда справедливы равенства

$$\overline{X}^{\pi_\zeta \cdot \pi_{\zeta'}} = (\overline{X}^{\pi_{\zeta'}})^{\pi_\zeta} = (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i^{\zeta_i'}, X_{i+1} \ldots, X_n)^{\pi_\zeta} \tag{4.5}$$

$$(X_1, \ldots, X_{i-1}, (X_i^{\zeta_i'})^{\zeta_i}, X_{i+1} \ldots, X_n) = (X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i^{\zeta_i \cdot \zeta_i'}, X_{i+1} \ldots, X_n) = X^{\pi_\beta},$$

где $\beta = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \zeta_i \cdot \zeta_i', \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$. Композиция $\zeta_i \cdot \zeta_i' \in E(M_i)$ и удовлетворяет эквиваленции (4.4), следовательно, $\pi_\beta \in PE_i(\mathcal{N})$. Таким образом, $\pi_\zeta \cdot \pi_{\zeta'} \in PE_i(\mathcal{N})$. Покажем теперь, что $PE_i(\mathcal{N})$ изоморфно $E(M_i)$. Рассмотрим отображение $\delta : E(M_i) \to PE_i(\mathcal{N})$, заданное правилом

$$\delta : \gamma \to \pi_\beta, \text{ где } \beta = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \gamma, \varepsilon, \ldots, \varepsilon) \quad (\gamma \in E(M_i)).$$

В силу равенств (4.5) получаем, что $\delta$ — изоморфизм $PE_i(\mathcal{N})$ и $E(M_i)$. С учетом леммы 2 имеем

$$PE_i(\mathcal{N}) \cong E(M_i) \cong \mathcal{I}(M_i). \tag{4.6}$$

Далее, теорема $1'$ из [13, с. 419] утверждает: *всякая конечная полугруппа с единицей $G$ изоморфно вкладывается в симметрическую полугруппу на множестве $G$.*

Полагаем, что $|G| = m$ и $|M_i| = d$. Введем обозначения для элементов множеств $G$ и $M_i$:

$$G = \{1, \ldots, m\}, \quad M_i = \{1, \ldots, m, m+1, \ldots, d\}.$$

Тогда в силу приведенной выше теоремы мы получаем, что существует моноид $H(G)$, являющийся подмоноидом в $\mathcal{I}(G)$, такой, что справедливы условия

$$G \cong H(G) \subseteq \mathcal{I}(G).$$

Теперь всякому $\alpha \in H(G)$ поставим в соответствие отображение $\phi_\alpha \in \mathcal{I}(M_i)$ такое, что $\phi_\alpha$ действует на $\{1, \ldots, m\}$ как отображение $\alpha$ (т. е. для любого $x$ из $\{1, \ldots, m\}$ выполняется равенство $\phi_\alpha(x) = \alpha(x)$), а на множестве $\{m+1, \ldots, d\}$ — как тождественное отображение. Отображение

$$\mu : \alpha \to \phi_\alpha \quad (\alpha \in H(G), \quad \phi_\alpha \in \mathcal{I}(M_i))$$

реализует изоморфизм между $H(G)$ и некоторым подмоноидом $H'(G)$ в моноиде $\mathcal{I}(M_i)$. В самом деле, пусть $x \in \{1, \ldots, m\}$, $y \in \{m+1, \ldots, d\}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in H(G)$. Тогда справедливы равенства

$$\phi_{\alpha_1 \circ \alpha_2}(x) = (\alpha_1 \circ \alpha_2)(x) = \alpha_1(\alpha_2(x)), \; (\phi_{\alpha_1} \circ \phi_{\alpha_2})(x) = \phi_{\alpha_1}(\phi_{\alpha_2}(x)) = \phi_{\alpha_1}(\alpha_2(x)) = \alpha_1(\alpha_2(x));$$

$$\phi_{\alpha_1 \circ \alpha_2}(y) = y, \quad (\phi_{\alpha_1} \circ \phi_{\alpha_2})(y) = \phi_{\alpha_1}(\phi_{\alpha_2}(y)) = \phi_{\alpha_1}(y) = y.$$

Таким образом, выполняются соотношения $G \cong H(G) \cong H'(G) \subseteq \mathcal{I}(M_i)$. В силу (4.6) получаем справедливость утверждений

$$G \cong H(G) \cong H'(G) \subseteq \mathcal{I}(M_i) \cong E(M_i) \cong PE_i(\mathcal{N}) \subseteq \mathrm{End}(\mathrm{AGS}(\mathcal{N})).$$

Теорема доказана.

## 5. Некоторые эндоморфизмы $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$

Пусть $D_i$ — подмножество в $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$, состоящее из всевозможных кортежей, у которых $i$-я компонента является одноэлементным подмножеством множества $M_i$, а все остальные компоненты равны пустому множеству. Таким образом,

$$D_i = \{(\varnothing, \ldots, \varnothing, \{a_i\}, \varnothing, \ldots, \varnothing) \mid a_i \in M_i\}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Очевидно, что множество

$$D := \{\overline{\varnothing}\} \cup \Big(\bigcup_i^n D_i\Big) \tag{5.1}$$

есть порождающее множество моноида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. При $n(\mathcal{N}) > 2$ множество $\bigcup_i^n D_i$ является порождающим.

Пусть $\overline{Y}$ — произвольный элемент, отличный от $\overline{\varnothing}$, из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$; $\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots, \overline{Y}_d$ — некоторые элементы из $D$ такие, что

$$\overline{Y} = \overline{Y}_1 + (\overline{Y}_2 + (\overline{Y}_3 + \ldots + (\overline{Y}_{d-1} + \overline{Y}_d)\ldots)). \tag{5.2}$$

Введем обозначение $Bas(\mathcal{Y}, \overline{Y}) := \{\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots, \overline{Y}_d\}$, где $\mathcal{Y} := (\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots, \overline{Y}_d)$.

З а м е ч а н и е 4. Очевидно, что для каждого элемента $\overline{Y} \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ существуют различные кортежи $\mathcal{Y}$ (кортежи различной длины), удовлетворяющие свойству (5.2). Несложно проверить, что для всякого $\overline{Y} \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ и для любых $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$, связанных с $\overline{Y}$ равенством (5.2), имеет место равенство множеств $Bas(\mathcal{Y}_1, \overline{Y}) = Bas(\mathcal{Y}_2, \overline{Y})$. Таким образом, множество $Bas(\mathcal{Y}_1, \overline{Y})$ однозначно определяется кортежем $\overline{Y}$. Поэтому далее множество $Bas(\mathcal{Y}_1, \overline{Y})$ будем обозначать коротко: $Bas(\overline{Y})$. Считаем по определению, что $Bas(\overline{\varnothing}) := \{\overline{\varnothing}\}$.

Для всякого индекса $i \in \{1, \ldots, n\}$, кортежа $\overline{X} \in D_i$ и $\overline{Y} = (\varnothing, \ldots, \varnothing, S_i, \varnothing, \ldots, \varnothing) \in \mathrm{AGS}(\mathcal{N})$, где $S_i \subseteq M_i$, определим отображение $\eta[i, \overline{X}, \overline{Y}]$ следующим правилом:

$$\overline{Z}^{\eta[i,\overline{X},\overline{Y}]} := \begin{cases} \overline{Z} + \overline{Y}, & \text{если } \overline{X} \in Bas(\overline{Z}) \\ \overline{Z}, & \text{если } \overline{X} \notin Bas(\overline{Z}). \end{cases} \tag{5.3}$$

Непосредственно из (5.3) следует, что $\overline{\varnothing}^{\eta[i,\overline{X},\overline{Y}]} = \overline{\varnothing}$.

**Утверждение 3.** *Отображение $\eta[i, \overline{X}, \overline{Y}]$ является эндоморфизмом группоида* $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее, $\phi := \eta[i, \overline{X}, \overline{Y}]$. Покажем, что $\phi$ — удовлетворяет равенству (0.1).

1. Пусть $\overline{U}$ и $\overline{V}$ — два произвольных элемента из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ таких, что $\overline{U} + \overline{V} \neq \overline{\varnothing}$. Делаем вычисления

$$(\overline{U} + \overline{V})^{\phi} = \begin{cases} (\overline{U} + \overline{V}) + \overline{Y}, & \text{если } \overline{X} \in Bas(\overline{U} + \overline{V}) \\ \overline{U} + \overline{V}, & \text{если } \overline{X} \notin Bas(\overline{U} + \overline{V}), \end{cases}$$

$$\overline{U}^{\phi} = \begin{cases} \overline{U} + \overline{Y}, & \text{если } \overline{X} \in Bas(\overline{U}) \\ \overline{U}, & \text{если } \overline{X} \notin Bas(\overline{U}), \end{cases} \qquad \overline{V}^{\phi} = \begin{cases} \overline{V} + \overline{Y}, & \text{если } \overline{X} \in Bas(\overline{V}) \\ \overline{V}, & \text{если } \overline{X} \notin Bas(\overline{V}) \end{cases}.$$

Поскольку $\overline{X} \in Bas(\overline{U} + \overline{V})$ тогда и только тогда, когда $\overline{X} \in Bas(\overline{U})$ или $\overline{X} \in Bas(\overline{V})$, то справедливы равенства

$$\overline{U}^{\phi} + \overline{V}^{\phi} = \begin{cases} (\overline{U} + \overline{V}) + \overline{Y}, & \text{если } \overline{X} \in Bas(\overline{V}) \\ (\overline{U} + \overline{V}) + \overline{Y}, & \text{если } \overline{X} \in Bas(\overline{U}) \\ \overline{U} + \overline{V}, & \text{если } \overline{X} \notin Bas(\overline{U}), \overline{X} \notin Bas(\overline{V}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\overline{U} + \overline{V}) + \overline{Y}, & \text{если } \overline{X} \in Bas(\overline{U} + \overline{V}) \\ \overline{U} + \overline{V}, & \text{если } \overline{X} \notin Bas(\overline{U} + \overline{V}) \end{cases} = (\overline{U} + \overline{V})^{\phi}.$$

2. Пусть $\overline{U}$ и $\overline{V}$ — два произвольных элемента из $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ таких, что $\overline{U}+\overline{V}=\overline{\varnothing}$. Тогда выполняются равенства $(\overline{U}+\overline{V})^{\phi}=\overline{\varnothing}^{\phi}=\overline{\varnothing}$. В последнем равенстве мы использовали конкретный вид отображения $\phi$. Поскольку $\overline{U}+\overline{V}=\overline{\varnothing}$, то элемент $\overline{X}$ не может принадлежать сразу двум множествам — $Bas(\overline{U})$ и $Bas(\overline{V})$.

Если $\overline{X}$ не принадлежит ни одному из множеств $Bas(\overline{U})$ и $Bas(\overline{V})$, то имеем равенства

$$\overline{U}^{\phi}+\overline{V}^{\phi}=\overline{U}+\overline{V}=\overline{\varnothing}.$$

Если $\overline{X}$ принадлежит одному из множеств $Bas(\overline{U})$ и $Bas(\overline{V})$ (не ограничивая общности, считаем, что это $Bas(\overline{U})$), то, учитывая, что кортеж $\overline{Y}$ отличается от кортежа $\overline{\varnothing}$ только $i$-й компонентой, получаем равенства

$$\overline{U}^{\phi}+\overline{V}^{\phi}=(\overline{U}+\overline{Y})+\overline{V}=\overline{\varnothing}.$$

Таким образом, мы показали, что для $\phi$ выполняется равенство (0.1). □

В кортеже $\overline{Y}$ из параметров отображения $\eta[i,\overline{X},\overline{Y}]$ только $i$-я компонента может быть отличной от пустого множества. Для дальнейшего исследования задачи 2 важно понимать, можно ли построить эндоморфизмы $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$, аналогичные эндоморфизмам $\eta[i,\overline{X},\overline{Y}]$ без приведенного выше ограничения на кортеж $\overline{Y}$. Оказывается, что такие эндоморфизмы имеет смысл искать только при $n(\mathcal{N})=2,3$ или $i\neq 2,n-1$. В самом деле, это следует из

**Утверждение 4.** *Пусть $n=n(\mathcal{N})\geq 4$ и $\phi$ — эндоморфизм группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Полагаем, что $i\in\{1,\ldots,n\}$, $i\neq 2,n-1$ и $\phi$ переводит фиксированный элемент $\overline{X}\in D_i$ в элемент $\overline{X}+\overline{Y}\neq\overline{\varnothing}$, где $\overline{Y}\in\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. Если эндоморфизм $\phi$ действует тождественно на всех элементах $\overline{U}$ таких, что $\overline{X}\notin Bas(\overline{U})$, то в кортеже $\overline{Y}$ только $i$-я компонента может отличаться от $\varnothing$.*

Доказательство. Далее, $\phi$ — эндоморфизм из условия леммы. Поскольку $n\geq 4$, то при любом $i\in\{1,\ldots,n\}$, $i\neq 2,n-1$ для всякого $\overline{X}\in D_i$ будет существовать элемент $\overline{U}$ такой, что $\overline{X}+\overline{U}=\overline{\varnothing}$, а кортеж $(\overline{X}+\overline{Y})+\overline{U}\neq\overline{\varnothing}$ для подходящего $\overline{Y}\in\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$. В самом деле, кортеж $\overline{X}$ имеет только одну компоненту, отличную от $\varnothing$. Это $i$-я компонента. Справа или слева от $i$-й компоненты есть как минимум две компоненты. Поэтому мы можем выбрать элемент $\overline{U}$ такой, что $\overline{X}+\overline{U}=\overline{\varnothing}$. Ниже рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Предположим, что правее $i$-й компоненты существуют еще как минимум две компоненты. Выбираем кортеж $\overline{U}$ так, что он имеет только одну ненулевую компоненту, и эта компонента с номером $i+2$. В данном случае выполняется условие $\overline{X}+\overline{U}=\overline{\varnothing}$. При этом будут выполняться равенства

$$(\overline{X}+\overline{U})^{\phi}=\overline{\varnothing}^{\phi}=\overline{\varnothing},\quad \overline{X}^{\phi}+\overline{U}^{\phi}=(\overline{X}+\overline{Y})+\overline{U}.$$

Следовательно, $(\overline{X}+\overline{Y})+\overline{U}=\overline{\varnothing}$. Последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда в кортеже $\overline{Y}$ правее $i$-й компоненты расположены пустые множества.

Случай 2. Предположим, что левее $i$-й компоненты существуют еще как минимум две компоненты. Выбираем кортеж $\overline{U}$ так, что он имеет только одну ненулевую компоненту, и это компонента с номером $i-2$. В данном случае выполняется условие $\overline{X}+\overline{U}=\overline{\varnothing}$. При этом будут выполнятся равенства

$$(\overline{X}+\overline{U})^{\phi}=\overline{\varnothing}^{\phi}=\overline{\varnothing},\quad \overline{X}^{\phi}+\overline{U}^{\phi}=(\overline{X}+\overline{Y})+\overline{U}.$$

Следовательно, $(\overline{X}+\overline{Y})+\overline{U}=\overline{\varnothing}$. Последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда в кортеже $\overline{Y}$ левее $i$-й компоненты расположены пустые множества.

Таким образом, в кортеже $\overline{Y}$ только $i$-я компонента может отличаться от пустого множества. □

## Заключение

В заключении отметим, что задача 2 остается открытой. Исследование алгебраических свойств группоидов $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ представляет теоретический интерес. В частности, актуальной полагаем разработку методов поэлементного описания моноида всех эндоморфизмов группоидов, не являющихся полугруппой или квазигруппой.

Рассмотрение группоидов $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ в связи с нейросетями $\mathcal{N}$ делает возможным использование алгебраических свойств, например, эндоморфизмов, группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ в исследовании многослойных нейронных сетей прямого распределения сигнала. Полученные результаты работы могут быть использованы как инструмент для проведения выкладок и формализации результатов в задачах, связанных с декомпозицией нейронных сетей на несколько подсетей (напомним, что такие задачи исследовались в работах [11; 12]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Головко В. А., Краснопрошин В. В.** Нейросетевые технологии обработки данных: уч. пособие. Минск : Изд-во Беларус. гос. ун-та, 2017. 263 с.
2. **Горбань А. Н.** Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // Сиб. журн. вычисл. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 11–24.
3. **McCulloh W., Pitts W.** A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bulletin Math. Biophysics. 1943. № 5. P. 115–133.
4. **Розенблатт Ф.** Принципы нейродинамики: персептрон и теория механизмов мозга : пер. с англ. Москва: Мир, 1965. 478 с.
5. **Litavrin A. V.** Endomorphisms of Some Groupoids of Order $k+k^2$ // Bulletin Irkutsk State University. Ser. Mathematics. 2020. Vol. 32. P. 64–78. doi: 10.26516/1997-7670.2020.32.64 .
6. **Tsarkov O. I.** Endomorphisms of the semigroup $G_2(r)$ over partially ordered commutative rings without zero divisors and with $1/2$ // J. Math. Sc. (N Y). 2014. Vol. 201, no. 4. P. 534–551.
7. **Zhuchok Yu. V.** Endomorphism semigroups of some free products // J. Math. Sc. (N Y). 2012. Vol. 187, no. 2. P. 146–152.
8. **Слеповичев И. И.** Алгебраические свойства абстрактных нейронных сетей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 1. С. 96–103. doi: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-96-103 .
9. **Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А.** Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994. 192 с.
10. **Молчанов В. А., Хворостухина Е. В.** Об абстрактной определяемости универсальных гиперграфических автоматов полугруппами входных сигналов // Чебыш. сб. 2019. Т. 20, № 2. С. 259–272. doi: 10.22405/2226-8383-2018-20-2-259-272 .
11. **Литинский Л. Б.** О задаче декомпозиции нейронной сети на несколько подсетей // Мат. моделирование. 1996. Т. 8, № 11. С. 119–127.
12. **Тимофеев А. В., Дерин О. А.** Принципы построения иерархических нейронных сетей для анализа мультиизображений // Тр. СПИИРАН. 2009. Т. 10. С. 160–166.
13. **Курош А. Г.** Лекции по общей алгебре. СПб.: Изд. дом “Лань”, 2007. 560 с.


Поступила 11.01.2021
После доработки 14.02.2021
Принята к публикации 24.02.2021

Литаврин Андрей Викторович
канд. физ.-мат. наук, доцент каф. высш. математики № 2
Института математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: anm11@rambler.ru

**REFERENCES**


1. Golovko V.A., Krasnoproshin V.V. *Neirosetevye tekhnologii obrabotki dannykh; ucheb. posobie* [Neural network data processing technologies; textbook]. Minsk: Belorus. Gos. Univ. Publ, 2017, 263 p. ISBN: 978-985-566-467-4 .
2. Gorban' A.N. Generalized approximation theorem and computational capabilities of neural networks. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 1998, vol. 1, no. 1, pp. 11–24 (in Russian).
3. McCulloch W., Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin Math. Biophys.*, 1943, vol. 5, no. 4, pp. 115–133. doi: 10.1007/BF02478259 .
4. Rosenblatt F. *Principles of neurodynamics: Perceptrons and the theory of brain mechanisms.* Washington: Spartan Books, 1962, 616 p. Translated to Russian under the title *Printsipy neirodinamiki: perseptron i teoriya mekhanizmov mozga.* Moscow: Mir, 1965. 478 p.
5. Litavrin A.V. Endomorphisms of some groupoids of order $k + k^2$. *Bulletin Irkutsk State Univ. Ser. Mathematics*, 2020, vol. 32, pp. 64–78. doi: 10.26516/1997-7670.2020.32.64 .
6. Tsarkov O.I. Endomorphisms of the semigroup $G_2(r)$ over partially ordered commutative rings without zero divisors and with 1/2. *J. Math. Sci.*, 2014, vol. 201, no. 4, pp. 534–551. doi: 10.1007/s10958-014-2010-0 .
7. Zhuchok Yu.V. Endomorphism semigroups of some free products. *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 187, no. 2, pp. 146–152. doi: 10.1007/s10958-012-1057-z .
8. Slepovichev I.I. Algebraic properties of abstract neural network. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, no. 1, pp. 96–103 (in Russian). doi: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-96-103 .
9. Greenglaz L.Ja. , Gvaramija A.A., Plotkin B.I. *Algebraic structures in automata and database theory.* Singapore: World Scientific, 1992, 296 p. ISBN: 9789814505666 . Translated to Russian under the title *Elementy algebraicheskoi teorii avtomatov.* Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 1994, 192 p. ISBN: 5-06-002738-4 .
10. Molchanov V.A., Khvorostukhina E.V. On problem of abstract definability of universal hypergraphic automata by input symbol semigroup. *Chebyshevskii Sb.*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 259–272 (in Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2018-20-2-259-272 .
11. Litinskii L.B. On the problem of neural network decomposition into some subnetworks. *Matem. Mod.*, 1996, vol. 8, no. 11, pp. 119–127 (in Russian).
12. Timofeev A.V., Derin O.A. Principles of hierarchical neural networks for analysis of multi-images. *Tr. SPIIRAN*, 2009, vol. 10, pp. 160–166 (in Russian).
13. Kurosh A.G. *Lektsii po obshchei algebre* (Lectures in general algebra). St. Petersburg: Lan' Publ., 2007, 560 p. ISBN: 978-5-8114-0617-3 .



Received January 11, 2021
Revised February 14, 2021
Accepted February 24, 2021

**Funding Agency:** This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2020-1534/1).



*Andrey Viktorovich Litavrin,* Cand. Sci. (Phys.-Math.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: anm11@rambler.ru .



Cite this article as: A. V. Litavrin. Endomorphisms of finite commutative groupoids related with multilayer feedforward neural networks, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 130–145 .