ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 512.542, 512.547

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ, КАСАЮЩЕМСЯ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МОДУЛЕЙ[1]

А. В. Коныгин

Пусть G — группа, K — алгебраически замкнутое поле и V_1, V_2 — KG-модули. В работе рассматривается вопрос: при каких ограничениях на G, K, V_1, V_2 выполняется изоморфизм $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$, где I — тривиальный KG-модуль (размерности $\dim(V_2)$)? Ранее при рассмотрении одной проблемы П. Камерона о конечных примитивных группах подстановок автором были получены и использованы некоторые результаты по этому вопросу. Настоящая работа продолжает исследование вопроса. Получены следующие результаты: 1. Пусть G — неединичная связная редуктивная алгебраическая группа над K и V_1, V_2 — точные полупростые KG-модули. Тогда $V_1 \otimes V_2 \not\cong V_1 \otimes I$. 2. Пусть G — неединичная конечная группа, $\mathrm{char}(K) = 0$, V_1 — KG-модуль, V_2 — точный KG-модуль. Тогда $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$ в том и только том случае, когда V_1 — прямая сумма $\frac{\dim(V_1)}{|G|}$ регулярных KG-модулей. Кроме того, в работе рассматривается вопрос о возможности того, чтобы $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$ в случае, когда $G = SL_2(p^n)$, V_1 и V_2 — простые KG-модули и $\mathrm{char}(K) = p$.

Ключевые слова: конечная группа, алгебраическая группа, представление группы, тензорное произведение модулей.

A. V. Konygin. On a question concerning the tensor product of modules.

Assume that G is a group, K is an algebraically closed field, and V_1 and V_2 are KG-modules. The following question is considered: under what constraints on G, K, V_1, and V_2 does $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$ hold, where I is the trivial KG-module (of dimension $\dim(V_2)$)? Earlier, when considering a problem of P. Cameron on finite primitive permutation groups, the author obtained and used some results on this question. This work continues the study of the question. The following results were obtained. 1. Assume that G is a nontrivial connected reductive algebraic group, and V_1 and V_2 are faithful semisimple KG-modules. Then $V_1 \otimes V_2 \not\cong V_1 \otimes I$. 2. Assume that G is a nontrivial finite group, $\mathrm{char}(K) = 0$, V_1 is a KG-module, and V_2 is a faithful KG-module. Then $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$ if and only if V_1 is the direct sum of $\frac{\dim(V_1)}{|G|}$ regular KG-modules. In addition, we consider the question of the possibility that $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$ in the case where $G = SL_2(p^n)$, V_1 and V_2 are simple KG-modules, and $\mathrm{char}(K) = p$.

Keywords: finite group, algebraic group, group representation, tensor product of modules.

MSC: 20C33, 20B15, 20C20, 20D06

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-103-109

Введение

Пусть G — группа, K — алгебраически замкнутое поле, V_1 — KG_1-модуль и V_2 — KG_2-модуль, где G_1 и G_2 — группы, изоморфные G. Все рассматриваемые в работе модули являются конечномерными векторными пространствами над полем K. Пусть V — тензорное произведение векторных пространств V_1 и V_2. Прямое произведение $G_1 \times G_2$ естественным образом действует на V, $G_1 \times G_2 < GL(V)$.

Ранее[2] при рассмотрении одного вопроса, сформулированного П. Камероном в [1], автором были получены и использованы результаты о сопряженности в $GL(V)$ подгрупп G_1 и $\mathrm{diag}(G_1 \times G_2)$ группы $G_1 \times G_2$ для определенных групп G_1 и G_2. В связи с этим настоящая работа продолжает исследование вопроса о сопряженности подгрупп G_1 и $\mathrm{diag}(G_1 \times G_2)$ в $GL(V)$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00456).

[2]О примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них: случай, когда цоколь есть степень группы $E_8(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 88–98.

для представляющих интерес случаев; причем нам будет удобнее использовать ее следующую эквивалентную формулировку. Пусть G — группа, K — алгебраически замкнутое поле и V_1, V_2 — KG-модули. При каких ограничениях на G, K, V_1, V_2 выполняется изоморфизм

$$V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I,$$

где I — тривиальный KG-модуль (размерности $\dim(V_2)$)?

В данной статье рассматриваются следующие случаи:

1) G — неединичная связная редуктивная алгебраическая группа над K;

2) G — конечная группа, $\operatorname{char}(K) = 0$;

3) $G = SL_2(p^n)$, $\operatorname{char}(K) = p$.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть G — неединичная связная редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K и V_1, V_2 — точные полупростые KG-модули. Тогда $V_1 \otimes V_2 \not\cong V_1 \otimes I$, где I — тривиальный KG-модуль размерности $\dim(V_2)$.*

Теорема 2. *Пусть G — неединичная конечная группа, K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, V_1 — KG-модуль, V_2 — точный KG-модуль, а I — тривиальный KG-модуль размерности $\dim(V_2)$. Тогда $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$ справедливо в том и только в том случае, когда V_1 — прямая сумма $\dfrac{\dim(V_1)}{|G|}$ регулярных представлений группы G (в частности, когда порядок группы G делит $\dim(V_1)$).*

Случай, когда группа G конечна и $\operatorname{char}(K) = p > 0$, представляется более сложным для исследования. Наибольший интерес для нас представляет ситуация, когда G — конечная группа лиева типа характеристики p. Как известно (см. [8]), любую, за исключением групп Судзуки, конечную простую группу лиева типа можно представить в виде произведения групп, изоморфных $SL_2(p^n)$ или $PSL_2(p^n)$. Кроме того, заметим, что если $G \le H$ и для KH-модулей V_1 и V_2 выполняется свойство $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$, то это свойство выполняется и для KG-модулей $V_1|_G$ и $V_2|_G$. В настоящей работе в качестве первого шага исследования ситуации рассматривается случай, когда $G = SL_2(p^n)$.

Далее нам потребуется следующее определение. Пусть p — простое число и r, s — натуральные числа, не превосходящие $p^n - 1$. Для целого неотрицательного числа t через $\delta_i(t)$ будем обозначать коэффициент при p^i в p-адической записи числа t (т. е. $t = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i p^i$, $\delta_i = \delta_i(t) \in \{0, \ldots, p-1\}$). Пусть m — максимум из p-адических длин чисел r и s, т. е.

$$m = \max\{i \mid \delta_i(r) + \delta_i(s) \neq 0\}.$$

Будем говорить, что пара (r, s) — *плохая*, если выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

— существует $i \in \{0, \ldots, m\}$ со свойством $\{\delta_i(r), \delta_i(s)\} = \{p-1, d\}$, где d нечетно;

— для любого $i \in \{0, \ldots, m\}$ выполняется $0 \in \{\delta_i(r), \delta_i(s)\}$ или $\{\delta_i(r), \delta_i(s)\} = \{p-1, d\}$, где d четно.

Если K — конечное или алгебраически замкнутое поле, $G = SL_2(K)$ и r — неотрицательное целое число (r не превосходит $|K| - 1$, если K конечно), то через $L(r)$, следуя [7], будем обозначать KG-модуль, соответствующий старшему весу r.

Теорема 3. *Пусть $G = SL_2(p^n)$, p — простое число, и r, s — натуральные числа, не превосходящие $p^n - 1$. Пусть $L(r)$, $L(s)$ — простые KG-модули, где K — алгебраически замкнутое поле характеристики p. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $n = 1$, то $L(r) \otimes L(s) \not\cong L(r) \otimes I$, где I — тривиальный KG-модуль размерности $s + 1$. Если, кроме того, пара (r, s) не является плохой, то KG-модуль $L(r) \otimes L(s)$ содержит не менее двух различных неизоморфных неприводимых прямых слагаемых.*
2. *Если $n \geq 2$ и пара (r, s) не является плохой, то KG-модуль $L(r) \otimes L(s)$ содержит не менее двух различных неизоморфных неприводимых прямых слагаемых и, в частности, $L(r) \otimes L(s) \not\cong L(r) \otimes I$, где I — тривиальный KG-модуль размерности $s + 1$.*

1. Доказательство теорем

Далее используются стандартные понятия и обозначения из теории представлений (см., например, [4–7]).

Доказательство теоремы 1. Пусть выполняются условия теоремы 1. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathrm{char}(K) > 0$. Модуль V_i, где $i \in \{1, 2\}$, является полупростым KG-модулем, т.е. прямой суммой неприводимых KG-модулей:

$$V_i = \oplus_{j \in J_i} W_{ij},$$

где $\{W_{ij} \mid j \in J_i\}$ — множество всех неприводимых прямых слагаемых KG-модуля V_i, причем W_{ij} — неприводимый модуль некоторого старшего веса λ_{ij} (см. [5, гл. II.2]). Покажем, что $V_1 \otimes V_2 \not\cong V_1 \otimes I$. Доказательство будем вести методом от противного. Предположим, что $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$. В силу дистрибутивности тензорного произведения имеем

$$V_1 \otimes V_2 = \oplus_{j_1 \in J_1, j_2 \in J_2} (W_{1j_1} \otimes W_{2j_2}) \quad \text{и} \quad V_1 \otimes I = \oplus_{j \in J_1} W_{1j}^{\dim(V_2)}.$$

Тогда по теореме Крулля — Шмидта (см., например, [2, разд. 14.5]) каждое такое слагаемое $W_{1j_1} \otimes W_{2j_2}$ есть прямая сумма модулей вида W_{1j}. С учетом этого, из [9, теорема 15.17] и [9, предложение 15.12] следует, что для любых $j_1 \in J_1$ и $j_2 \in J_2$ существует $j \in J_1$ со свойством

$$\lambda_{1j_1} + \lambda_{2j_2} = \lambda_{1j}.$$

В частности, поскольку $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$, получаем

$$\max_{j_1 \in J_1, j_2 \in J_2} (\lambda_{1j_1} + \lambda_{2j_2}) = \max_{j \in J_1} (\lambda_{1j}). \qquad (*)$$

С другой стороны, для любых $i \in \{1, 2\}, j \in J_i$, вес λ_{ij} имеет неотрицательные коэффициенты в разложении по базису из фундаментальных доминантных весов, поскольку является доминатным весом. Следовательно,

$$\lambda_{1j_1} + \lambda_{2j_2} > \lambda_{1j_1}$$

для любых $j_1 \in J_1$ и $j_2 \in J_2$. Таким образом,

$$\max_{j_1 \in J_1, j_2 \in J_2} (\lambda_{1j_1} + \lambda_{2j_2}) > \max_{j \in J_1} (\lambda_{1j}).$$

Противоречие с соотношением $(*)$. Случай $\mathrm{char}(K) > 0$ рассмотрен полностью.

В случае $\mathrm{char}(K) = 0$ доказательство аналогично приведенному выше, но вместо результатов из теории представлений над полем положительной характеристики используются аналогичные результаты из теории представлений над полем нулевой характеристики (см., например, [6, гл. VI]).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть выполняются условия теоремы 2. Предположим, что $V_1 \otimes V_2 \cong V_1 \otimes I$, и пусть χ_i — характер модуля V_i, $i \in \{1, 2\}$. Тогда характеры

KG-модулей $V_1 \otimes V_2$ и $V_1 \otimes I$ совпадают, и, таким образом, $\chi_1\chi_2 = \chi_1 \dim(V_2)$. Для $1 \neq g \in G$ имеем

$$\chi_1(g)\chi_2(g) = \chi_1(g)\dim(V_2).$$

Отсюда либо $\chi_1(g) = 0$, либо $\chi_1(g) \neq 0$ и $\chi_2(g) = \dim(V_2)$. Но $\chi_2(g) \neq \dim(V_2)$ (поскольку $g \neq 1$). Поэтому $\chi_1(g) = 0$ для всех $g \neq 1$.

Пусть

$$V_1^G := \{v \in V_1 \mid gv = v \ \ \forall g \in G\}.$$

Тогда (см., например, [4, утверждение 2.9])

$$\dim(V_1^G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g) = \frac{\dim(V_1)}{|G|}.$$

Таким образом, а $|G|$ делит $\dim(V_1)$. Положим $m := \dfrac{\dim(V_1)}{|G|}$. Пусть W — регулярный KG-модуль (следовательно, $\dim(W) = |G|$) и χ_0 — его характер. Значит, $\chi_1 = m\chi_0$ и, следовательно, V_1 — прямая сумма $\dfrac{\dim(V_1)}{|G|}$ регулярных представлений группы G.

В обратную сторону теорема доказывается непосредственной проверкой равенства

$$\chi_1(g)\chi_2(g) = \chi_1(g)\dim(V_2).$$

Равенство очевидно при $g = 1$, а при $g \neq 1$ равенство следует из того, что $\chi_1(g) = 0$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть H — полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K положительной характеристики p; F — эндоморфизм Стейнберга группы H (см., например, [9, разд. 21.1]) такой, что $G := H^F$ — конечная группа лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$, где $q = p^n$; X_n — множество доминантных p^n-ограниченных весов группы H (см. [7, разд. 2.5]). Тогда по теореме Стейнберга (см., например, [7, разд. 2.11]) все простые KG-модули исчерпываются ограничениями на подгруппу G группы H рациональных KH-модулей $L(\lambda)$, где $\lambda \in X_n$.

Пусть теперь $H = SL_2(K)$ и $L(r)$, $L(s)$ — простые KH-модули, где $r, s \in X_n$ (таким образом, $r, s < p^n$). Без ограничения общности будем далее предполагать, что $r \geq s$. По [3, теорема 2.1] имеем

$$L(r) \otimes L(s) \cong \oplus_{u\in W} J(u),$$

где W — декартово произведение множеств из [3, лемма 1.3] и $J(u)$ — неразложимый KH-модуль для $u \in W$.

Покажем, что если $J(u)$ — неприводимый KH-модуль для $u \in W$, то $J(u)|_G$ — неприводимый KG-модуль. Пусть $u = (u_0, \ldots, u_m) \in W$, где m — максимум p-адических длин чисел r и s. По [3, теорема 2.2] модуль $J(u)$ неприводим тогда и только тогда, когда $u_i \leq p-1$ для всех $i \in \{0, \ldots, m\}$. Кроме того, в этом случае по [3, теорема 2.2] $J(u) = L\Big(\sum\limits_{i=0}^m u_i p^i\Big)$. С другой стороны, KG-модуль $L\Big(\sum\limits_{i=0}^m u_i p^i\Big)\Big|_G$ неприводим тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=0}^m u_i p^i \in X_n$, т. е. $\sum\limits_{i=0}^m u_i p^i < p^n$. Поскольку $u_i \leq p-1$ для всех $i \in \{0, \ldots, m\}$, получаем

$$\sum_{i=0}^m u_i p^i \leq (p-1)\sum_{i=0}^m p^i = p^{m+1} - 1 < p^n$$

в силу того, что $m < n$ (так как $r, s < p^n$ и m — максимум p-адических длин чисел r и s). Таким образом, неприводимый KH-модуль $J(u)$ остается неприводимым при ограничении его на подгруппу G группы H.

Покажем, что если пара (r,s) не является плохой, то KH-модуль $L(r)\otimes L(s)$ содержит не менее двух различных неизоморфных неприводимых прямых слагаемых. По определению множества W (см. [3, теорема 2.2]) имеем

$$W = W(\delta_0(r),\delta_0(s))\times\ldots\times W(\delta_m(r),\delta_m(s)),$$

где $\delta_i(r)$ (соответственно, $\delta_i(s)$) — коэффициент при p^i в p-адической записи числа r (соответственно, s), $i\in\{0,\ldots,m\}$. Пусть $i\in\{0,\ldots,m\}$, $a=\max(\delta_i(r),\delta_i(s))$ и $b=\min(\delta_i(r),\delta_i(s))$. Заметим, что $a,b\le p-1$. Положим $W'=\{w\in W(a,b)\mid w\le p-1\}$.

Рассмотрим возможные варианты для a и b.

1. Если $a+b\le p-1$, то по [3, лемма 1.3] имеем $W'=W(a,b)=\{a+b-2j\mid j\in\{0,\ldots,b\}\}$. Следовательно, если $b=0$, то $|W'|=1$, иначе $|W'|\ge 2$.

2. Если $a+b>p-1$, $a=p-1$ и b четно, то $W=\{a,a+2,\ldots,a+b\}$ и $W'=\{a\}$.

3. Если $a+b>p-1$, $a=p-1$ и b нечетно, то $W=\{a+1,a+3,\ldots,a+b\}$ и $W'=\varnothing$.

4. Если $a+b>p-1$ и $a<p-1$, то $W'=W$ и $|W'|\ge 2$.

Таким образом,

1) если для некоторого $i\in\{0,\ldots,m\}$ имеем $\{\delta_i(r),\delta_i(s)\}=\{\max(\delta_i(r),\delta_i(s)),d\}=\{p-1,d\}$, где d нечетно, то KH-модуль $L(r)\otimes L(s)$ не содержит неприводимых прямых слагаемых;

2) если для любого $i\in\{0,\ldots,m\}$ выполняется $\{\delta_i(r),\delta_i(s)\}=\{\max(\delta_i(r),\delta_i(s)),d\}=\{p-1,d\}$, где d четно, или выполняется $\{\delta_i(r),\delta_i(s)\}=\{\max(\delta_i(r),\delta_i(s)),0\}$, то KH-модуль $L(r)\otimes L(s)$ содержит ровно одно неприводимое прямое слагаемое

$$L\Big(\sum_{i=0}^{m}\max(\delta_i(r),\delta_i(s))p^i\Big);$$

3) если не выполняются указанные условия пп. 1) и 2), то KH-модуль $L(r)\otimes L(s)$ содержит не менее двух различных неизоморфных неприводимых прямых слагаемых.

Итак, если пара (r,s) не является плохой, то KH-модуль $L(r)\otimes L(s)$ содержит не менее двух различных неизоморфных неприводимых прямых слагаемых. Следовательно, KG-модуль $(L(r)\otimes L(s))|_G$ содержит не менее двух различных неизоморфных неприводимых прямых слагаемых. В частности, $(L(r)\otimes L(s))|_G\not\cong(L(t)\otimes I)|_G$, где $t\in\{r,s\}$.

Пусть $G=SL_2(p)$. Тогда $r,s<p$. Случай $r,s\in\{1,\ldots,p-2\}$ был рассмотрен выше. Пусть теперь $p-1\in\{r,s\}$. Без ограничения общности будем далее предполагать, что $r\ge s$. Поэтому далее считаем, что $r=p-1$. Поскольку $m=0$, имеем $W=W(p-1,s)$. По доказанному выше в зависимости от четности s получаем два взаимоисключающих случая: либо s четно и $W=\{p-1,p+1,\ldots,p+s-1\}$, либо s нечетно и $W=\{p,p+2,\ldots,p+s-1\}$.

Предположим, что s четно. Тогда $s\ge 2$, $W'=\{p-1\}$ и KH-модуль $L(r)\otimes L(s)$ имеет ровно одно неприводимое прямое слагаемое $J(p-1)=L(p-1)$. Остальные прямые слагаемые KH-модуля $L(r)\otimes L(s)$ являются приводимыми и имеют вид $J(u)$, где $u\in\{p+1,p+3,\ldots,p+s-1\}$. Значит, по [3, теорема 2.2] приводимые слагаемые $J(u)$ модуля $L(r)\otimes L(s)$ изоморфны $T(u)$ (tilting-модуль, см. [3]). Если $p\ne 2$, то $p+1\le 2p-2$ и по [3, лемма 1.1] KH-модуль $J(p+1)$ содержит в качестве подмодуля KH-модуль $L(p-3)$. Таким образом, KG-модуль $(L(r)\otimes L(s))|_G$ содержит в качестве прямого слагаемого простой KG-модуль $L(p-1)|_G$ и содержит простой KG-подмодуль $L(p-3)|_G$. Если $p=2$, то $r=s=2$. Следовательно, по [3, разд. 5] получаем, что KH-модуль $L(2)\otimes L(2)$ содержит в качестве подмодуля KH-модуль $L(0)$.

Предположим, что s нечетно. Тогда $s \geq 1$, $W' = \varnothing$ и прямые слагаемые KH-модуля $L(r) \otimes L(s)$ имеют вид $J(u)$, где $u \in \{p, p+2, \ldots, p+s-1\}$. Поэтому ввиду [3, теорема 2.2] каждое приводимое слагаемое $J(u)$ модуля $L(r) \otimes L(s)$ изоморфно $T(u)$. Таким образом, KH-модуль $L(r) \otimes L(s)$ содержит в качестве прямого слагаемого KH-модуль $J(p)$, который по [3, лемма 1.1] содержит в качестве подмодуля KH-модуль $L(p-2)$. Если $s \neq 1$ (и, следовательно, $p \geq 5$), то KH-модуль $L(r) \otimes L(s)$ содержит в качестве прямого слагаемого KH-модуль $J(p+2)$, который по [3, лемма 1.1] содержит в качестве подмодуля KH-модуль $L(p-4)$.

Предположим теперь, что $s = 1$. Тогда $L(r) \otimes L(s) = L(p-1) \otimes L(1) = J(p)$. Согласно [3, теорема 2.2 и лемма 1.1] KH-модуль $J(p)$ содержит в качестве подмодуля KH-модуль $L(p-2)$. Если $p \neq 3$, то $p - 2 \notin \{1, p-1\}$. Если $p = 3$, то $(r, s) \neq (2, 1)$. По [3, разд. 5] имеем $L(2) \otimes L(1) = T(3)$ с композиционными факторами $L(1)$, $L(3)$, $L(1)$.

Таким образом, получаем, что во всех случаях $(L(r) \otimes L(s))|_G \not\cong (L(t) \otimes I)|_G$, где $t \in \{r, s\}$. Если, кроме того, пара (r, s) не является плохой, то KG-модуль $(L(r) \otimes L(s))|_G$ содержит не менее двух различных неизоморфных неприводимых прямых слагаемых.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cameron P.J.** Suborbits in transitive permutation groups // Combinatorics: Proc. NATO Advanced Study Inst. (Breukelen, 1974). Part 3: Combinatorial Group Theory. Amsterdam: Math. Centrum, 1974. P. 98–129. (Math. Centre Tracts; vol. 57).
2. **Curtis Ch.W., Reiner I.** Representation theory of finite groups and associative algebras N Y; London: Interscience Publishers, 1962. 689 p.
3. **Doty S., Henke A.** Decomposition of tensor products of modular irreducibles for SL_2 // Q. J. Math. 2005. Vol. 56, no. 2. P. 189–207. doi: 10.1093/qmath/hah027 .
4. **Fulton W., Harris J.** Representation theory: A first course. N Y: Springer, 2004. 551 p. (Graduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, 129).
5. **Jantzen J.C.** Representations of algebraic groups Providence: American Mathematical Society, 2003. 576 p. (Mathematical Surveys and Monographs; vol. 107). ISBN: 978-0-8218-4377-2 .
6. **Humphreys J.E.** Introduction to Lie algebras and representation theory. N Y: Springer, 2000. 173 p.
7. **Humphreys J.E.** Modular representations of finite groups of Lie type Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011. 206 p. doi: 10.1017/CBO9780511525940 .
8. **Liebeck M.W., Nikolov N., Shalev A.** Groups of Lie type as products of SL_2 subgroups // J. Algebra. 2011. Vol. 326, no. 1. P. 201–207. doi: 10.1016/j.jalgebra.2008.12.030 .
9. **Malle G., Testerman D.** Linear algebraic groups and finite groups of Lie type Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011. 309 p. doi: 10.1017/CBO9780511994777 .

Поступила 22.11.2020
После доработки 30.12.2020
Принята к публикации 11.01.2021

Коныгин Антон Владимирович
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: konygin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Cameron P.J. Suborbits in transitive permutation groups. In: Hall M., van Lint J.H. (eds), *Combinatorics.* NATO Advanced Study Institutes Series, vol. 16. Dordrecht: Springer, 1974, pp. 419–450. doi: 10.1007/978-94-010-1826-5_20 .
2. Curtis C.W., Reiner I. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Pure and Applied Mathematics, vol. XI. N Y; London: Interscience Publishers, 1962, 689 p. ISBN: 978-0-8218-4066-5 .
3. Doty S., Henke A. Decomposition of tensor products of modular irreducibles for SL_2. *Q. J. Math.*, 2005, vol. 56, no. 2, pp. 189–207. doi: 10.1093/qmath/hah027 .

4. Fulton W., Harris J. *Representation theory: A first course.* Graduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, vol. 129. New York: Springer, 2004, 551 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0979-9 .
5. Jantzen J.C. *Representations of algebraic groups.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107. Providence: American Mathematical Society, 2003, 576 p. ISBN: 978-0-8218-4377-2 .
6. Humphreys J.E. *Introduction to Lie algebras and representation theory.* New York: Springer, 1980, 173 p. ISBN: 0-387-90052-7/,.
7. Humphreys J.E. *Modular representations of finite groups of Lie type.* Cambridge: Cambridge University Press, 2011, 206 p. doi: 10.1017/CBO9780511525940 .
8. Liebeck M.W., Nikolov N., Shalev A. Groups of Lie type as products of SL_2 subgroups. *J. Algebra*, 2011, vol. 326, no. 1, pp. 201–207. doi: 10.1016/j.jalgebra.2008.12.030 .
9. Malle G., Testerman D. *Linear algebraic groups and finite groups of Lie type.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011, 309 p. doi: 10.1017/CBO9780511994777 .

Received November 22, 2020
Revised December 30, 2020
Accepted January 11, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00456).

Anton Vladimirovich Konygin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia e-mail: konygin@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. V. Konygin. On a question concerning the tensor product of modules, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 103–109 .