ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 4 2020

УДК 517.5

МНОГОЧЛЕНЫ ЭЙЛЕРА В ЗАДАЧЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В СРЕДНЕМ[1]

Ю. С. Волков

Рассмотрена задача экстремальной функциональной интерполяции в среднем, впервые изучавшаяся Ю.Н. Субботиным. Найдено представление экстремальных функций, дающих решение этой задачи, через многочлены Эйлера, изучены их свойства. Это позволило вычислить значения констант экстремальной интерполяции в среднем в терминах легко вычисляемых значений многочленов Эйлера в определенных точках, а иногда и констант Фавара. Продемонстрировано согласование констант экстремальной функциональной интерполяции в среднем при предельном переходе устремления величины интервала усреднения к нулю с константами экстремальной функциональной интерполяции.

Ключевые слова: многочлены Эйлера, константы Фавара, интерполяция в среднем.

Yu. S. Volkov. Euler polynomials in the problem of extremal functional interpolation in the mean.

The problem of extremal functional interpolation in the mean, first studied by Yu. N. Subbotin, is considered. Representations of the extremal functions solving this problem in terms of Euler polynomials are found, and their properties are studied. This made it possible to calculate the values of the extremal interpolation constants in terms of easily computable values of the Euler polynomials at certain points and sometimes Favard constants. The compatibility of the constants of extremal functional interpolation in the mean as the value of the averaging interval tends to zero with the constants of extremal functional interpolation is demonstrated.

Keywords: Euler polynomials, Favard constants, interpolation in the mean.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-83-97

1. Введение

Задачи экстремальной функциональной интерполяции в среднем, состоящие в нахождении оптимальных констант $A^{\alpha}_{n,p}$ (см. определение ниже), впервые рассматривались Ю. Н. Субботиным [1–3] в 70–90-е годы прошлого века. Он получил их полное решение, выразив эти константы через нормы функций, составленных из некоторых многочленов. При этом явные численные значения не приводились.

В данной работе при некоторых значениях p или интервала усреднения α найдены значения констант $A^{\alpha}_{n,p}$ в явном виде через легко вычисляемые значения многочленов Эйлера в определенных точках. Это удалось сделать, установив связь экстремальных функций Ю. Н. Субботина с хорошо изученными многочленами Эйлера.

Недавно Ю. Н. Субботин, С. И. Новиков и В. Т. Шевалдин в своей работе “Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны” (*Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225) привели обзор результатов исследования задач по теме, указанной в названии работы. На эту работу будем ссылаться ниже как на *обзор*.

Одна из задач состоит в следующем.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2016-0013) и при частичной финансовой поддержке РФФИ и ННИО (проект № 19-51-12008).

Пусть $p \in [1, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$ и пусть $Y_{n,p} = \{\boldsymbol{y}\colon \boldsymbol{y} = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \|\Delta^n \boldsymbol{y}\|_{l_p} \le 1\}$ — класс интерполируемых последовательностей $\boldsymbol{y} = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Delta^n y_k|^p \le 1 \quad \text{при} \quad 1 \le p < \infty, \qquad \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\Delta^n y_k| \le 1 \quad \text{при} \quad p = \infty;$$

$\Delta^n \boldsymbol{y}$ — последовательность, членами которой являются значения оператора обычной конечной разности порядка n на последовательности $\boldsymbol{y}$, т. е. значения

$$\Delta^n y_k = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} y_{k+m}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

AC — множество всех локально абсолютно непрерывных функций. Класс функций, связанных с последовательностью $\boldsymbol{y}$ через усредняющий функционал $\dfrac{1}{2\alpha}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(k+t)dt$, обозначим

$$\Phi^{\alpha}_{n,p}(\boldsymbol{y}) = \Big\{ f\colon f^{(n-1)} \in AC, f^{(n)} \in L_p(\mathbb{R}),\ \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(k+t)dt = y_k\ \forall k \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Задача экстремальной функциональной интерполяции в среднем состоит в нахождении *константы экстремальной функциональной интерполяции*

$$A^{\alpha}_{n,p} = \sup_{\boldsymbol{y}\in Y_{n,p}} \inf_{f\in\Phi^{\alpha}_{n,p}(\boldsymbol{y})} \|f^{(n)}\|_{L_p(\mathbb{R})}. \tag{1}$$

Данную задачу начал изучать Ю. Н. Субботин [1] в 1975 году. Сначала он рассмотрел непересекающиеся интервалы усреднения до половины шага сетки ($\alpha \le 1/2$), а затем более широкие. Эту задачу можно считать обобщением ранее изучавшейся им задачи [4; 5], где вместо усредняющего функционала рассматривалось значение в точке, т. е. просто интерполяция, в силу предельного соотношения

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(k+t)dt = f(k).$$

Ю. Н. Субботиным было выписано точное решение задачи в виде

$$A^{\alpha}_{n,p} = (n-1)!\, \|S_n\|^{-1}_{L_q[0,1]}, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

где $S_n(t)$ — некоторая кусочно-многочленная функция, определение которой приведем ниже. В статье [1] и последующих сами нормы функций $S_n(t)$ не вычислялись.

В данной работе мы покажем, что для некоторых значений p норму функций $S_n(t)$ можно вычислить и результат записать в терминах значений многочленов Эйлера в некоторых точках (или самой функции $S_n(t)$), а иногда и в терминах констант Фавара.

В разд. 2 мы изучаем свойства экстремальных функций $S_n(t)$, в разд. 3 вычисляем некоторые нормы этих функций и значения $A^{\alpha}_{n,p}$ для $p = 1, 2, \infty$. Следующий разд. 4 посвящен рассмотрению предельного перехода ($\alpha \to 0$) и сопоставлению получаемых констант константам для интерполяции. Граничный случай $\alpha = 1/2$ исследован в разд. 5. В разд. 6 рассматривается эта задача с величиной усреднения $\alpha = 1/6$. Этот случай интересен тем, что значения экстремальных констант имеют достаточно простые выражения. И, наконец, в разд. 7 рассмотрены пересекающиеся интервалы усреднения.

2. Свойства экстремальной функции

Приведем основной результат, установленный в работе [1].

Теорема 1 (Ю. Н. Субботин). *Для любого натурального* n *и всех* $1 < p \le \infty$ *и* $0 < \alpha \le 1/2$ *справедливо равенство*

$$A_{n,p}^{\alpha} = (n-1)!\,\|S_n\|_{L_q[0,1]}^{-1},$$

где $1/p + 1/q = 1$, *а функция* $S_n(t)$ *задается формулами*

$$S_{2m}(t) = \frac{1}{8m\alpha}\begin{cases} Q_{2m}^*(\alpha+t) + Q_{2m}^*(\alpha-t), & 0 \le t \le \alpha, \\ Q_{2m}^*(t+\alpha) - Q_{2m}^*(t-\alpha), & \alpha \le t \le 1-\alpha, \\ -Q_{2m}^*(1+\alpha-t) - Q_{2m}^*(-1+\alpha+t), & 1-\alpha \le t \le 1, \end{cases}$$

если $n = 2m$, *и*

$$S_{2m+1}(t) = \frac{1}{4(2m+1)\alpha}\begin{cases} Q_{2m+1}^*(\alpha+t) - Q_{2m+1}^*(\alpha-t), & 0 \le t \le \alpha, \\ Q_{2m+1}^*(t+\alpha) - Q_{2m+1}^*(t-\alpha), & \alpha \le t \le 1-\alpha, \\ Q_{2m+1}^*(1+\alpha-t) - Q_{2m+1}^*(-1+\alpha+t), & 1-\alpha \le t \le 1, \end{cases}$$

если $n = 2m+1$. *Многочлен* $Q_n^*(t)$ *определен равенством*

$$Q_n^*(t) = \sum_{l=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1-l}(-1)^{n-k+1}\binom{n+1}{k+l}(k+1-t)^n.$$

В данную формулировку были внесены некоторые изменения по сравнению с оригиналом [1] и обзором, процитированным в начале предыдущего раздела.

Во-первых, нам показалось удобнее ширину интервала усреднения (в одну сторону) обозначить через α (в оригинале через $h/2$). Во-вторых, как нам кажется, мы устранили неточность в определении функции $S_n(t)$, а именно, добавили в знаменателе множитель 2α (в оригинальной статье [1] и обзоре следует добавить h). При анализе доказательства этой теоремы мы заметили по тексту, что при введении в рассмотрение функции $S_n(t)$ множитель $1/h$ присутствовал, но по ходу выкладок в какой-то момент он потерялся. Понятно, что это никак не влияет на правильность рассуждений и доказательств, но в итоговой формуле этот множитель очень важен, в частности (см. разд. 4 ниже) для согласования с более ранними результатами Ю. Н. Субботина [4; 5] при осуществлении предельного перехода ($\alpha \to 0$).

Отметим, что обобщение обсуждаемой задачи рассматривалось В. Т. Шевалдиным [6; 7] для случая, когда n-я производная заменена произвольным линейным дифференциальным оператором n-го порядка с постоянными коэффициентами. Полученная там константа уже не содержит указанную опечатку, и при выборе в качестве дифференциального оператора просто D^n эта константа должна превратиться в правильную константу теоремы 1 (в указанных работах нужная константа выписана в других терминах).

В работе [1] отмечено, что выполняется равенство

$$Q_n(x) = Q_n^*\Big(\frac{1+x}{2}\Big),$$

многочлен $Q_n(x)$ ранее уже рассматривался Ю. Н. Субботиным в [4], где установлена связь

$$Q_{n-1}(x) = \frac{2^{2n-1}}{n}\Big[(-1)^n B_n\Big(\frac{1-x}{4}\Big) - B_n\Big(\frac{1+x}{4}\Big)\Big]$$

с хорошо известными [8–10] многочленами Бернулли $B_n(x)$. Более того, многочлен $Q_n(x)$ отличается лишь множителем от многочлена Эйлера. Действительно, воспользуемся последовательно свойствами многочленов Бернулли и Эйлера [10, 24.4.3] и [10, 24.4.23], тогда

$$Q_{n-1}(x) = \frac{2^{2n-1}}{n}\Big[B_n\Big(\frac{x+1}{4}+\frac{1}{2}\Big) - B_n\Big(\frac{1+x}{4}\Big)\Big] = 2^{n-1}E_{n-1}\Big(\frac{1+x}{2}\Big).$$

Таким образом, нужный нам многочлен $Q_n^*(t)$ выражается через многочлен Эйлера

$$Q_n^*(t) = 2^n E_n(t). \tag{2}$$

Напомним [9, 1.14], что производящей функцией для многочленов Эйлера является функция $2e^{xt}/(e^t+1)$. Ее разложение в степенной ряд по переменной t имеет вид

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(x)\frac{t^k}{k!}.$$

Согласно [10, 24.6.8] многочлены Эйлера можно определять и по явным формулам

$$E_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{n+1}{k}(x+j)^n.$$

Многочлены Эйлера $E_n(t)$ достаточно хорошо изучены. Для любого $n \ge 1$ на отрезке $[0,1]$ нули и точки экстремума всегда расположены в точках $t=0$ и $t=1$ или $t=1/2$, причем при нечетных n многочлены являются монотонными (точки $t=0$ и $t=1$ являются точками экстремальных значений и $t=1/2$ — это единстенный корень), а при четных — выпуклыми функциями на $[0,1]$ (в точках $t=0$ и $t=1$ нули функции, а экстремум в точке $t=1/2$). Можно более точно сказать о знаках

$$\operatorname{sign} E_n(t) = (-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, \quad \operatorname{sign} E_n'(t) = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \quad \text{для всех} \quad t \in [0,1/2].$$

Здесь $[u]$ означает целую часть числа u.

Известно [1, лемма 3.1], что при нечетном n функция $S_n(t)$ симметрична относительно прямой $t=1/2$ и центрально симметрична относительно точки $t=1/2$ при четном n, поэтому вместо рассмотрения ее на всем отрезке $[0,1]$ можно ограничиться рассмотрением лишь при $t \in [0,1/2]$. Кроме того, поскольку

$$E_n(t) = (-1)^n E_n(1-t) \tag{3}$$

(см. [10, 24.4.4]), то для четных и нечетных n можно записать единую формулу, определяющую $S_n(t)$, а именно

$$S_n(t) = \frac{2^{n-2}}{n\alpha}\begin{cases} E_n(t+\alpha) + E_n(t+1-\alpha), & 0 \le t \le \alpha, \\ E_n(t+\alpha) - E_n(t-\alpha), & \alpha \le t \le 1/2. \end{cases} \tag{4}$$

В дальнейшем нам иногда может оказаться полезным указание зависимости этой функции от параметра α, для этого будем использовать запись

$$S_n(t) = S_n(t,\alpha). \tag{5}$$

Многочлены Эйлера всегда монотонны на промежутке $[0,1/2]$. Оказывается, это же можно сказать и про функции $S_n(t)$. Для многочленов Эйлера справедливо [8, 23.1.5] правило дифференцирования

$$E_n'(t) = nE_{n-1}(t).$$

Непосредственно из него и формулы представления $S_n(t)$ через $E_n(t)$ следует правило дифференцирования и для этих функций.

Лемма 1. *Справедливо правило дифференцирования*

$$S_n'(t) = 2(n-1)S_{n-1}(t). \tag{6}$$

Непосредственной проверкой устанавливается и аналог свойства (3) для функции $S_n(t)$.

Лемма 2. *При $t \in [0,1]$ справедливо тождество*

$$S_n(t) = (-1)^{n-1} S_n(1-t).$$

Лемма 3. *Функция $S_n(t)$ монотонна на $[0,1/2]$, причем направление монотонности при нечетных n совпадает с направлением монотонности многочлена Эйлера $E_n(t)$, а при четных противоположно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай $n = 2m+1$. Если $n = 1$, то в соответствии с (4) имеем

$$S_1(t) = \frac{1}{2\alpha}\begin{cases} E_1(t+\alpha) + E_1(t+1-\alpha) = 2t, & 0 \le t \le \alpha, \\ E_1(t+\alpha) - E_1(t-\alpha) = 2\alpha, & \alpha \le t \le 1/2. \end{cases} \tag{7}$$

Функция $S_1(t)$ на $[0,1/2]$ возрастает (не убывает), и многочлен Эйлера $E_1(t) = t - 1/2$ тоже возрастает, т. е. лемма, конечно же, в этом случае верна. Пусть теперь $m \ge 1$. Многочлен $E_{2m+1}(t)$ на всем отрезке $[0,1]$ монотонен, поэтому функция $S_{2m+1}(t)$ при $t \in [0,\alpha]$ есть сумма двух монотонных функций одинаковой монотонности, следовательно, она тоже монотонна, и направление монотонности совпадает с направлением монотонности многочлена Эйлера $E_{2m+1}(t)$. Если $t \in [\alpha, 1/2]$, то с учетом (3) получаем

$$\begin{aligned} S_{2m+1}'\Big(\frac{1}{2}\Big) &= \frac{2^{2m-1}}{\alpha}\Big[E_{2m}\Big(\frac{1}{2}+\alpha\Big) - E_{2m}\Big(\frac{1}{2}-\alpha\Big)\Big] \\ &= \frac{2^{2m-1}}{\alpha}\Big[E_{2m}\Big(\frac{1}{2}+\alpha\Big) - E_{2m}\Big(\frac{1}{2}+\alpha\Big)\Big] = 0. \end{aligned}$$

Далее, в соответствии с (4) имеем

$$\operatorname{sign} S_{2m+1}''(t) = \operatorname{sign}[E_{2m-1}(t+\alpha) - E_{2m-1}(t-\alpha)],$$

причем многочлен $E_{2m-1}(t)$ монотонен, и оба аргумента $t+\alpha$ и $t-\alpha$ значений многочлена в разности лежат на участке монотонности. Поскольку $t+\alpha > t-\alpha$, то знак этой разности будет совпадать со знаком его производной, а именно

$$\operatorname{sign} S_{2m+1}''(t) = \operatorname{sign} E_{2m-1}'(t) = (-1)^{m-1};$$

это говорит о выпуклости функции $S_{2m+1}(t)$, а с учетом экстремума на правом конце при $t = 1/2$ получаем ее монотонность, и направление монотонности противоположно направлению монотонности многочлена $E_{2m-1}(t)$, т. е. совпадает с направлением монотонности многочлена $E_{2m+1}(t)$ на $[\alpha, 1/2]$.

Пусть теперь $n = 2m$. Заметим, что

$$S_{2m}'(0) = \frac{2^{2m-2}}{\alpha}[E_{2m-1}(\alpha) + E_{2m-1}(1-\alpha)] = \frac{2^{2m-2}}{\alpha}[E_{2m-1}(\alpha) - E_{2m-1}(\alpha)] = 0$$

в соответствии со свойством (3). Далее, при $t \in [0,\alpha]$ имеем

$$\operatorname{sign} S_{2m}''(t) = \operatorname{sign}[E_{2m-2}(t+\alpha) + E_{2m-2}(t+1-\alpha)] = (-1)^{m-1},$$

поскольку многочлен $E_{2m-2}(t)$ на всем отрезке $[0,1]$ одного знака. Таким образом, функция $S_{2m}(t)$ выпукла на $t\in[0,\alpha]$ и имеет экстремум при $t=0$, следовательно, она монотонна, и направление ее монотонности совпадает с направлением монотонности многочлена $E_{2m-1}(t)$, т. е. противоположно направлению монотонности многочлена $E_{2m}(t)$.

Если $t\in[\alpha,1/2]$, то

$$S'_{2m}(t)=\frac{2^{2m-1}}{\alpha}[E_{2m-1}(t+\alpha)-E_{2m-1}(t-\alpha)],$$

многочлен $E_{2m-1}(t)$ монотонен на всем отрезке $[0,1]$, следовательно, разность большего и меньшего значений аргумента будет положительной при возрастающем многочлене $E_{2m-1}(t)$ и отрицательной при убывающем. Поэтому направление монотонности $S_{2m}(t)$ совпадает с направлением монотонности многочлена $E_{2m-1}(t)$, т. е. также противоположно направлению монотонности многочлена $E_{2m}(t)$.

Лемма доказана.

Таким образом, функции $S_n(t)$ по свойствам очень похожи на многочлены Эйлера: экстремумы и нули расположены только в точках $t=0$ и $t=1$ или $t=1/2$ на отрезке $[0,1/2]$ одного знака и являются либо монотонными, либо выпуклыми функциями на всем отрезке $[0,1]$.

Вычислим значения функции $S_n(t)$ в точках $t=0$ и $t=1/2$. Имеем

$$S_n(0)=\frac{2^{n-2}}{n\alpha}\big[E_n(\alpha)+E_n(1-\alpha)\big]=\frac{2^{n-2}}{n\alpha}\big[E_n(\alpha)+(-1)^nE_n(\alpha)\big],$$

$$S_n\Big(\frac12\Big)=\frac{2^{n-2}}{n\alpha}\Big[E_n\Big(\frac12+\alpha\Big)-E_n\Big(\frac12-\alpha\Big)\Big]=\frac{2^{n-2}}{n\alpha}\Big[E_n\Big(\frac12+\alpha\Big)-(-1)^nE_n\Big(\frac12+\alpha\Big)\Big].$$

Следовательно, если $n=2m-1$, то

$$S_{2m-1}(0)=0,\quad S_{2m-1}\Big(\frac12\Big)=\frac{2^{2m-2}}{(2m-1)\alpha}\,E_{2m-1}\Big(\frac12+\alpha\Big),$$

если $n=2m$, то

$$S_{2m}(0)=\frac{2^{2m-2}}{m\alpha}\,E_{2m}(\alpha),\quad S_{2m}\Big(\frac12\Big)=0.$$

Для значений многочленов Эйлера в точках экстремумов используются специальные числа, известные как *числа Эйлера*

$$E_n=2^nE_n\Big(\frac12\Big),$$

и *смещенные числа Эйлера*

$$E_n^*=2^nE_n(0).$$

Так как половина из этих чисел нулевые, то ненулевые иногда объединяют в одну последовательность чисел

$$\mathbb{E}_{2m}=E_{2m},\quad \mathbb{E}_{2m+1}=E^*_{2m+1},\quad m=0,1,\ldots,$$

которые можно называть *объединенными числами Эйлера.*

Поскольку функции $S_n(t)$ по свойствам аналогичны многочленам Эйлера, то, поступая по аналогии, введем последовательность ненулевых чисел, состоящую из значений функции $S_n(t)$ в точках экстремумов, а именно

$$\mathbb{S}_{2m-1}=S_{2m-1}\Big(\frac12\Big),\quad \mathbb{S}_{2m}=S_{2m}(0). \tag{8}$$

Далее нормы функций $S_n(t)$ будут вычислены в терминах чисел $\mathbb{S}_n$.

3. Вычисление нормы

Мы изучили свойства экстремальной функции $S_n(t)$, через норму которой задаются константы экстремальной функциональной интерполяции в среднем. Несложно сразу вычислить нормы функции при $p = 1$ и $p = \infty$. Правда, теорема 1 не охватывает случай $p = 1$, но поскольку она справедлива для всех $p > 1$, то предельное значение константы тоже представляет интерес.

В соответствии с обозначениями (8) и свойствами $S_n(t)$ можем утверждать, что

$$\|S_n\|_{L_\infty[0,1]} = \max_{0\le t\le 1} |S_n(t)| = \left|\mathbb{S}_n\right|.$$

Тем самым предельное значение константы при $p \to 1$, которое тоже будем обозначать через $A^\alpha_{n,1}$, для всех $0 < \alpha \le 1/2$ равно

$$A^\alpha_{n,1} = (n-1)!\,\left|\mathbb{S}_n\right|^{-1}. \tag{9}$$

Теорема 2. *Для всех $0 < \alpha \le 1/2$ справедливо равенство*

$$A^\alpha_{n,\infty} = \frac{n!}{|\mathbb{S}_{n+1}|}, \tag{10}$$

где числа $\mathbb{S}_n$ — определяемые равенствами (8) значения экстремумов экстремальных функций $S_n(t)$, которые также выражаются через значения многочленов Эйлера

$$\mathbb{S}_n = \frac{2^{n-1}}{n\alpha}\begin{cases} E_n\Big(\dfrac12+\alpha\Big), & n \text{ нечетное,}\\ E_n(\alpha), & n \text{ четное.}\end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства необходимо вычислить L_1-норму функции $S_n(t)$. Лемма 1 позволяет нам получить значение интеграла

$$\int\limits_0^{1/2} S_n(t)dt = \frac{1}{2n}\Big[S_{n+1}\Big(\frac12\Big) - S_{n+1}(0)\Big] = (-1)^n\frac{\mathbb{S}_{n+1}}{2n}.$$

Следовательно, значение нормы равно

$$\|S_n\|_{L_1[0,1]} = 2\left|\int\limits_0^{1/2} S_n(t)dt\right| = \frac1n\left|\mathbb{S}_{n+1}\right|.$$

Теорема доказана.

Приступим теперь к вычислению константы $A^\alpha_{n,p}$ при $p = 2$.

Лемма 4. *Если $n + m$ четно и $n > 1$, то справедливо равенство*

$$\int\limits_0^{1/2} S_n(t)S_m(t)dt = -\frac{n-1}{m}\int\limits_0^{1/2} S_{n-1}(t)S_{m+1}(t)dt.$$

Доказательство. Достаточно применить правило дифференцирования (6), формулу интегрирования по частям и свойство, в соответствии с которым нечетные функции $S_n(t)$ обращаются в 0 при $t = 0$, а четные — при $t = 1/2$. □

Теорема 3. *Для всех* $0 < \alpha \le 1/2$ *справедливо равенство*

$$A_{n,2}^{\alpha} = \sqrt{\frac{2\alpha\,(2n)!}{|S_{2n+1}(\alpha)|}} = \frac{\alpha}{2^{n-1}}\sqrt{\frac{(2n+1)!}{|E_{2n+1}(2\alpha) - E_{2n+1}(0)|}}. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом леммы 4 и в соответствии с (7) получаем

$$\int_0^{1/2} S_n^2(t)dt = (-1)^{n-1}\frac{\big((n-1)!\big)^2}{(2n-2)!}\int_0^{1/2} S_1(t)S_{2n-1}(t)dt = (-1)^n\frac{\big((n-1)!\big)^2}{2(2n-1)!}\int_0^{1/2} S_1'(t)S_{2n}(t)dt$$

$$= (-1)^n\frac{\big((n-1)!\big)^2}{2(2n-1)!}\int_0^{\alpha}\frac{1}{\alpha}S_{2n}(t)dt = (-1)^n\frac{\big((n-1)!\big)^2}{4\alpha(2n)!}\big[S_{2n+1}(\alpha) - S_{2n+1}(0)\big]$$

$$= (-1)^n\frac{\big((n-1)!\big)^2}{4\alpha(2n)!}S_{2n+1}(\alpha).$$

Следовательно,

$$\|S_n\|_{L_2[0,1]} = (n-1)!\sqrt{\frac{|S_{2n+1}(\alpha)|}{2\alpha\,(2n)!}}.$$

Теорема доказана.

4. Предельный переход $\alpha \to 0$

В определении функций $S_n(t)$ и чисел последовательности $\{\mathbb{S}_n\}$ в выражениях в знаменателе стоит параметр α, поэтому просто положить $\alpha = 0$ мы не можем. Давайте посмотрим, что будет происходить при предельном переходе, если $\alpha \to 0$.

Поскольку функция $S_n(t)$ дифференцируемая при $n \ge 2$, более того, это многочлен на промежутке $[\alpha, 1-\alpha]$, то для $t \in (\alpha, 1-\alpha)$ получаем

$$\lim_{\alpha\to 0} S_n(t) = \frac{2^{n-1}}{n}\lim_{\alpha\to 0}\frac{E_n(t+\alpha) - E_n(t-\alpha)}{2\alpha} = \frac{2^{n-1}}{n}nE_{n-1}(t) = 2^{n-1}E_{n-1}(t) = Q_{n-1}^*(t).$$

Приведем хорошо известное [8, 23.1.7] представление многочлена Эйлера

$$E_n\,(x+h) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(x)h^{n-k} \tag{12}$$

и воспользуемся им, чтобы найти пределы чисел $\mathbb{S}_n$ при $\alpha \to 0$.

Согласно (12) при $x = 0$, $h = \alpha$ и $n = 2m$ имеем

$$\lim_{\alpha\to 0}\mathbb{S}_{2m} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{2^{2m-2}E_{2m}(\alpha)}{m\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\left[\sum_{k=1}^{m}\binom{2m}{2k-1}(2\alpha)^{2m-2k}\frac{E_{2k-1}^*}{2m} + \frac{(2\alpha)^{2m-1}}{2m}\right] = E_{2m-1}^*.$$

Аналогично, при $x = 1/2$, $h = \alpha$ и $n = 2m+1$ получаем

$$\lim_{\alpha\to 0}\mathbb{S}_{2m+1} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{2^{2m}E_{2m+1}\big(\frac{1}{2}+\alpha\big)}{(2m+1)\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}(2\alpha)^{2m-2k}\frac{E_{2k}}{2m+1}\right] = E_{2m}.$$

Или в общем виде

$$\lim_{\alpha\to 0}\mathbb{S}_n = \mathbb{E}_{n-1}.$$

Если предельное при $\alpha \to 0$ значение константы $A_{n,p}^{\alpha}$ обозначать через $A_{n,p}^{0}$, то соотношения (9) и (10) переходят в следующие:

$$A_{n,1}^{0} = (n-1)!\,|\mathbb{E}_{n-1}|^{-1}, \quad A_{n,\infty}^{0} = n!\,|\mathbb{E}_n|^{-1}. \tag{13}$$

Осталось заметить, что эти значения совпадают со значениями $A_{n,1}$ и $A_{n,\infty}$ соответственно, полученными ранее для случая интерполяции в [4; 5], правда, в других терминах. В первой из этих работ константа $A_{n,\infty}$ записана в виде

$$A_{n,\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(n+1)}}{(2\nu+1)^{n+1}}\right]^{-1}.$$

Но это же значение можно записать и в терминах констант Фавара (см. [11, §3.1]), определяемых по правилу

$$\mathcal{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(n+1)}}{(2\nu+1)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots .$$

Таким образом,

$$A_{n,\infty} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n}\mathcal{K}_n^{-1}. \tag{14}$$

Заметим, что константы Фавара довольно часто возникают в теории приближения, например, при вычислении поперечников и получении точных оценок (см. [11; 12]) погрешности аппроксимации.

С другой стороны, в соответствии с [13, 5.2.4] эти же числовые ряды могут быть записаны через числа Бернулли и Эйлера в виде

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{2m}} = (-1)^{m-1}\frac{\pi^{2m}(2^{2m}-1)}{2(2m)!}B_{2m} = (-1)^m\,\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1}\frac{E_{2m-1}^{*}}{(2m-1)!},$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{2m+1}} = (-1)^m\,\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}\frac{E_{2m}}{(2m)!}.$$

Таким образом, получаем тождества, связывающие константы Фавара и числа Эйлера

$$\mathcal{K}_n = (-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n}\mathbb{E}_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n}|\mathbb{E}_n|, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{15}$$

которые убеждают нас в совпадении представлений для $A_{n,\infty}^{0}$ в (13) и для $A_{n,\infty}$ в (14), т. е. $A_{n,\infty}^{0} = A_{n,\infty}$.

Значение константы $A_{n,1}$ приведено в работе [5], но не вычислено явно. Значение этой константы подсчитано в работах [14; 15], и это значение совпадает с $A_{n,1}^{0}$.

Для проведения предельного перехода $\alpha \to 0$ для $p = 2$ в соответствии с (11) необходимо вычислить предел величин $S_{2n+1}(\alpha)/\alpha$. Учитывая определение функции $S_n(t)$ и применяя равенство (12) при $x = 0$ и $h = 2\alpha$, для $n \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned}\frac{S_{2n+1}(\alpha)}{\alpha} &= \frac{2^{2n-1}}{\alpha^2(2n+1)}\big[E_{2n+1}(2\alpha) - E_{2n+1}(0)\big] = \frac{2^{2n-1}}{\alpha^2(2n+1)}\big[4\alpha^2 n(2n+1)E_{2n-1}(0) + O(\alpha^4)\big]\\ &= 4nE_{2n-1}^{*} + O(\alpha^2).\end{aligned}$$

Тогда

$$A_{n,2}^{0} = \lim_{\alpha\to 0}A_{n,2}^{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{|S_{2n+1}(\alpha)|}{2\alpha\,(2n)!}\right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{(2n-1)!}{|E_{2n-1}^{*}|}},$$

что опять-таки совпадает со значением $A_{n,2}$, вычисленным в [14–16].

Полученная равносильность как результат предельного перехода $\alpha \to 0$ подтверждает связь и согласование задач и получаемых констант экстремальной функциональной интерполяции для просто интерполяции и интерполяции в среднем.

5. Граничный случай $\alpha = 1/2$

Другой предельный случай — это $\alpha = 1/2$. В соответствии с определением чисел (8) при $\alpha = 1/2$ имеем

$$\mathbb{S}_n = (-1)^n \frac{\mathbb{E}_n}{n},$$

теперь равенства (9) и (10) в соответствии с тождествами (15) запишутся в виде

$$A_{n,1}^{1/2} = n!\,\bigl|\mathbb{E}_n\bigr|^{-1} = \Bigl(\frac{\pi}{2}\Bigr)^n \mathcal{K}_n^{-1}, \tag{16}$$

$$A_{n,\infty}^{1/2} = (n+1)!\,\bigl|\mathbb{E}_{n+1}\bigr|^{-1} = \Bigl(\frac{\pi}{2}\Bigr)^{n+1} \mathcal{K}_{n+1}^{-1}. \tag{17}$$

Кроме того, при $\alpha = 1/2$ имеем

$$S_{2n+1}(\alpha) = \mathbb{S}_{2n+1} = -\frac{\mathbb{E}_{2n+1}}{2n+1} = -\frac{E^*_{2n+1}}{2n+1},$$

следовательно,

$$A_{n,2}^{1/2} = \sqrt{\frac{(2n+1)!}{|E^*_{2n+1}|}} = \Bigl(\frac{\pi}{2}\Bigr)^{n+1/2} \mathcal{K}_{2n+1}^{-1/2}. \tag{18}$$

Таким образом, мы видим, что при $\alpha = 1/2$ вычисленные константы экстремальной функциональной интерполяции в среднем совпадают с константами просто экстремальной функциональной интерполяции, но для случая $n+1$. На самом деле это верно в общем случае, а не только для значений $p = 1, 2, \infty$.

Действительно, из двух промежутков $[0,\alpha]$ и $[\alpha, 1/2]$, на которых задается функция $S_n(t)$, один исчезает, и тогда

$$S_n(t) = \frac{2^n}{n} E_n\Bigl(t + \frac{1}{2}\Bigr) = \frac{1}{n} Q_n^*\Bigl(t + \frac{1}{2}\Bigr),$$

т. е. экстремальной функцией является та же функция с точностью до коэффициента, что и для интерполяции, но на 1 большей степени и смещенная на половину интервала. Поскольку смещение не влияет на норму, получаем

$$A_{n,p}^{1/2} = \frac{n!}{2^{1/p}} \|Q_n^*\|^{-1}_{L_q[0,1/2]} = \frac{n!}{2^n 2^{1/p}} \|E_n\|^{-1}_{L_q[0,1/2]}, \tag{19}$$

что, как показано в работах [14; 15], совпадает с $A_{n+1,p}$ для случая интерполяции. Напомним, что $1/p + 1/q = 1$.

6. Промежуточный случай $\alpha = 1/6$

Константы $A^\alpha_{n,1}$, $A^\alpha_{n,2}$ и $A^\alpha_{n,\infty}$, вообще говоря, можно при любом значении $\alpha \in (0, 1/2]$ выразить через константы Фавара. Для этого нам достаточно уметь выразить значения $\mathbb{S}_n$ и $S_{2n+1}(\alpha)$ через объединенные числа Эйлера, и их простая связь (15) с константами Фавара позволит получить желаемое выражение. А формула (12) нам всегда предоставляет такую возможность. Но в общем случае выражения будут громоздкими, и мы не будем этого делать. Предпочтительнее компактные представления через $\mathbb{S}_n$ и $S_{2n+1}(\alpha)$, т. е. через значения многочленов Эйлера в точках $t = \alpha$, $t = 1/2 - \alpha$ или $t = 2\alpha$.

Но есть один случай, когда формулы будут компактными. Достаточно простые выражения будут при $\alpha = 1/6$. В этом случае согласно [10, 24.4.30, 24.4.33] имеем

$$E_{2m-1}\Bigl(\frac{1}{3}\Bigr) = \frac{1 - 3^{1-2m}}{2^{2m}} E^*_{2m-1}, \quad E_{2m}\Bigl(\frac{1}{6}\Bigr) = \frac{1 + 3^{-2m}}{2^{2m+1}} E_{2m},$$

тогда числа нужной последовательности вычисляются как

$$\mathbb{S}_n = \frac{3^{-n} + (-1)^n}{2n} \cdot 3\mathbb{E}_n,$$

а также

$$S_{2n+1}\Big(\frac{1}{6}\Big) = \frac{6 \cdot 2^{2n-1}}{2n+1}\Big[E_{2n+1}\Big(\frac{1}{3}\Big) - E_{2n+1}(0)\Big] = -\frac{1 + 3^{-2n-1}}{4(2n+1)} \cdot 3E^*_{2n+1}.$$

Следовательно,

$$A^{1/6}_{n,1} = \frac{2n!}{3\big[1 + (-3)^{-n}\big]|\mathbb{E}_n|},$$

$$A^{1/6}_{n,2} = \Big[\frac{4\,(2n+1)!}{3\big[1 + 3^{-2n-1}\big]|\mathbb{E}_{2n+1}|}\Big]^{1/2},$$

$$A^{1/6}_{n,\infty} = \frac{2\,(n+1)!}{3\big[1 + (-3)^{-n-1}\big]|\mathbb{E}_{n+1}|}$$

или в терминах констант Фавара

$$A^{1/6}_{n,1} = \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^n \frac{2}{3\big[1 + (-3)^{-n}\big]\mathcal{K}_n},$$

$$A^{1/6}_{n,2} = \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{n+1/2} \frac{2}{\big(3\big[1 + 3^{-2n-1}\big]\mathcal{K}_{2n+1}\big)^{1/2}},$$

$$A^{1/6}_{n,\infty} = \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{n+1} \frac{2}{3\big[1 + (-3)^{-n-1}\big]\mathcal{K}_{n+1}}.$$

7. Пересекающиеся интервалы усреднения

В 1996 году Ю. Н. Субботин [2] продолжил изучение задачи экстремальной функциональной интерполяции в среднем. Теперь он рассмотрел увеличенные интервалы усреднения, а именно, $\alpha > 1/2$. Результат сформулирован в следующем виде.

Теорема 4 (Ю. Н. Субботин). *При $1/2 < \alpha < 1$ справедливо равенство*

$$A^{\alpha}_{n,\infty} = \alpha \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{n+2} \Big|\varphi_{n+1}\Big(\alpha - \frac{1 + (-1)^n}{4}\Big)\Big|^{-1},$$

где $\varphi_n(t)$ — функция Фавара,

$$\varphi_n(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin[(2\nu+1)\pi t - \pi n/2]}{(2\nu+1)^{n+1}}.$$

Формулировка этой теоремы также уточнена относительно оригинала [2], а именно, уменьшено значение константы в 2 раза. Анализ доказательства теоремы, предложенного в [2], показал, что все доказательные рассуждения и вычисления проводились с многочленами $Q^*_n(t)$, рассматриваемыми ранее, но вид константы $A^{\alpha}_{n,\infty}$ в формулировке теоремы записан через функцию Фавара неточно: в п. 5) леммы 3 (с. 129) вместо

$$Q^*_n(t) = n!\,(2/\pi)^{n+1}\varphi_n(t)$$

должно быть

$$Q^*_n(t) = 2\,n!\,(2/\pi)^{n+1}\varphi_n(t). \tag{20}$$

Хорошо известно [8, 23.1.16], что при $0 \le t \le 1$ функция Фавара $\varphi_n(t)$ совпадает с точностью до множителя с многочленом Эйлера $E_n(t)$ степени n, а именно

$$\varphi_n(t) = \frac{\pi^{n+1}}{4n!} E_n(t).$$

Ранее в (2) мы показали, что $Q_n^*(t) = 2^n E_n(t)$, поэтому должно выполняться именно (20).

Еще одним подтверждением корректности наших действий должно стать совпадение значений констант $A_{n,\infty}^{\alpha}$ теорем 1 и 4 при $\alpha = 1/2$. Для этого выразим константу теоремы 4 через многочлен Эйлера

$$A_{n,\infty}^{\alpha} = 2\alpha\,(n+1)!\,\Big|2^{n+1} E_{n+1}\Big(\alpha - \frac{1+(-1)^n}{4}\Big)\Big|^{-1}.$$

Полагая при этом $\alpha = 1/2$, получаем

$$A_{n,\infty}^{1/2} = (n+1)!\,\Big|2^{n+1} E_{n+1}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1+(-1)^n}{4}\Big)\Big|^{-1} = (n+1)!\,\big|\mathbb{E}_{n+1}\big|^{-1} = \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{n+1} \mathcal{K}_{n+1}^{-1},$$

что полностью совпадает с (17).

Заметим, что при $1/2 < \alpha < 1$ определение (4) функций $S_n(t)$ становится некорректным, поэтому рассмотрим другую последовательность функций $S_n^*(t)$, определяемую аналогичным образом

$$S_n^*(t) = \frac{2^{n-2}}{n\alpha} \begin{cases} E_n(t+\alpha^*) + E_n(t+1-\alpha^*), & 0 \le t \le \alpha^*, \\ E_n(t+\alpha^*) - E_n(t-\alpha^*), & \alpha^* \le t \le 1/2, \end{cases} \tag{21}$$

где $\alpha^* = 1 - \alpha \in (0, 1/2)$, т.е. в коэффициенте сохранен параметр α, а в аргументах и в областях задания все вхождения параметра α заменены на значение α^*, симметричное относительно $1/2$. Так же, как и в (5), если мы хотим подчеркнуть зависимость от параметра α, то будем использовать запись

$$S_n^*(t) = S_n^*(t, \alpha).$$

Тогда функции $S_n(t)$ и $S_n^*(t)$ связаны следующим образом:

$$\alpha S_n^*(t, \alpha) = \alpha^* S_n(t, \alpha^*). \tag{22}$$

Так как новые функции $S_n^*(t)$ отличаются лишь параметром и коэффициентом от изучавшихся ранее $S_n(t)$, то структура и свойства новых функций известны и не требуют отдельного рассмотрения. Значит, экстремумы и нули также расположены на краях отрезка $[0, 1/2]$. По аналогии определим последовательность чисел $\{\mathbb{S}_n^*\}$, состоящую из значений экстремумов, следующим образом:

$$\mathbb{S}_n^* = \begin{cases} S_{2m}^*(0) = \dfrac{2^{2m-2}}{m\alpha} E_{2m}(\alpha^*) = \dfrac{2^{2m-2}}{m\alpha} E_{2m}(\alpha), & n = 2m, \\[2ex] S_{2m+1}^*\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = -\dfrac{2^{2m}}{(2m+1)\alpha} E_{2m+1}\Big(\dfrac{1}{2} - \alpha^*\Big) = -\dfrac{2^{2m}}{(2m+1)\alpha} E_{2m+1}\Big(\alpha - \dfrac{1}{2}\Big), & n = 2m+1. \end{cases}$$

Именно через эти числа можно выразить значения функции Фавара, соответственно многочленов Эйлера, участвующие в формулировке теоремы 4. Имеем

$$\varphi_{n+1}\Big(\alpha - \frac{1+(-1)^n}{4}\Big) = \frac{\pi^{n+2}}{4\,(n+1)!} \begin{cases} E_{2m}(\alpha), & n = 2m-1, \\ E_{2m+1}\Big(\alpha - \dfrac{1}{2}\Big), & n = 2m, \end{cases}$$

поэтому

$$\varphi_{n+1}\Big(\alpha - \frac{1+(-1)^n}{4}\Big) = (-1)^{n+1} \frac{\pi^{n+2}}{4\,(n+1)!}\, \frac{(n+1)\alpha}{2^n} \mathbb{S}_{n+1}^*.$$

Теперь можем переформулировать теорему 4.

Теорема 4′. *Для всех* $1/2 \le \alpha < 1$ *справедливо равенство*

$$A^{\alpha}_{n,\infty} = \frac{n!}{|\mathbb{S}^*_{n+1}|}. \tag{23}$$

Сравнивая формулы (10) и (23), замечаем, что при $\alpha = \alpha^* = 1/2$ значения $\mathbb{S}_n$ и $\mathbb{S}^*_n$ совпадают, и опять убеждаемся в одинаковом значении констант $A^{\alpha}_{n,\infty}$.

Отметим, что при $\alpha = 1$ получаем $\alpha^* = 0$ и $\mathbb{S}^*_n = 0$. Следовательно, при стремлении $\alpha \to 1$ величина $A^{\alpha}_{n,\infty}$ становится неограниченно большой, что полностью согласуется с теоремой 2 работы [2].

В 1997 году Ю. Н. Субботин [2] рассмотрел общий случай $1 < p < \infty$ задачи экстремальной функциональной интерполяции в среднем для $1/2 < \alpha < 1$, т.е. увеличенных интервалов усреднения. Им доказан следующий результат.

Теорема 5 (Ю. Н. Субботин). *При* $1/2 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$ *и любом натуральном* n *справедливо равенство*

$$A^{\alpha}_{n,p} = (n-1)!\, 2^{-1/q} \left\| S^*_n(t) \right\|^{-1}_{L_q[0,1/2]},$$

где $1/p + 1/q = 1$, *функция* $S^*_n(t)$ *определяется равенством* (21).

Утверждение теоремы 5 записано в наших терминах и откорректировано, как и в теореме 4.

Поскольку свойства экстремальной функции уже изучены, то мы готовы сравнить выражения для констант $A^{\alpha}_{n,p}$ по формулам теорем 1 и 5 для граничного значения $\alpha = 1/2$. Их равенство сразу следует из соотношения (22), поскольку в граничном случае экстремальные функции совпадают.

Для любого $\alpha \in (1/2, 1)$ симметричный параметр $\alpha^* = 1 - \alpha$ соответствует случаю теоремы 1. Между константами $A^{\alpha}_{n,p}$ и $A^{1-\alpha}_{n,p}$, задаваемыми теоремами 5 и 1 соответственно, существует простая связь, вытекающая из соотношения (22), которую можно сформулировать в виде утверждения.

Теорема 6. *Для любых* $\alpha \in (1/2, 1)$ *и* $1 < p \le \infty$ *имеет место равенство*

$$A^{\alpha}_{n,p} = \frac{1-\alpha}{\alpha} A^{1-\alpha}_{n,p}.$$

Заметим, что все случаи явного вычисления констант при $0 < \alpha \le 1/2$ сразу же переносятся на рассматриваемый случай.

Выражаю огромную благодарность С. И. Новикову, прочитавшему первоначальный вариант рукописи, за множество полезных советов и рекомендаций, способствовавших улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.
2. **Субботин Ю.Н.** Экстремальная функциональная интерполяция в среднем с наименьшим значением n-й производной при больших интервалах усреднения // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 1. С. 114–132.
3. **Субботин Ю.Н.** Экстремальная в L_p интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения // Изв. РАН. Сер. математическая. 1997. Т. 61, № 1. С. 177–198.
4. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.

5. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.
6. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 4. С. 803–805.
7. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.
8. **Абрамовиц М., Стиган И.** (ред.) Справичник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
9. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.
10. **Dilcher K.** Bernoulli and Euler polynomials // NIST handbook of mathematical functions. Washington: U.S. Dept. Commerce, 2010. P. 587–599. URL: https://dlmf.nist.gov/24 .
11. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
12. **Волков Ю.С., Субботин Ю.Н.** 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.
13. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М.: Физматлит, 2002. 632 с.
14. **Волков Ю.С.** Об одной задаче экстремальной функциональной интерполяции и константах Фавара // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 29–32. doi: 10.31857/S2686954320060193 .
15. **Volkov Yu.S.** Efficient computation of Favard constants and their connection to Euler polynomials and numbers // Siberian Electronic Math. Reports. 2020. Vol. 17. P. 1921–1942. doi: 10.33048/semi.20.20.17.129 .
16. **Schoenberg I.J.** Cardinal interpolation and spline functions // J. Approx. Theory. 1969. Vol. 2, no. 2. P. 167–206.

Поступила 5.06.2020
После доработки 1.11.2020
Принята к публикации 9.11.2020

Волков Юрий Степанович
д-р физ.-мат. наук, доцент
главный науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
г. Новосибирск
e-mail: volkov@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Subbotin Yu.N. Extremal problems of functional interpolation, and mean interpolation splines, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 127–185.
2. Subbotin Yu.N. Extremal functional interpolation in the mean with least value of the n-th derivative for large averaging intervals, *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 1, pp. 83–96. doi: 10.1007/BF02312469 .
3. Subbotin Yu.N. Extremal L_p interpolation in the mean with intersecting averaging intervals, *Izv. Math.*, 1997, vol. 61, no. 1, pp. 183–205. doi: 10.1070/im1997v061n01ABEH000110 .
4. Subbotin Yu.N. On the relations between finite differences and the corresponding derivatives, *Amer. Math. Soc. Translations*, 1967, pp. 23–42.
5. Subbotin Yu.N. Interpolation by functions with n-th derivative of minimum norm, *Amer. Math. Soc. Translations*, 1969, pp. 31–63.
6. Shevaldin V.T. Some problems of extremal interpolation in the mean, *Soviet Math. Dokl.*, 1982. vol. 26, no. 3, pp. 710–712.
7. Shevaldin V.T. Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1985. vol. 164, pp. 233–273.
8. Abramovitz M., Stegun I.A. (eds.) *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Washington: National Bureau of Standards, 1972. 1046 p. Translated to Russian under the title *Spravochnik po spestialnym funktsiyam s formulami, grafikami i tablitsami.* Moscow: Nauka Publ., 1979, 932 p.

9. Bateman H., Erdélyi A. *Higher transcendental functions*. Vol. 1. N Y: McGraw-Hill, 1953, 302 p. Translated to Russian under the title *Vysshie transtsendentnye funktsii. Gipergeometricheskaya funktsiya. Funktsii Lezhandra*. Moscow: Nauka Publ., 1965, 296 p.
10. Dilcher K. Bernoulli and Euler polynomials. *NIST handbook of mathematical functions*, Washington: U.S. Dept. Commerce, 2010. pp. 587–599. Available at: https://dlmf.nist.gov/24 .
11. Korneichuk N. *Exact constants in approximation theory*, Cambridge: Cambridge University Press, 1991, 452 p.
12. Volkov Yu.S., Subbotin Yu.N. Fifty years of Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, Suppl. 1, pp. 222–237. doi: 10.1134/S0081543815020236 .
13. Prudnikov A.P., Brychkov A.Yu., Marichev O.L. *Integrals and series. Vol. 1: Elementary functions*. Boca Raton: CRC Press, 1998, 798 p. Original Russian text published in Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. T. 1. Elementarnye funktsii. Moscow: Fizmatlit Publ., 2002, 632 p.
14. Volkov Yu.S. On one problem of extremal functional interpolation and Favard constants, *Dokl. Math.*, 2020, vol. 495, pp. 29–32 (in Russian). doi: 10.31857/S2686954320060193 .
15. Volkov Yu.S. Efficient computation of Favard constants and their connection to Euler polynomials and numbers, *Siberian Electronic Math. Reports*, 2020, vol. 17, pp. 1921–1942. doi: 10.33048/semi.20.20.17.129 .
16. Schoenberg I.J. Cardinal interpolation and spline functions, *J. Approx. Theory*, 1969, vol. 2, no. 2, pp. 167–206.

Received June 5, 2020
Revised November 1, 2020
Accepted November 9, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (state contract no. 0314-2016-0013), and partially by the Russian Foundation for Basic Research and the German Research Foundation (project no. 19-51-12008).

Yuriy Stepanovich Volkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: volkov@math.nsc.ru .

Cite this article as: Yu. S. Volkov. Euler polynomials in the problem of extremal functional interpolation in the mean, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 83–97 .