ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 4 2020

УДК 517.5

ГРАНИЦЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ КОНСТАНТ НИКОЛЬСКОГО В L^p С ВЕСОМ ГЕГЕНБАУЭРА[1]

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов

Мы изучаем границы и асимптотическое поведение при $n \to \infty$ точной константы Никольского в неравенстве $\|u\|_\infty \le \mathcal{C}_\alpha(n)\|u\|_p$ для тригонометрических и алгебраических полиномов степени не больше n в пространстве L^p на $(-\pi,\pi]$ с периодическим весом Гегенбауэра $|\sin x|^{2\alpha+1}$ и на $[-1,1]$ с алгебраическим весом Гегенбауэра $(1-x^2)^\alpha$ соответственно. Мы доказываем, что при $p \ge 1$ и всех $\alpha \ge -1/2$ имеем $\mathcal{C}_\alpha(n) \sim \mathcal{L}_p n^{(2\alpha+2)/p}$, где $\mathcal{L}_p$ — точная константа Никольского для целых функций экспоненциального типа не больше 1 в пространстве L^p на $\mathbb{R}$ со степенным весом $|x|^{2\alpha+1}$. Более того, мы даем явные границы вида

$$n^{(2\alpha+2)/p}\mathcal{L}_p \le \mathcal{C}_\alpha(n) \le (n+2s_{p,\alpha})^{(2\alpha+2)/p}\mathcal{L}_p, \quad n \ge 0,$$

из которых вытекает данная асимптотика. Эти границы позволяют уточнять известные оценки констант Никольского. Мы рассматриваем такой подход на примере алгебраической константы Никольского при $\alpha = 0$. Здесь применяется характеризация экстремальных полиномов из работ Д. Амира и З. Зиглера, В. В. Арестова и М. В. Дейкаловой. Наши утверждения обобщают известные результаты С. Б. Стечкина ($p = 1$) и Е. Левина и Д. Любинского ($p > 0$) в тригонометрическом случае при $\alpha = -1/2$, и М. И. Ганзбург в алгебраическом случае при $\alpha = 0$. Для полуцелых $\alpha = d/2 - 1$ и $p \ge 1$ наша асимптотика может быть выведена из асимптотики многомерной константы Никольского для сферических полиномов в пространстве L^p на сфере $\mathbb{S}^d$, доказанной Ф. Даи, Д. Горбачевым и С. Тихоновым. Наше доказательство значительно проще, однако оно не охватывает случай $p < 1$.

Ключевые слова: неравенство Никольского, точная константа, асимптотика, тригонометрический полином, алгебраический полином, целая функция экспоненциального типа, вес Гегенбауэра.

D. V. Gorbachev, I. A. Mart'yanov. Bounds of the Nikol'skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight.

We study bounds and the asymptotics behavior as $n \to \infty$ of the sharp Nikol'skii constant in the inequality $\|u\|_\infty \le \mathcal{C}_\alpha(n)\|u\|_p$ for trigonometric and algebraic polynomials of degree at most n in the space L^p on $(-\pi,\pi]$ with periodic Gegenbauer weight $|\sin x|^{2\alpha+1}$ and on $[-1,1]$ with algebraic Gegenbauer weight $(1-x^2)^\alpha$, respectively. We prove that for $p \ge 1$ and all $\alpha \ge -1/2$ we have $\mathcal{C}_\alpha(n) \sim \mathcal{L}_p n^{(2\alpha+2)/p}$, where $\mathcal{L}_p$ is the sharp Nikol'skii constant for entire functions of exponential type at most 1 in the space L^p on $\mathbb{R}$ with the power weight $|x|^{2\alpha+1}$. Moreover, we give explicit bounds of the form

$$n^{(2\alpha+2)/p}\mathcal{L}_p \le \mathcal{C}_\alpha(n) \le (n+2s_{p,\alpha})^{(2\alpha+2)/p}\mathcal{L}_p, \quad n \ge 0,$$

from which the given asymptotics follows. These bounds allow one to refine the known estimates of the Nikol'skii constants. We consider such approach using the example of the algebraic Nikol'skii constant for $\alpha = 0$. Here we apply the characterization of the extremal polynomials from the works of D. Amir and Z. Ziegler, V. Arestov and M. Deikalova. Our statements generalize the known results of S. B. Stechkin ($p = 1$), E. Levin and D. Lubinsky ($p > 0$) in the trigonometric case for $\alpha = -1/2$, and M. I. Ganzburg in the algebraic case for $\alpha = 0$. For half-integer $\alpha = d/2 - 1$ and $p \ge 1$, our asymptotics can be derived from the asymptotic of the multidimensional Nikol'skii constant for spherical polynomials in the space L^p on the sphere $\mathbb{S}^d$ proved by F. Dai, D. Gorbachev, and S. Tikhonov. Our proof is much simpler, but it does not cover the case $p < 1$.

Keywords: Nikol'skii inequality, sharp constant, asymptotic behavior, trigonometric polynomial, algebraic polynomial, entire function of exponential type, Gegenbauer weight.

MSC: 41A17, 42B10

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-126-137

[1]Работа Д.В. Горбачева выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре. Исследование И.А. Мартьянова выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90152.

1. Введение

Пусть $p \in (0,\infty]$, Q — некоторое пространство с положительной мерой $d\rho(x) = v(x)\,dx$, где v — вес, $L^p_v(Q)$ — пространство Лебега измеримых функций $f\colon Q \to \mathbb{C}$ с конечной нормой (квазинормой при $p < 1$)

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_Q |f(x)|^p v(x)\,dx\right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in Q} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

$L^p(Q) = L^p_1(Q)$ в безвесовом случае. Обозначения c, C (константы), $\sim$, $\asymp$ (асимптотики), $\lceil a\rceil$ (наименьшее целое, не меньшее a) имеют свой обычный смысл.

Пусть $p \in (0,\infty)$, Y — некоторое множество функций, имеющее непустое пересечение с $L^p_v(Q)$. Изучается точная константа

$$\mathcal{C}(Y, L^p_v(Q)) = \sup_{u\in(Y\cap L^p_v(Q))\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_p}$$

в неравенстве Никольского разных метрик $\|u\|_\infty \le C\|u\|_p$. Также введем “слабую” константу Никольского

$$\tilde{\mathcal{C}}(Y, L^p_v(Q), x_0) = \sup_{u\in(Y\cap L^p_v(Q))\setminus\{0\}} \frac{|u(x_0)|}{\|u\|_p},$$

где $x_0 \in Q$ — некоторая фиксированная точка. Если Q — однородное пространство с инвариантной относительно группы движений G мерой $d\rho$ и Y инвариантно относительно G, то введенные константы совпадают для любой точки x_0. В общей ситуации доказательство этого факта является проблемой. Частично она решается при наличии положительного оператора обобщенного сдвига с нужными свойствами (см., например, [3; 13; 19]).

Неравенства типа Никольского возникают в разных вопросах теории приближений и гармонического анализа. Им посвящено большое число работ, в частности [16; 21] (тор $Q = \mathbb{T}^d$), [7; 17] (сфера $Q = \mathbb{S}^d$), [22; 23] (общие многообразия Q). Обзор одномерных результатов можно найти в [20]. Суммируем нужные нам сведения.

Пусть Q — компактное пространство размерности $d \in \mathbb{N}$, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — семейство подпространств полиномов с растущей размерностью $\dim Y_n$. Спрашивается, чему равно асимптотическое поведение величины $\mathcal{C}_p(n) = \mathcal{C}(Y_n, L^p_v(Q))$ при $n \to \infty$.

Типичной является асимптотика вида $\mathcal{C}_p(n) \asymp (\dim Y_n)^{c/p}$, где $c > 0$. Например, она возникает при оценке с помощью L^2-нормы воспроизводящего ядра подпространства Y_n. Если $\dim Y_n \sim c_d n^d$ и $c = 1$, то асимптотика приобретает более привычный вид $\mathcal{C}_p(n) \asymp n^{d/p}$.

В весовом случае можно отметить результаты, посвященные не быстро растущим весам v, удовлетворяющим условию удвоения $v(2B) \le Cv(B)$, $\forall\, B \subset Q$. Например, для сферы $\mathbb{S}^d$ имеем $\mathcal{C}_p(n) \asymp n^{c_v d/p}$, где $c_1 = 1$ (см. [7, (5.5.1)]).

Особый интерес представляет доказательство более сильной асимптотики $\mathcal{C}_p(n) \sim \mathcal{L}_p n^{c_v d/p}$ с некоторой константой $\mathcal{L}_p$. Наверное, один из первых результатов в данном направлении получен С. Б. Стечкиным (см. [24]). Пусть $\mathbb{T} = (-\pi,\pi]$ — одномерный тор и $\mathcal{T}_n$ — множество комплекснозначных 2π-периодических тригонометрических полиномов порядка не выше n. Тогда существует константа $c > 0$, такая что

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}_n, L^1(\mathbb{T})) = cn + o(n), \quad n \to \infty.$$

Пусть $\mathcal{E}_\sigma$ — множество целых функций экспоненциального типа не больше $\sigma > 0$. В работе [12] было показано, что $c = \mathcal{C}(\mathcal{E}_1, L^1(\mathbb{R}))$. Для произвольного $p \in (0,\infty)$ Е. Левин и Д. Любинский [18] доказали, что

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}_n, L^p(\mathbb{T})) \sim \mathcal{L}_p n^{1/p}, \quad \mathcal{L}_p = \mathcal{C}(\mathcal{E}_1, L^p(\mathbb{R})).$$

Отметим еще статью [11], где предложено другое доказательство и рассмотрен более общий случай констант Бернштейна — Никольского.

В нашей работе [15] (см. также [12] для $p = 1$) результат Левина и Любинского уточнен в том плане, что установлены неравенства

$$n^{1/p}\mathcal{L}_p \le \mathcal{C}(\mathcal{T}_n, L^p(\mathbb{T})) \le \Big(n + \Big\lceil \frac{1}{p} \Big\rceil\Big)^{1/p}\mathcal{L}_p, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad p \in (0, \infty). \tag{1.1}$$

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество комплекснозначных алгебраических полиномов степени не выше n. М. И. Ганзбург [8, теорема 1.4] перенес результат Левина и Любинского на алгебраические полиномы: для $p \in (0, \infty)$

$$\mathcal{C}(\mathcal{P}_n, L^p([-1, 1])) \sim \mathcal{L}_p n^{2/p}, \quad \mathcal{L}_p = \mathcal{C}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L_x^p(\mathbb{R}_+)), \tag{1.2}$$

где «even» означает подмножество четных функций. Отметим, что в [8] допущена неточность, не позволяющая утверждать справедливость данного утверждения при $p < 1$. Мы поправим эту неточность в разд. 3.

Многомерные результаты типа Левина и Любинского доказаны в работах [6] (сфера $\mathbb{S}^d$), [9] (тор $\mathbb{T}^d$); см. также [10], где рассмотрена алгебраическая константа Маркова — Никольского. Пусть Π_n^d — множество сферических полиномов степени не выше n (сужений алгебраических полиномов $d + 1$-переменных степени не выше n на сферу), $\mathcal{E}_\sigma^d$ — множество целых функций им $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ экспоненциального сферического типа не выше σ. Тогда [6]

$$\mathcal{C}(\Pi_n^d, L^p(\mathbb{S}^d)) \sim \mathcal{L}_p n^{d/p}, \quad \mathcal{L}_p = \mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d)). \tag{1.3}$$

Если $\mathcal{T}_n^d$ — множество комплекснозначных 2π-периодических тригонометрических полиномов d-переменных со спектром в шаре радиуса $n \ge 0$ и центром в нуле, то с той же константой $\mathcal{L}_p$ [9, теорема 1.3]

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}_n^d, L^p(\mathbb{T}^d)) \sim \mathcal{L}_p n^{d/p}.$$

Пусть ω_d — площадь сферы $\mathbb{S}^d$. В. В. Арестов и М. В. Дейкалова [2, теорема 2] при $p \in [1, \infty)$ доказали равенство

$$\mathcal{C}(\Pi_n^d, L^p(\mathbb{S}^d)) = \omega_{d-1}^{-1/p}\mathcal{C}(\mathcal{P}_n, L^p_{(1-x^2)^{d/2-1}}([-1, 1])).$$

Из [5, теорема 4.2] следует, что для $p \in [1, \infty)$

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d)) = \omega_{d-1}^{-1/p}\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p_{x^{d-1}}(\mathbb{R}_+)).$$

Из этих равенств и (1.3) выводим, что для полуцелого $\alpha = d/2 - 1 \ge -1/2$ имеем

$$\mathcal{C}(\mathcal{P}_n, L^p_{(1-x^2)^\alpha}([-1, 1])) \sim n^{(2\alpha+2)/p}\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p_{x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+)), \tag{1.4}$$

что обобщает (1.2) для $p \in [1, \infty)$ на случай алгебраического веса Гегенбауэра $(1 - x^2)^\alpha$.

Возникает вопрос о справедливости асимптотики (1.4) для произвольных $\alpha \ge -1/2$ и $p \in (0, \infty)$. При $\alpha = -1/2$ для веса Чебышева $(1 - x^2)^{-1/2}$ он решается положительно на основе неравенств (1.1). В безвесовых пространствах $L^p(\mathbb{T})$, $L^p(\mathbb{R})$ можно рассмотреть четную составляющую функции, поэтому константу Никольского достаточно искать на четных функциях. Это позволяет стандартно свести тригонометрическую задачу к алгебраической. В результате получаем следствие неравенств (1.1).

Следствие 1. *При всех $p \in (0, \infty)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$n^{1/p} \le \frac{\mathcal{C}(\mathcal{T}_n, L^p(\mathbb{T}))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1, L^p(\mathbb{R}))} = \frac{\mathcal{C}(\mathcal{P}_n, L^p_{(1-x^2)^{-1/2}}([-1, 1]))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p(\mathbb{R}_+))} \le \Big(n + \Big\lceil \frac{1}{p} \Big\rceil\Big)^{1/p}.$$

Далее мы ответим на вопрос о границах и асимптотике константы Никольского для всех $\alpha > -1/2$ и $p \ge 1$. Для этого вначале получим оценки "слабых" констант Никольского, причем уже при всех $p > 0$.

Наряду с алгебраическим случаем нам потребуется тригонометрическая константа Никольского для периодического веса Гегенбауэра $|\sin x|^{2\alpha+1}$, изученная в работе [19]. Пусть $p \in [1, \infty)$, $\alpha \ge -1/2$. В [19, теорема 1] (см. также [3, теорема 1] для случая $[-1, 1]$) доказано, что

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathcal{T}_n, L^p_{|\sin x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{T})) &= \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{T}_n^{\mathrm{even}}, L^p_{|\sin x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{T}), 0) \\ &= 2^{-1/p}\mathcal{C}(\mathcal{P}_n, L^p_{(1-x^2)^\alpha}([-1, 1])) \\ &= 2^{-1/p}\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{P}_n, L^p_{(1-x^2)^\alpha}([-1, 1]), 1). \end{aligned} \tag{1.5}$$

В [13, теорема 1, (10)] (см. также [4, теорема 2] для случая $\mathbb{R}_+$) установлено, что

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathcal{E}_1, L^p_{|x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{R})) &= \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p_{|x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}), 0) \\ &= 2^{-1/p}\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p_{x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+)) \\ &= 2^{-1/p}\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p_{x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+), 0). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Сформулируем первый основной результат.

Теорема. *Пусть $p \in (0, \infty)$, $\alpha > -1/2$ и*

$$\tilde{A}_{p,\alpha}(n) = \frac{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{T}_n, L^p_{|\sin x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{T}), 0)}{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_1, L^p_{|x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}), 0)} \quad \text{или} \quad \tilde{A}_{p,\alpha}(n) = \frac{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{P}_n, L^p_{(1-x^2)^\alpha}([-1, 1]), 1)}{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p_{x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+), 0)}.$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$n^{(2\alpha+2)/p} \le \tilde{A}_{p,\alpha}(n) \le (n + 2s_{p,\alpha})^{(2\alpha+2)/p},$$

где $s_{p,\alpha} = \left\lceil \dfrac{\alpha + 3/2}{p} \right\rceil$.

Отсюда и из равенств (1.5), (1.6) немедленно получаем второй основной результат.

Следствие 2. *Для $p \in [1, \infty)$, $\alpha > -1/2$ и всех $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$n^{(2\alpha+2)/p} \le A_{p,\alpha}(n) \le (n + 2s_{p,\alpha})^{(2\alpha+2)/p},$$

где

$$A_{p,\alpha}(n) = \frac{\mathcal{C}(\mathcal{T}_n, L^p_{|\sin x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{T}))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1, L^p_{|x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}))} = \frac{\mathcal{C}(\mathcal{P}_n, L^p_{(1-x^2)^\alpha}([-1, 1]))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p_{x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+))}.$$

Данный результат обобщает следствие 1 на случай $p \ge 1$. Для полуцелых α следствие 2 дает представление об остаточном члене в многомерной асимптотике (1.3). Доказательство теоремы значительно проще по сравнению с многомерным вариантом [6], где применялись нетривиальные результаты из гармонического анализа на сфере. Однако при этом охватывается только случай $p \ge 1$. Случай $p < 1$ в следствии 2 остается открытым, кроме алгебраической константы при $\alpha = 0$ (см. разд. 3).

2. Доказательство теоремы

Воспользуемся схемой доказательства из нашей работы [15]. Пусть $p \in (0, \infty)$, $\alpha \ge -1/2$. Обозначим для краткости

$$\nu = 2\alpha + 1 \ge 0.$$

Основная сложность состоит в доказательстве неравенств в тригонометрическом случае

$$n^{(\nu+1)/p} \le \frac{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{T}_n, L^p_{|\sin x|^\nu}(\mathbb{T}), 0)}{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_1, L^p_{|x|^\nu}(\mathbb{R}), 0)} \le (n + 2s_{p,\alpha})^{(\nu+1)/p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad s_{p,\alpha} = \left\lceil \frac{1 + \nu/2}{p} \right\rceil.$$

2.1. Оценка снизу

Для $n = 0$ оценка снизу очевидна, поэтому пусть $n \geq 1$ и $f \neq 0$ — произвольная функция из класса $\mathcal{E}_1 \cap L^p_{|x|^\nu}(\mathbb{R})$. Степенной вес $|x|^\nu$ на оси является частным случаем веса Данкля, поэтому по неравенству Никольского [14, теорема 7.1] заключаем, что f ограничена на оси.

Рассмотрим интегральное ядро Фейера $\varphi(x) = \Big(\dfrac{\sin(x/2)}{x/2}\Big)^2$. Преобразование Фурье φ равно

$$\widehat{\varphi}(y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-ixy}\,dx = \max\{1-|y|, 0\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Как известно, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x+2\pi k) = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$, что следует из формулы суммирования Пуассона:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x+2\pi k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(k)e^{ikx} = \widehat{\varphi}(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi k) = 1.$$

Положим $g(x) = f(nx)\varphi(x)$. Тогда $g \in \mathcal{E}_{n+1}$ и $g(x) = O(x^{-2})$ при $x \to \pm\infty$. Отсюда следует, что преобразование Фурье $\widehat{g}$ функции g непрерывно на оси и по теореме Пэли — Винера $\widehat{g}(y) = 0$ при $|y| \geq n+1$. Поэтому для периодизации функции g имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x+2\pi k) = \sum_{|k|\leq n} \widehat{g}(k)e^{ikx} = T(x), \quad T \in \mathcal{T}_n.$$

Оценим сверху весовую норму полинома T

$$A = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |T(x)|^p |\sin x|^\nu\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x+2\pi k)\Big|^p |\sin x|^\nu\,dx,$$

где

$$\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x+2\pi k)\Big|^p \leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|\varphi(x+2\pi k)\Big)^p = B.$$

Покажем, что $B \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|^p$. При $p < 1$ имеем

$$B \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|^p \varphi^p(x+2\pi k) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|^p.$$

При $p \geq 1$ по неравенству Гёльдера

$$B \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|^p \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^{p'}(x+2\pi k)\Big)^{p/p'} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|^p,$$

где мы воспользовались оценкой

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^q(x+2\pi k)\Big)^{1/q} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x+2\pi k) = 1, \quad q \geq 1.$$

Таким образом,

$$A \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|^p |\sin x|^\nu\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{2\pi n(k-1/2)}^{2\pi n(k+1/2)} |f(x)|^p |\sin(x/n)|^\nu\,dx$$
$$= \frac{1}{n}\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |\sin(x/n)|^\nu\,dx \leq \frac{1}{n^{\nu+1}}\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^\nu\,dx.$$

Отсюда и из

$$T(0)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2\pi kn)\varphi(2\pi k)=f(0)$$

получаем

$$n^{(\nu+1)/p}\,\frac{f(0)}{\|f\|_{L^p_{|x|^\nu}(\mathbb{R})}}\le\frac{T(0)}{\|T\|_{L^p_{|\sin x|^\nu}(\mathbb{T})}}\le\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{T}_n,L^p_{|\sin x|^\nu}(\mathbb{T}),0),$$

что в силу произвольности f влечет искомую оценку снизу.

2.2. Оценка сверху

Пусть $n\ge 0$ и $T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}$ — произвольный полином. Ясно, что $T\in\mathcal{E}_n$.

В этот раз возьмем ядро Фейера $\psi(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$, и пусть $s\ge 1$ — целое число, которое выберем потом. Положим $g(x)=\psi^s(x)T(x)$. Тогда $g\in\mathcal{E}_{n+2s}$.

Оценим сверху весовую норму g. На оси имеем

$$|g(x)|^p|x|^\nu=|\psi^s(x)T(x)|^p|x|^\nu=|T(x)|^p|\sin x|^\nu\left|\frac{\sin x}{x}\right|^{2sp-\nu}=|T(x)|^p|\sin x|^\nu\psi^{sp-\nu/2}(x),$$

поэтому

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}}|g(x)|^p|x|^\nu\,dx&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_{2\pi(k-1/2)}^{2\pi(k+1/2)}|T(x)|^p|\sin x|^\nu\psi^{sp-\nu/2}(x)\,dx\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|T(x+2\pi k)|^p|\sin(x+2\pi k)|^\nu\psi^{sp-\nu/2}(x+2\pi k)\,dx\\&=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^p|\sin x|^\nu\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi^{sp-\nu/2}(x+2\pi k)\,dx.\end{aligned}$$

Теперь выберем наименьшее s такое, что $sp-\nu/2\ge 1$. Тогда $s=\left\lceil\dfrac{1+\nu/2}{p}\right\rceil$ и

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi^{sp-\nu/2}(x+2\pi k)\le\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(x+2\pi k)\Big)^{sp-\nu/2}.$$

Так как ψ — положительно определенная функция, то ее периодизация также будет положительно определенной функцией, поэтому для всех $x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(x+2\pi k)\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(2\pi k)=\psi(0)=1.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{R}}|g(x)|^p|x|^\nu\,dx\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^p|\sin x|^\nu\,dx.$$

Сделаем замену $g(x)=f((n+2s)x)$. Тогда $f\in\mathcal{E}_1$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|^p|x|^\nu\,dx=(n+2s)^{\nu+1}\int\limits_{\mathbb{R}}|g(x)|^p|x|^\nu\,dx\le(n+2s)^{\nu+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^p|\sin x|^\nu\,dx$$

и $f(0) = g(0) = T(0)$. Следовательно,

$$\frac{T(0)}{\|T\|_{L^p_{|\sin x|^\nu}(\mathbb{T})}} \le (n+2s)^{(\nu+1)/p} \frac{f(0)}{\|f\|_{L^p_{|x|^\nu}(\mathbb{R})}} \le (n+2s)^{(\nu+1)/p} \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_1, L^p_{|x|^\nu}(\mathbb{R}), 0).$$

В силу произвольности T это влечет искомую оценку сверху.

Отметим, что при $\nu = 0$ можно взять ядро Фейера $\left(\dfrac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$. Тогда вместо $n + 2s$ в верхней оценке получим $n + s$, $s = \left\lceil \dfrac{1}{p} \right\rceil$, что сформулировано в следствии 1.

2.3. Алгебраический случай

Если в доказательстве выше ограничиться только четными функциями $f \in \mathcal{E}_1$ и $T \in \mathcal{T}_n$ и затем в весовых нормах перейти соответственно к промежуткам $\mathbb{R}_+$ и $[0,\pi]$, то получим

$$n^{(\nu+1)/p} \le \frac{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{T}_n^{\mathrm{even}}, L^p_{|\sin x|^\nu}([0,\pi]), 0)}{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p_{x^\nu}(\mathbb{R}_+), 0)} \le (n + 2s_{p,\alpha})^{(\nu+1)/p}.$$

Осталось заметить, что четные тригонометрические полиномы T и алгебраические полиномы P той же степени связаны подстановкой $T(x) = P(\cos x)$, для которой тригонометрический вес Гегенбауэра $|\sin x|^\nu$ переходит в алгебраический вес $(1-x^2)^\alpha$, а $T(0)$ в $P(1)$.

Теорема доказана.

3. Уточнения безвесовой алгебраической константы Никольского

Рассмотрим подробнее алгебраическую константу Никольского в случае $\alpha = 0$.

1. Докажем следующее утверждение.

Предложение. *Пусть* $p \in (0,\infty)$, $s_p = \left\lceil \dfrac{3/2}{p} \right\rceil$. *Тогда для всех* $n \in \mathbb{Z}_+$

$$n^{2/p} \le \frac{\mathcal{C}(\mathcal{P}_n, L^p([-1,1]))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p_x(\mathbb{R}_+))} \le (n + 2s_p)^{2/p}.$$

Отсюда, в частности, вытекает асимптотика (1.2) из работы [8, теорема 1.4]. Однако в [8] содержится неточность для $p < 1$. В этой работе доказано, что при $n \to \infty$

$$\frac{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{P}_n, L^p([-1,1]), 1)}{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p_x(\mathbb{R}_+), 0)} \sim n^{2/p}, \quad p > 0.$$

Далее равенство

$$\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p_x(\mathbb{R}_+), 0) = \mathcal{C}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L^p_x(\mathbb{R}_+)), \quad p > 0, \tag{3.7}$$

оригинально доказано при помощи целых функций порядка $1/2$ в безвесовом пространстве $L^p(\mathbb{R})$. Однако для обоснования равенства

$$\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{P}_n, L^p([-1,1]), 1) = \mathcal{C}(\mathcal{P}_n, L^p([-1,1])), \quad p > 0, \tag{3.8}$$

использована ссылка на работу [3], где это утверждение доказано при помощи оператора обобщенного сдвига только для $p \ge 1$. Неясно, как обобщить этот метод на случай $p < 1$.

Приведем простое рассуждение, доказывающее (3.8). Из него, (3.7) и теоремы немедленно вытекает предложение. Пусть далее $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p([-1,1])}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о равенства (3.8). Воспользуемся одной идеей из работы [1]. Нужно показать, что в задаче $\mathcal{C}(\mathcal{P}_n, L^p([-1,1]))$ найдется экстремальный полином $P \in \mathcal{P}_n$ такой, что $\|P\|_\infty = P(1)$.

Пусть P — экстремальный полином, для которого $\|P\|_\infty = P(\lambda)$, где $\lambda \in (-1,1)$. Введем два полинома степени n, отвечающих промежуткам $[-1,\lambda]$ и $[\lambda,1]$:

$$P_1(x) = P\Big(\frac{\lambda-1}{2} + \frac{\lambda+1}{2}\,x\Big), \quad P_2(x) = P\Big(\frac{\lambda+1}{2} + \frac{\lambda-1}{2}\,x\Big).$$

Тогда $\|P_i\|_\infty = P(\lambda) = P_i(1)$, $i = 1,2$. Если $\|P_i\|_\infty > \|P\|_p$, то

$$\|P\|_p^p = \int_{-1}^{\lambda} |P(x)|^p\,dx + \int_{\lambda}^{1} |P(x)|^p\,dx = \frac{\lambda+1}{2}\int_{-1}^{1} |P_1(x)|^p\,dx + \frac{1-\lambda}{2}\int_{-1}^{1} |P_2(x)|^p\,dx > \|P\|_p^p.$$

Следовательно, например, $\|P_1\|_\infty \le \|P\|_p$, и, значит, P_1 — экстремальный полином, для которого $\|P_1\|_\infty = P_1(1)$.

Равенство (3.8) доказано.

2. Применим доказанное выше предложение вместе с характеризацией экстремальных полиномов из [1; 3] для уточнения верхних и нижних границ констант Никольского.

Пусть далее $\mathcal{C}_p(n) = \mathcal{C}(\mathcal{P}_n, L^p([-1,1]))$, $\mathcal{L}_p = \mathcal{C}(\mathcal{E}_1^{\mathrm{even}}, L_x^p(\mathbb{R}_+))$. Из предложения вытекают неравенства

$$\mathcal{L}_p n^{2/p} \le \mathcal{C}_p(n) \le \mathcal{L}_p(n+2s_p)^{2/p}, \quad \frac{\mathcal{C}_p(m)}{(m+2s_p)^{2/p}} \le \mathcal{L}_p \le \frac{\mathcal{C}_p(m)}{m^{2/p}}. \tag{3.9}$$

Другими словами, мы можем использовать одну из констант для оценки другой.

Для алгебраической константы Никольского при $p \ge 1$ известны оценки [20, п. 5.3.1]

$$\frac{\mathcal{C}_p(n)}{n^{2/p}} \le \begin{cases} (p+1)^{1/p} & \text{(a)},\\ \Big(\dfrac{\lceil p\rceil+1}{2^{3/2}}\Big)^{2/p} & \text{(b)}, \end{cases} \tag{3.10}$$

где $n \ge 2$. Они позволяют оценить $\mathcal{L}_p$ сверху. Оценка (a) лучше (b) при всех больших p и хуже при небольших p. Следовательно, при больших p имеем $\mathcal{L}_p \le (p+1)^{1/p}$.

2.1. Из (3.9) при $m = 1$ и $p \ge 3/2$ получаем

$$\frac{\mathcal{C}_p(1)}{3^{2/p}} \le \mathcal{L}_p \le \mathcal{C}_p(1). \tag{3.11}$$

Покажем, что при $p \to \infty$

$$\mathcal{C}_p(1) \sim \Big(\frac{p+1}{(1+\frac{\ln 2p}{2p})(1+\frac{1}{2p})}\Big)^{1/p}. \tag{3.12}$$

Эта оценка не приводит к улучшению (3.10) (a), однако вместе с (3.11) дает информацию о нижней границе.

Для доказательства (3.12) воспользуемся результатами [3, теорема 1, (2.10)] (см. также [1]), из которых следует, что $\mathcal{C}_p(m) = \dfrac{P_m(1)}{\|P_m\|_p}$, где P_m — единственный экстремальный полином степени m с единичным старшим коэффициентом. Все нули P_m простые, расположены на $(-1,1)$, и справедливо соотношение ортогональности

$$\int_{-1}^{1} (Q(x) - Q(1))|P_m(x)|^{p-1}\operatorname{sign} P_m(x)\,dx = 0 \quad \forall\, Q \in \mathcal{P}_m. \tag{3.13}$$

Пусть $P_1(x)=x-a$, где $a=a(p)\in(-1,1)$. Из (3.13) для $Q=P_1$ следует, что

$$\|P_1\|_p^p=P_1(1)\int\limits_{-1}^{1}|P_1(x)|^{p-1}\operatorname{sign}P_1(x)\,dx$$

или

$$\frac{(1+a)^{p+1}+(1-a)^{p+1}}{p+1}=(1-a)\,\frac{-(1+a)^p+(1-a)^p}{p}.$$

Отсюда $a\in(-1,0)$, и, полагая $b=\dfrac{1+a}{1-a}\in(0,1)$, получаем $\dfrac{b^{p+1}+1}{p+1}=\dfrac{-b^p+1}{p}$ или

$$pb^{p+1}+(p+1)b^p=1.$$

При $p\to\infty$ величина $b=b(p)\to 1-$, что следует из

$$1=pb^{p+1}+(p+1)b^p\sim 2pb^{p+1}\quad\text{и}\quad b^p\sim\frac{1}{2p},\quad \ln b\sim-\frac{\ln 2p}{p}.$$

В этом случае

$$\ln b\sim b-1\quad\text{и}\quad a=\frac{b-1}{b+1}\sim\frac{b-1}{2}\sim-\frac{\ln 2p}{2p}.$$

Отсюда и из

$$(\mathcal{C}_p(1))^p=\frac{(P_1(1))^p}{\|P_1\|_p^p}=\frac{(p+1)(1-a)^p}{(1+a)^{p+1}+(1-a)^{p+1}}=\frac{p+1}{(1-a)(1+b^{p+1})}<p+1$$

вытекает эквивалентность (3.12).

2.2. Свойства экстремального полинома $P_m(x)=\prod_{i=1}^m(x-a_i)$, $-1<a_1<\ldots<a_m<1$, можно применять для вычисления $\mathcal{C}_p(m)$ при небольших m, решая для a_i систему нелинейных уравнений

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\int\limits_{a_i}^{a_{i+1}}(1-x)x^k(P_m(x))^{p-1}\,dx=0,\quad k=0,1,\ldots,m-1, \tag{3.14}$$

где $a_0=-1$, $a_{m+1}=1$. Она вытекает из (3.13) (см. также [1]) и имеет единственное решение.

При целых p система (3.14) сводится к системе полиномиальных уравнений, которую можно решить стандартными численными методами. В таблице для сравнения приведены верхние оценки константы $\mathcal{L}_p$ при $p=1,2,\ldots,8$, полученные на основе (3.10) (a), (b) и (3.9) для $m=3$ (c) (округление до 4 знаков):

(a)	2	1.7321	1.5874	1.4953	1.4310	1.3831	1.3459	1.3161
(b)	0.5	1.0607	1.2599	1.3296	1.3510	1.3526	1.3459	1.3356
(c)	0.3850	0.9428	1.1450	1.2159	1.2391	1.2433	1.2396	1.2324

Видно, что оценка (c) чуть лучше (a) и (b).

Информация о вкладе авторов. Д.В. Горбачеву принадлежат теорема и разд. 2, работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре; И.А. Мартьянову принадлежит разд. 3, исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90152. Следствия 1, 2 принадлежат обоим авторам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Amir D., Ziegler Z.** Polynomials of extremal L_p-norm on the L_∞-unit sphere // J. Approx. Theory. 1976. Vol. 18. P. 86–98. doi: 10.1016/0021-9045(76)90124-6 .
2. **Арестов В.В., Дейкалова М.В.** Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Том 19, № 2. С. 34–47.
3. **Arestov V., Deikalova M.** Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 4. P. 689–708. doi: 10.1007/s10476-018-0103-6 .
4. **Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth Á.** Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-Line // Anal. Math. 2018. Vol. 44, no. 1. P. 21–42. doi: 10.1007/s10476-018-0103-6 .
5. **Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S.** Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials [e-resource]. 27 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1907.03832 .
6. **Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S.** Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, no. 1. P. 161–185. doi: 10.1007/s11854-020-0084-9 .
7. **Dai F., Xu Y.** Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls. N Y: Springer-Verlag, 2013. 440 p. doi: 10.1007/978-1-4614-6660-4 .
8. **Ganzburg M.I.** Sharp constants in V. A. Markov–Bernstein type inequalities of different metrics // J. Approx. Theory. 2017. Vol. 215. P. 92–105. doi: 10.1016/j.jat.2016.11.007 .
9. **Ganzburg M.I.** Sharp constants of approximation theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii type inequalities // J. Fourier Anal. Appl. 2020. Vol. 26, no. 11. doi: 10.1007/s00041-019-09720-x .
10. **Ganzburg M.I.** Sharp constants of approximation theory. III. Certain polynomial inequalities of different metrics on convex sets // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 252. doi: 10.1016/j.jat.2019.105351 .
11. **Ganzburg M.I., Tikhonov S.Yu.** On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466. doi: 10.1007/s00365-016-9363-1 .
12. **Горбачев Д.В.** Интегральная задача Конягина и (C, L)-константы Никольского // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 72–91.
13. **Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н.** Константы Никольского в пространствах $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ // Чебышевский сб. 2018. Том 19, № 2. С. 67–79. doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-67-79 .
14. **Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu.** Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, no. 3. P. 555–605. doi: 10.1007/s00365-018-9435-5 .
15. **Горбачев Д.В., Мартьянов И.А.** О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сб. 2018. Том 19, № 2. С. 80–89. doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-80-89 .
16. **Ибрагимов И.И.** Экстремальные задачи в классе тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1958. Том 121, № 3. С. 415–417.
17. **Камзолов А.И.** О приближении функций на сфере S^n // Сердика. 1984. Том 84, № 1. С. 3–10.
18. **Levin E., Lubinsky D.** Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 3. P. 459–468. doi: 10.1007/s40315-015-0113-3 .
19. Мартьянов И.А. Константа Никольского для тригонометрических полиномов с периодическим весом Гегенбауэра // Чебышевский сб. 2020. Том 21, № 1. С. 247–258. doi: 10.22405/2226-8383-2020-21-1-226-237 .
20. **Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M.** Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publ. Co., 1994. 836 p.
21. **Никольский С.М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.
22. **Nursultanov E., Ruzhansky M., Tikhonov S.** Nikolskii inequality and Besov, Triebel–Lizorkin, Wiener and Beurling spaces on compact homogeneous manifolds // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 2016. Vol. XVI, no. 3. P. 981–1017. doi: 10.2422/2036-2145.201412_008 .

23. **Pesenson I.** Bernstein–Nikolskii inequalities and Riesz interpolation formula on compact homogeneous manifolds // J. Approx. Theory. 2008. Vol. 150, no. 2. P. 175–198. doi: 10.1016/j.jat.2007.06.001 .
24. **Тайков Л.В.** Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 3. С. 205–211.

Поступила 13.09.2020
После доработки 2.11.2020
Принята к публикации 9.11.2020

Горбачев Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург;
Тульский государственный университет г. Тула
e-mail: dvgmail@mail.ru

Мартьянов Иван Анатольевич
аспирант
Тульский государственный университет
г. Тула
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

REFERENCES

1. Amir D., Ziegler Z. Polynomials of extremal L_p-norm on the L_∞-unit sphere. *J. Approx. Theory*, 1976, vol. 18, pp. 86–98. doi: 10.1016/0021-9045(76)90124-6 .
2. Arestov V.V., Deikalova M.V. Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, pp. 9–23. doi: 10.1134/S0081543814020023 .
3. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval. *Comput. Methods Funct. Theory*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 689–708. doi: 10.1007/s10476-018-0103-6 .
4. Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth Á. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-Line. *Anal. Math.*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 21–42. doi: 10.1007/s10476-018-0103-6 .
5. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials [e-resource], 27 p. Available at: *arXiv*:1907.03832 .
6. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere. *J. d'Anal. Math.*, 2020, vol. 140, no. 1, pp. 161–185. doi: 10.1007/s11854-020-0084-9 .
7. Dai F., Xu Y. *Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls.* N Y: Springer-Verlag, 2013. doi: 10.1007/978-1-4614-6660-4 .
8. Ganzburg M.I. Sharp constants in V. A. Markov–Bernstein type inequalities of different metrics. *J. Approx. Theory*, 2017, vol. 215, pp. 92–105. doi: 10.1016/j.jat.2016.11.007 .
9. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii type inequalities. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2020, vol. 26, no. 11. doi: 10.1007/s00041-019-09720-x .
10. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. III. Certain polynomial inequalities of different metrics on convex sets. *J. Approx. Theory*, 2020, vol. 252. doi: 10.1016/j.jat.2019.105351 .
11. Ganzburg M.I., Tikhonov S.Yu. On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities. *Constr. Approx.*, 2017, vol. 45, no. 3, pp. 449–466. doi: 10.1007/s00365-016-9363-1 .
12. Gorbachev D.V. An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii. *Proc. Steklov Inst. Math. Suppl.*, 2005, vol. 2, pp. S117–S138.
13. Gorbachev D.V., Dobrovolskii N.N. Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ spaces. *Chebyshevskii Sbornik*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 67–79. doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-67-79 .
14. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications. *Constr. Approx.*, 2019, vol. 49, no. 3, pp. 555–605. doi: 10.1007/s00365-018-9435-5 .

15. Gorbachev D.V., Martyanov I.A. On interrelation of Nikolskii constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type. *Chebyshevskii Sbornik*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 80–89 (in Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-80-89 .
16. Ibragimov I.I. Extremum problems in the class of trigonometric polynomials. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 121, no. 3, pp. 415–417 (in Russian).
17. Kamzolov A.I. Approximation of functions on the sphere S^n. *Serdica*, 1984, vol. 84, no. 1, pp. 3–10 (in Russian).
18. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle. *Comput. Methods Funct. Theory*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 459–468. doi: 10.1007/s40315-015-0113-3 .
19. Martyanov I.A. Nikolskii constant for trigonometric polynomials with periodic Gegenbauer weight. *Chebyshevskii Sbornik*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 247–258 (in Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2020-21-1-247-258 . (in Russian)
20. Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M. *Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros.* Singapore: World Scientific Publ. Co., 1994, 821 p. ISBN: 981-02-0499-X .
21. Nikol'skii S.M. Inequalities for entire functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of several variables. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 1951, vol. 38, pp. 244–278 (in Russian).
22. Nursultanov E., Ruzhansky M., Tikhonov S. Nikolskii inequality and Besov, Triebel–Lizorkin, Wiener and Beurling spaces on compact homogeneous manifolds. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 2016, vol. 16, no. 3, pp. 981–1017. doi: 10.2422/2036-2145.201412_008 .
23. Pesenson I. Bernstein – Nikolskii inequalities and Riesz interpolation formula on compact homogeneous manifolds. *J. Approx. Theory*, 2008, vol. 150, no. 2, pp. 175–198. doi: 10.1016/j.jat.2007.06.001 .
24. Taikov L.V. A group of extremal problems for trigonometric polynomials. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 1965, vol. 20, no. 3(123), pp. 205–211 (in Russian).

Received September 13, 2020
Revised November 2, 2020
Accepted November 9, 2020

Funding Agency: The work of D.V. Gorbachev was supported as part a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center. The work of I.A. Martyanov was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-31-90152).

Dmitry Viktorovich Gorbachev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Tula State University, Tula, 300012 Russia, e-mail: dvgmail@mail.ru .

Ivan Anatol'evich Martyanov, doctoral student, Tula State University, Tula, 300012 Russia, e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru .

Cite this article as: D. V. Gorbachev, I. A. Mart'yanov. Bounds of the Nikol'skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 126–137 .