ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 512.554.3

НЕАССОЦИАТИВНЫЕ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБР ШЕВАЛЛЕ[1]

В. М. Левчук, Г. С. Сулейманова, Н. Д. Ходюня

Произвольную алгебру R называем *точной обертывающей* алгебры Ли L, если L изоморфна алгебре $R^{(-)}$, полученной заменой умножения в R коммутированием $a * b := ab - ba$. Мы исследуем точные обертывающие алгебры некоторых подалгебр алгебры Шевалле над полем K, ассоциированной с неразложимой системой корней Φ. Структурные константы базы Шевалле этой алгебры определяет их выбор с известным произволом для *нильтреугольной* подалгебры $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$. Построенные в 2018 г. точные обертывающие алгебры R для $N\Phi(K)$ зависят от этого выбора. Введено понятие стандартной обертывающей алгебры. Для типа A_{n-1} одну из точных обертывающих R представляет алгебра $NT(n,K)$ нильтреугольных $n \times n$-матриц над K. Стандартность R в этом случае дает теорема Р. Дюбиша и С. Перлиса (1951) об идеалах алгебры $NT(n,K)$. В статье доказано, что ассоциативная точная обертывающая алгебра R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} $(n > 3)$, с точностью до перехода к противоположной алгебре $R^{(op)}$, единственна и изоморфна алгебре $NT(n,K)$. Описаны стандартные обертывающие алгебры R. Доказано существование стандартной обертывающей R для алгебр Ли $N\Phi(K)$ всех типов Φ, исключая типы D_n $(n \geq 4)$ и E_n $(n = 6, 7, 8)$.

Ключевые слова: алгебра Ли, точная обертывающая алгебра, алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра, стандартный идеал.

V. M. Levchuk, G. S. Suleimanova, N. D. Khodyunya. Nonassociative enveloping algebras of Chevalley algebras.

An algebra R is said to be an *exact enveloping algebra* for a Lie algebra L if L is isomorphic to the algebra $R^{(-)}$ obtained by replacing the multiplication in R by the commutation: $a * b := ab - ba$. We study exact enveloping algebras of certain subalgebras of a Chevalley algebra over a field K associated with an indecomposable root system Φ. The structure constants of the Chevalley basis of this algebra are chosen with a certain arbitrariness for the *niltriangular* subalgebra $N\Phi(K)$ with the basis $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$. The exact enveloping algebras R for $N\Phi(K)$, which were found in 2018, depend on this choice. The notion of standard enveloping algebra is introduced. For the type A_{n-1}, one of the exact enveloping algebras R is the algebra $NT(n,K)$ of all niltriangular $n \times n$ matrices over K. The theorem of R. Dubish and S. Perlis on the ideals of $NT(n,K)$ states that R is standard in this case. We prove that an associative exact enveloping algebra R of a Lie algebra $NT(n,K)$ of type A_{n-1} $(n > 3)$ is unique and isomorphic to $NT(n,K)$ up to passing to the opposite algebra $R^{(\mathrm{op})}$. Standard enveloping algebras R are described. The existence of a standard enveloping algebra is proved for the Lie algebras $N\Phi(K)$ of all types excepting D_n $(n \geq 4)$ and E_n $(n = 6, 7, 8)$.

Keywords: Lie algebra, exact enveloping algebra, Chevalley algebra, niltriangular subalgebra, standard ideal.

MSC: 17B05, 17B30

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-91-100

Введение

Классические универсальные ассоциативные обертывающие алгебры для алгебр Ли хорошо известны (см., например, теорему Пуанкаре — Биркгофа — Витта [1, гл. 1, § 1, пример (b)]).

О п р е д е л е н и е. Произвольную (не обязательно ассоциативную) алгебру R называем *точной обертывающей* алгебры Ли L, если L изоморфна алгебре $R^{(-)}$, полученной заменой умножения в R коммутированием $a * b := ab - ba$. (Без термина это понятие введено в [2].)

Алгебры R и L в этом случае можем определять структурными константами одной и той же базы в отличие от универсальной ассоциативной обертывающей алгебры Ли.

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Простую комплексную конечномерную алгебру Ли L в теории Картана — Киллинга ассоциируют с единственной (с точностью до эквивалентности) неразложимой системой корней Φ. Подходящая база подалгебры Картана и элементы e_r $(r \in \Phi)$ дают базу Шевалле алгебры Ли $L = \mathcal{L}(\Phi, C)$ с целочисленными структурными константами [3; 4, разд. 4.2]. Она позволяет перейти к алгебре Ли $\mathcal{L}(\Phi, K)$ над произвольным полем K, называемой *алгеброй Шевалле.* Мы исследуем точные обертывающие алгебры некоторых подалгебр алгебры Шевалле.

Известно, что алгебру Шевалле $\mathcal{L}(\Phi, K)$ типа A_{n-1} представляет алгебра Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$ всех $n \times n$-матриц над K с нулевым следом. Она порождает простую ассоциативную алгебру $M(n, K)$ всех $n \times n$-матриц над K и является коммутантом алгебры Ли $M(n, K)^{(-)}$. Однако, в алгебре $M(n, K)$ нет подалгебр, являющихся точной обертывающей алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$.

Структурные константы базы Шевалле в $\mathcal{L}(\Phi, K)$ определяет их выбор с известным произволом для *нильтреугольной* подалгебры $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$. Такой выбор существенно влияет на свойства построенных в [2] точных обертывающих алгебр R алгебры Ли $N\Phi(K)$. Если Π — база в Φ, то общее число точных обертывающих R алгебры Ли $N\Phi(K)$ равно $2^{|\Phi^+ \setminus \Pi|}$ (предложение 1).

Одну из точных обертывающих R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} представляет алгебра $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$-матриц над K. В силу теоремы Р. Дюбиша и С. Перлиса [5] она стандартна (понятие стандартной точной обертывающей алгебры вводится в разд. 2).

Вопрос существования стандартной обертывающей R для алгебр Ли $N\Phi(K)$ решает в разд. 3 теорема 2. Отметим, что в 2001 г. записана проблема комбинаторного перечисления стандартных идеалов алгебр $N\Phi(K)$ классических типов Φ при $K = GF(q)$ [6, проблема 1]. Ее решение анонсирует в [2] теорема Егорычева, Левчука и Ходюни. Это равносильно перечислению всех идеалов точной обертывающей алгебры R в случае ее стандартности.

Основная в статье теорема 1 выявляет стандартные обертывающие R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} $(n > 3)$ и показывает, что ассоциативная обертывающая алгебра R, с точностью до перехода к противоположной алгебре, единственна и изоморфна алгебре $NT(n, K)$.

1. Точные обертывающие алгебр Ли

С учетом введенного определения в начале статьи и работы [2] естественно применять и неассоциативные обертывающие алгебры. Замена $a \circ b := ba$ умножения в R дает *противоположную алгебру* $R^{(op)}$, антиизоморфную R. Некоторые общие структурные связи отражает

Лемма 1. *Всякий идеал в R есть идеал также в $R^{(-)}$ и $\operatorname{Aut} R \subseteq \operatorname{Aut} R^{(-)}$. Если μ — антиизоморфизм алгебры R, то*

$$\mu(R)^{(-)} \simeq R^{(-)} \simeq (R^{(op)})^{(-)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы следует из того, что основные операции алгебры $R^{(-)}$ являются производными от операций в R.

Эндоморфизм $x \to -x$ $(x \in R)$ модулей R и $R^{(-)}$ является антиавтоморфизмом алгебры $R^{(-)}$ в силу равенств

$$(-a) * (-b) = a * b = ab - ba = -(b * a) \quad (a, b \in R).$$

Его композиция $-\mu : x \to -x^{\mu}$ с любым антиизоморфизмом μ алгебры R дает изоморфизм алгебр $R^{(-)}$ и $\mu(R)^{(-)}$. (В важном частном случае этот изоморфизм хорошо известен [4, разд. 11.2.1].)

Остается заметить, что алгебры R и $R^{(op)}$ определены на одном множестве и их антиизоморфизмом является тождественное отображение. $\square$

Точные обертывающие алгебры некоторых подалгебр алгебр Шевалле выявлены в [2]. Для дальнейшего исследования структурных свойств нам потребуются некоторые понятия и предварительные сведения.

В теории Картана — Киллинга всякую простую комплексную конечномерную алгебру Ли L ассоциируют с единственной (с точностью до эквивалентности) неразложимой системой корней Φ евклидова пространства V, построенного на подалгебре Картана [4, разд. 3]. Выбор простых корней, или базы Π, в Φ определяет линейное упорядочение $\prec$ на V с множеством V^+ векторов $v \succ 0$ и систему положительных корней $\Phi^+ = V^+ \cap \Phi \supseteq \Pi$. *Ко-корни* $h_r := 2r/(r,r)$ $(r \in \Phi)$ составляют *дуальную к* Φ систему корней с базой $\{h_s \mid s \in \Pi\}$ [4, предложение 3.6.1].

К. Шевалле [3; 4, разд. 4.4] выделил в алгебре Ли $L = \mathcal{L}(\Phi, C)$ базу

$$\{e_r \ (r \in \Phi), \quad h_s \ (s \in \Pi)\}$$

с целочисленными структурными константами. Она позволила перейти к алгебре Ли $\mathcal{L}(\Phi, K)$ над произвольным полем K с таблицей умножения

$$e_r * e_{-r} = h_r, \quad h_s * e_r = \frac{2(r,s)}{(r,r)}\, e_r, \quad h_s * h_r = 0 \quad (r, s \in \Phi),$$

$$e_r * e_s = N_{rs} e_{r+s} = -e_s * e_r \ \ (r+s \in \Phi), \quad e_r * e_s = 0 \ \ (r+s \notin \Phi \cup \{0\}),$$

где $N_{rs} = \pm 1$ или $|r| = |s| < |r+s|$ и $N_{rs} = \pm 2$ или Φ типа G_2 и $N_{rs} = \pm 2$ или ± 3.

Подалгебру $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ называем *нильтреугольной.* Известно, что знаки констант N_{rs} определяет их выбор для подалгебры $N\Phi(K)$. Пару корней r, s называют *специальной*, если $r, s, r+s \in \Phi^+$ и $0 \prec r \prec s$, а также *экстраспециальной*, если $r \preccurlyeq r_1$ для каждой специальной пары r_1, s_1 с суммой $r_1 + s_1 = r + s$. Согласно [4, предложение 4.2.2] верна

Лемма 2. *С точностью до изоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{L}(\Phi, K)$ знаки констант N_{rs} можно выбрать произвольно для экстраспециальных пар (r, s). Тогда знаки остальных констант N_{rs} определяются однозначно.*

Точные обертывающие нильтреугольных подалгебр построены в [2].

Лемма 3 [2, предложение 1]. *K-алгебра R с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ есть точная обертывающая алгебры Ли $N\Phi(K)$, если $e_r e_s = 0$ при $r + s \notin \Phi$ и*

$$e_r e_s = e_{r+s}, \quad e_s e_r = (1 - N_{rs}) e_{r+s} \quad (r, s, r+s \in \Phi^+, \ N_{rs} \geq 1).$$

Несложно найти число построенных точных обертывающих алгебр R.

Предложение 1. *Число точных обертывающих алгебр R алгебры Ли $N\Phi(K)$ равно*

$$2^{|\Phi^+ \setminus \Pi|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, прежде всего, что любой положительный непростой корень в Φ есть сумма $r + s$ единственной экстраспециальной пары корней r, s. Отсюда получаем равномощность множества $\Phi^+ \setminus \Pi$ и множества экстраспециальных пар.

С другой стороны, любую из построенных в лемме 3 точных обертывающих алгебр R алгебры Ли $N\Phi(K)$ в силу леммы 2 однозначно определяет выбор знака $\pm$ константы N_{rs} для каждой экстраспециальной пары корней (r, s) в Φ. Тем самым, доказательство предложения завершено. □

Развивая известные методы, мы выявляем в статье взаимосвязанные условия однозначности точных обертывающих алгебр и констант N_{rs}.

Для корней $r, s \in \Phi$ считаем $s \geq r$, если все коэффициенты разложения $s - r$ по базе Π неотрицательны. Корни $r, s \in \Phi^+$ называем *инцидентными*, если $s \geq r$ или $r \geq s$. Любое множество $\mathcal{L}$ попарно неинцидентных корней в Φ^+ называем *множеством углов в* Φ^+. Выделим в $N\Phi(K)$ идеалы

$$T(r) = \sum_{s \geq r} K e_s, \quad Q(r) = \sum_{s > r} K e_s \quad (r \in \Phi^+), \quad Q(\mathcal{L}) = \sum_{r \in \mathcal{L}} Q(r).$$

Когда $H \subseteq T(\mathcal{L}) := \sum_{r \in \mathcal{L}} T(r)$ и любая замена $T(r)$ на $Q(r)$ в сумме нарушает включение, назовем $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ *множеством углов в* H [7, § 1]. Идеал H в $N\Phi(K)$ называем *стандартным*, если

$$Q(\mathcal{L}) \subseteq H \subseteq T(\mathcal{L}) \quad (\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)).$$

Отметим, что решение проблемы перечисления стандартных идеалов алгебр Ли $N\Phi(K)$ классических типов над конечным полем [6, проблема 1] анонсировали Г. П. Егорычев, В. М. Левчук и Н. Д. Ходюня в [2].

Точную обертывающую алгебру R алгебры Ли $N\Phi(K)$ называют *стандартной* [2], если все ее идеалы H стандартны. Учитывая леммы 1 и 3, верна

Лемма 4. *Если точная обертывающая алгебра R алгебры Ли $N\Phi(K)$ стандартна, то $R^{(op)}$ также является стандартной обертывающей алгеброй.*

Лемма 5. *Пусть r — угол идеала H точной обертывающей R алгебры Ли $N\Phi(K)$ и $p, r+p \in \Phi^+$. Если $(Ke_p)H + H(Ke_p) \subseteq T(r+p)$, то $T(r+p) \subseteq H$. В частности, в R каждый идеал с единственным углом стандартен, а когда система корней Φ ранга 1 или 2, любая точная обертывающая алгебра R стандартна.*

Доказательство. Поскольку $N_{rp} = -N_{pr}$, то одна из констант N_{rp} и N_{pr} положительна. Поэтому выбранное множество в силу выбора идеала H в R и леммы 3 имеет единственный угол $r+p$, причем

$$(Ke_p)H + H(Ke_p) = Ke_{r+p} \mod Q(r+p).$$

Для максимального корня ρ имеем аннулятор $\mathrm{Ann}\ (R) = Ke_\rho$. Включение $T(r+p) \subseteq H$ очевидно, если $r+p = \rho$. При $r+p \neq \rho$ включение находим индукцией по $h - ht(r)$, где $h := ht(\rho) + 1$ — число Кокстера системы корней Φ.

Таким образом, первое утверждение леммы доказано. Оставшиеся утверждения являются его очевидными следствиями. □

Корни $r, s \in \Phi$ в [7] названы *p-связанными* для простого корня p, если $r+p,\ s+p \in \Phi^+$. Наименьшая подсистема $\Psi(r,p,s)$ системы корней Φ, содержащая

$$\Phi \cap (\mathbb{Z}r + \mathbb{Z}p + \mathbb{Z}s),$$

единственна. Легко видеть, что для стандартности алгебры R необходима стандартность одной из точных обертывающих алгебры Ли $N\Psi(K)$ — подалгебры $R(\Psi) := \sum_{a \in \Psi^+} Ke_a$ в R. Отсюда вытекает

Лемма 6. *Если точная обертывающая алгебра R алгебры Ли $N\Phi(K)$ стандартна, то для любой подсистемы корней $\Psi = \Psi(r,p,s)$ в системе корней Φ с базой $\{r,p,s\}$ и p-связанными неинцидентными корнями r, s подалгебра $R(\Psi)$ стандартна.*

2. Стандартные обертывающие алгебры типа A_n

Основная в этом разделе теорема 1 выявляет условия однозначности стандартной обертывающей алгебры для алгебр Ли $N\Phi(K)$ типа A_n.

Известно, что $R^{(-)}$ есть алгебра Ли для любой ассоциативной алгебры R [1, гл. 1, § 1, пример (a)]. Очевидно, ассоциативность алгебр сохраняется при антиизоморфизмах.

Алгебра $M(n,K)$ $(n > 1)$ всех $n \times n$-матриц над полем K является ассоциативной и простой; ее базу составляют матричные единицы с умножением $e_{ij}e_{jm} = e_{im}$, $e_{ij}e_{km} = 0$ $(j \neq k)$. С другой стороны, алгебра Ли $M(n,K)^{(-)}$ не простая. Ее коммутант совпадает с подалгеброй $\mathfrak{sl}_n(K)$ матриц со следом 0, представляющей K-алгебру Шевалле $\mathcal{L}(\Phi, K)$ типа A_{n-1}

(см.[4, 11.2.1].) Кроме того, в алгебре $M(n,K)$ нет подалгебр, являющихся точной обертывающей алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$. Действительно, $\mathfrak{sl}_n(K)$ и, более того, совокупность матричных единиц e_{ij} $(i \neq j)$ порождают ассоциативную алгебру $M(n,K)$.

Число всех точных обертывающих алгебр R типа A_n равно $2^{\binom{n}{2}}$ в силу предложения 1. Точную обертывающую R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} представляет алгебра $NT(n,K)$ нильтреугольных $n \times n$-матриц (с нулями на главной диагонали и над ней) над K. Стандартность всех ее идеалов следует из теоремы 8 Р. Дюбиша и С. Перлиса (см. [5]).

В системе корней Φ типа A_n подсистема корней $\Psi = \Psi(r,p,s)$ с p-связанными корнями r и s всегда типа A_3, а корень $r+p+s$ в Ψ^+ — единственный, представляемый неоднозначно суммой специальной пары корней из Ψ. Каждую обертывающую алгебру $R(\Psi)$ алгебры Ли $N\Psi(K)$ порождают Ke_r, Ke_s и Ke_p, причем

$$R(\Psi) = Ke_r + T(p) + Ke_s, \quad \mathrm{Ann}\,(R(\Psi)) = Ke_{r+p+s} = R(\Psi)^3.$$

Лемма 7. *Условие стандартности алгебры $R(\Psi)$ слабее условия ассоциативности и равносильно каждому из следующих условий*:

a) *элементы e_r и e_s не лежат вместе ни в одном из односторонних* (*правом или левом*) *аннуляторов элемента e_p*;

b) $N_{s,p} = N_{p,r}$ *и* $N_{s,r+p} = N_{s+p,r}$;

c) *с точностью до перехода к противоположной алгебре, алгебра $R(\Psi)$ изоморфна $NT(4,K)$ по модулю третьих степеней алгебр.*

Доказательство. При $a, b, a+b \in \Phi^+$ по лемме 3 имеем либо $e_ae_b = e_{a+b},\ e_be_a = 0$, либо $e_ae_b = 0,\ e_be_a = e_{a+b}$. Для аннуляторов в $R(\Psi)$ отсюда находим

$$\mathrm{Ann}\,(T(p)) = T(p) = \mathrm{Ann}\,(R(\Psi)^2) \supset R(\Psi)^2 = R(\Psi)^3 + Ke_{r+p} + Ke_{p+s}.$$

Допустим, что элементы e_r, e_s лежат в разных односторонних аннуляторах элемента e_p — в левом аннуляторе $\mathrm{Ann}^{(l)}(e_p)$ и правом $\mathrm{Ann}^{(r)}(e_p)$. Тогда знаки структурных констант $N_{s,p}$ и $N_{p,r}$ совпадают, и поэтому

$$N_{s,p} = N_{p,r}, \quad N_{p,r}N_{s,p} = 1.$$

По лемме 5 отсюда следует стандартность любого идеала в $R(\Psi)$. Кроме того, $N_{s,r+p} = N_{s+p,r}$, поскольку тождество Якоби дает равенства

$$e_s * (e_p * e_r) = (e_s * e_p) * e_r, \quad N_{pr}N_{s,r+p} = N_{sp}N_{s+p,r}.$$

Если какой-либо односторонний аннулятор в $R(\Psi)$ элемента e_p (равносильно, идеала $T(p)$) совпадает с $R(\Psi)$, скажем,

$$\mathrm{Ann}^{(l)}(e_p) = \mathrm{Ann}^{(l)}(T(p)) := \{\alpha \in R(\Psi) \mid \alpha T(p) = 0\} = R(\Psi),$$

то $K(e_r + e_s) + K(e_{r+p} + e_{s+p}) + R(\Psi)^3$ — нестандартный идеал. В этом же случае $(e_pe_r)e_s = e_{p+r+s}$, но $e_p(e_re_s) = 0$. Отсюда находим, что всякая ассоциативная алгебра $R(\Psi)$ обязана быть стандартной.

По доказанному и в силу леммы 2 знаки структурных констант определяют их выбор (произвольный) для двух констант $N_{p,r}$ и $N_{s+p,r}$, так что стандартных обертывающих алгебр $R(\Psi)$ всего четыре. В силу леммы 4, с точностью до перехода к противоположной алгебре, имеем

$$N_{s,p} = N_{p,r} = 1, \quad e_se_p = e_{s+p}, \quad e_pe_r = e_{r+p}, \quad e_re_p = 0 = e_pe_s. \tag{2.1}$$

Тогда алгебры $R(\Psi)$ и $NT(4,K)$ по модулю своих аннуляторов изоморфны. Поэтому алгебра $R(\Psi)$ с аннулятором $\mathrm{Ann}\,R(\Psi) = R(\Psi)^3$ зависит от выбора знака константы $N_{s+p,r}$. В случае

$$N_{s+p,r} = N_{s,r+p} = 1, \quad e_{s+p}e_r = e_{r+s+p} = e_se_{r+p}, \quad e_re_{s+p} = 0 = e_{r+p}e_s \tag{2.2}$$

приходим к изоморфизму $R(\Psi) \simeq NT(4, K)$, определенному по правилу

$$e_p \mapsto e_{32}, \quad e_r \mapsto e_{21}, \quad e_s \mapsto e_{43}, \quad e_{r+p} \mapsto e_{31}, \quad e_{s+p} \mapsto e_{42}, \quad e_{s+r+p} \mapsto e_{41}.$$

В оставшемся случае $N_{s,r+p} = N_{s+p,r} = -1$ алгебра $R(\Psi)$ ассоциативная по модулю $\operatorname{Ann} R(\Psi)$, но $e_p(e_r e_s) \neq (e_p e_r)e_s$.

Стандартность алгебры $R(\Psi)$ следует теперь из того, что произвольный ее идеал, очевидно, либо содержит аннулятор $\operatorname{Ann} R(\Psi)$, либо лежит в нем.

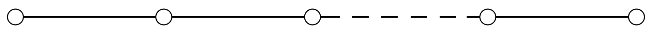
Это завершает доказательство леммы. □

Лемма 8. *Если точная обертывающая алгебра R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_n $(n > 2)$ стандартна, то по модулю третьих степеней алгебр имеем*

$$R \simeq NT(n+1, K) \quad \text{или} \quad R^{(op)} \simeq NT(n+1, K).$$

Доказательство. Исследуем произвольную стандартную обертывающую алгебру R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_n $(n > 2)$. Для любой подсистемы корней $\Psi = \Psi(r, p, s)$ типа A_3 в Φ по лемме 6 свойство стандартности R наследуется подалгеброй $R(\Psi)$ — обертывающей алгебры Ли $N\Psi(K)$.

Ясно, что пара p-связанных корней $r, s \in \Phi^+$ с простым корнем p существует только если p — промежуточный корень в графе Кокстера

A_n :  (n вершин) .

Вершины графа Кокстера системы корней Φ соответствуют простым корням. Ясно, что специальные пары простых корней экстраспециальны.

Пусть $\Psi = \Psi(r, p, s)$ — подсистема в Φ с базой из простых корней r, p, s. Учитывая леммы 5 и 7, для стандартной алгебры $R(\Psi)$ элементы e_r, e_s лежат в разных односторонних аннуляторах элемента e_p — в левом $\operatorname{Ann}^{(l)}(e_p)$ и правом $\operatorname{Ann}^{(r)}(e_p)$. В этом случае знаки структурных констант $N_{s,p}$ и $N_{p,r}$ совпадают и $N_{s,p}N_{p,r} = 1$.

Когда корень s соответствует последней вершине графа Кокстера, с точностью до перехода от R к противоположной алгебре, получаем соотношения (2.1). Выберем далее корень q, соседний слева с r в графе Кокстера, и подсистему $\Psi = \Psi(q, r, p)$ с базой q, r, p. Применяя леммы 5 и 7 к подалгебре $R(\Psi)$, аналогично получаем $e_r e_q = e_{r+q}$.

Указанный процесс продолжаем, завершая подалгеброй $R(\Psi)$ с базой в Ψ, которая начинается с первой вершины графа Кокстера.

Базу точной обертывающей алгебры $R = NT(n+1, K)$ и базу Шевалле алгебры Ли $R^{(-)}$ дают матричные единицы $e_r = e_{ij}$ $(1 \leq j < i \leq n+1)$ при соответствующей нумерации корней $r = r_{ij}$ системы Φ типа A_n.

В матричной индексации и обозначениях $e_r = e_{ij}$ при $r = r_{ij}$ получаем $e_{ij}e_{jm} = e_{im}$ для случаев $i - m = 2$. Это дает изоморфизм алгебр R и $NT(n+1, K)$ по модулю их третьих степеней.

Лемма доказана. □

Следующая, основная в этом разделе теорема выявляет все стандартные и все ассоциативные точные обертывающие алгебры R.

Теорема 1. *Ассоциативная точная обертывающая алгебра R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} $(n > 3)$, с точностью до перехода к противоположной алгебре, единственна и изоморфна алгебре $NT(n, K)$. Изоморфность R или $R^{(op)}$ по модулю аннулятора с фактор-алгеброй $NT(n, K)/Ke_{n1}$ равносильна стандартности R.*

Доказательство. Исследуем произвольную стандартную обертывающую алгебру R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_n $(n > 2)$. Для $n = 3$ теорему 1 доказывают леммы 7 и 8; в этом случае $\Phi = \Psi = \Psi(r, p, s)$ типа A_3, а пара p-связанных корней r, s в Φ^+ и простой корень p определены однозначно.

Каждая подалгебра $R(\Psi)$ в R с подсистемой корней $\Psi = \Psi(r, p, s)$ типа A_3 в Φ стандартна в силу леммы 6. С точностью до перехода от R к противоположной алгебре, по лемме 7 имеем соотношения (2.1), а в случае ассоциативности R также (2.2). При $n > 3$ по индукции можем считать теорему доказанной для каждого типа A_k, $3 \le k < n$.

Выберем в Φ подсистему Φ_1 (аналогично Φ_n) с базой, полученной из базы Π отбрасыванием первого (соответственно, последнего) простого корня в графе Кокстера; обе подсистемы типа A_{n-1}. Ясно, что стандартность алгебры R наследуется ее подалгебрами $R(\Phi_1)$ и $R(\Phi_n)$ по индуктивному предположению и дает их ассоциативность, а также изоморфность алгебр R и $NT(n+1, K)$ по модулю n-х степеней.

Стандартность подалгебр $R(\Psi)$ в R для подсистем корней $\Psi = \Psi(r, p, s)$ типа A_3 в $\Phi_l \cup \Phi_r$ приводит к уточнению. Матричная индексация корней и обозначения $e_r = e_{ij}$ при $r = r_{ij}$ $(1 \le j < i \le n)$, наряду с ассоциативностью произведения $e_{n+1n}e_{nn-1} \cdots e_{32}e_{21} = e_{n+11}$ и подалгебр $R(\Psi(r_{j1}, r_{ij}, r_{n+1i}))$ при $1 < j < i < n+1$ по лемме 7 дают также изоморфность алгебр R и $NT(n+1, K)$.

Это завершает доказательство теоремы. □

Заметим, что тождественное преобразование алгебры $M(n, K)$ является ее антиизоморфизмом на противоположную алгебру $M(n, K)^{(op)}$. Его композиция с антиавтоморфизмом $'$ транспонирования матриц дает изоморфизм $M(n, K) \simeq M(n, K)^{(op)}$ алгебр. Поэтому из теоремы 1 вытекает

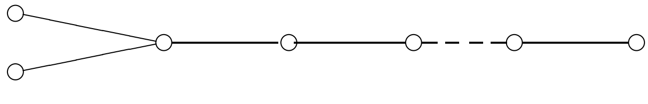
Следствие. *Алгебра $M(n, K)$ $(n > 3)$ является единственной ассоциативной простой алгеброй A, для которой коммутант алгебры Ли $A^{(-)}$ изоморфен алгебре Шевалле $\mathcal{L}(\Phi, K)$ типа A_{n-1}.*

3. Существование стандартных обертывающих алгебр

В этом разделе мы решаем вопрос существования стандартной обертывающей алгебры для алгебр Ли $N\Phi(K)$.

Лемма 9. *Для алгебр Ли $N\Phi(K)$ типов D_n $(n > 3)$ и E_n $(n = 6, 7, 8)$ стандартная обертывающая алгебра не существует.*

Доказательство. Согласно доказательству предложения 12.2.3 в [4] алгебра Ли $ND_n(K)$ допускает графовый автоморфизм θ, соответствующий симметрии $^-$ порядка 2 системы корней Φ. Граф Кокстера здесь имеет вид

D_n :  (n вершин) .

Две крайние слева вершины соответствуют простым симметричным корням, скажем, a и $\bar{a}$. Отбрасывая их в графе поочередно, получим графы Кокстера подсистем корней Φ_i $(i = 1, 2)$ типа A_{n-1}.

Допустим. что стандартная обертывающая алгебра R типа D_n существует. Тогда точные обертывающие R_i алгебры Ли $N\Phi_i(K)$, $i = 1, 2$, выбранные как подалгебры в R, стандартны.

Пусть простой корень p соответствует вершине, связанной с тремя вершинами, а q — оставшейся крайней вершине. Как и в доказательстве леммы 7, с точностью до перехода к противоположному кольцу $R^{(op)}$, левый аннулятор $\mathrm{Ann}^{(l)}(e_q)$ содержит все элементы базиса Шевалле, соответствующие простым корням. Аналогично левый аннулятор элемента e_p базиса Шевалле содержит элементы базиса Шевалле, соответствующие всем вершинам слева. Отсюда

$$e_a e_p = e_b e_p = 0, \quad e_p e_a = e_{p+a}, \quad e_p e_b = e_{p+b}.$$

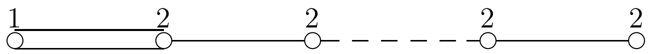
Поэтому $K(e_a + e_b)$ порождает в R нестандартный идеал. Противоречие.

Таким образом, для типа D_n лемма доказана.

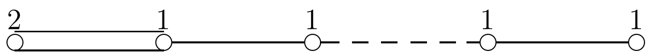
Утверждение леммы для типа E_n $(n = 6, 7, 8)$ получаем как следствие, пользуясь тем, что система корней здесь содержит подсистему с базой, соответствующей подграфу типа D_4 в графе типа D_n. □

Следуя [8, V.12, V.15; 7, § 1, c. 99], мы различаем понятия графа Кокстера и схемы Дынкина системы корней. Так, графы Кокстера систем типа B_n и C_n совпадают, а схемы Дынкина при $n > 2$ имеют вид

B_n :



C_n :



.

Здесь через a, b обозначаются простые корни различной длины, соответствующие в схеме Дынкина двум соседним вершинам, причем a — короткий корень.

Вопрос существования стандартной обертывающей R решает

Теорема 2. *Стандартная обертывающая алгебра R алгебры Ли $N\Phi(K)$ существует для всех типов Φ, исключая типы D_n $(n \geq 4)$ и E_n $(n = 6, 7, 8)$. Для типа B_n и C_n, с точностью до перехода к противоположной алгебре, можно считать, что*

$$R/T(2a + b) \simeq NT(n + 1, K).$$

Доказательство. Алгебры Ли $N\Phi(K)$ классических типов представлены в [9] специальными Φ^+-матрицами. Фиксированный в [9, лемма 2] выбор знаков структурных констант N_{rs} определяет точную обертывающую алгебру R_Φ соответствующего типа. Алгебры R_Φ типа B_n и C_n стандартны согласно [2, теорема 5], причем $R_\Phi/T(2a + b) \simeq NT(n + 1, K)$.

Для типа A_n утверждение теоремы следует из теоремы 1. Существование стандартной обертывающей алгебры R типа F_4 установлено в [10, теорема 1.1], для лиева ранга 2 — в лемме 5), для типов E_n и D_n утверждение теоремы доказано в лемме 9. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Капланский И.** Алгебры Ли и локально компактные группы. Москва: Мир, 1974. c. 152.
2. **Левчук В.М.** Нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле: обертывающая алгебра, идеалы и автоморфизмы // Докл. Акад. наук. 2018. Т. 478, № 2. С. 137–140.
3. **Chevalley C.** Sur certain groups simples // Tôhoku Math. J. 1955. Vol. 7, no. 1-2. P. 14–66. doi: 10.2748/tmj/1178245104 .
4. **Carter R.** Simple groups of Lie type. N Y: Wiley and Sons, 1972. 331 p.
5. **Dubish R., Perlis S.** On total nilpotent algebras // Amer. J. Math. 1951. Vol. 73, no. 3. P. 439–452.
6. **Egorychev G.P., Levchuk V.M.** Enumeration in the Chevalley algebras // ACM SIGSAM Bulletin. 2001. Vol. 35, no. 2. P. 20–34.
7. **Levchuk V. M., Suleimanova G. S.** Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type // J. Algebra. 2012. Vol. 349, no. 1. P. 98–116. doi: 10.1016/j.algebra.2011.10.025 .
8. **Серр Ж.-П.** Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969. 376 c.

9. **Левчук В. М.** Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 315–338.
10. **Hodyunya N.D.** Enumerations of ideals in niltriangular subalgebra of Chevalley algebras // J. SFU Math. Phys. 2018. Vol. 11, no. 3. P. 271–277. doi: 10.17516/1997-1397-2018-11-3-271-277 .

Поступила 11.12.2019
После доработки 11.05.2020
Принята к публикации 3.08.2020

Левчук Владимир Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой алгебры и математической логики
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru

Сулейманова Галина Сафиуллановна
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры ПИМиЕД
Хакасский технический институт —
филиал Сибирского федерального университета
г. Абакан
e-mail: suleymanova@list.ru

Ходюня Николай Дмитриевич
аспирант
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: nkhodyunya@gmail.com

REFERENCES

1. Kaplansky I. *Lie algebras and locally compact groups*, Chicago and London, The University of Chicago Press, 1971, 152 p. Translated to Russian under the title *Algebry Li i lokal'no kompaktnye gruppy*, Moscow: Mir Publ., 152 p.
2. Levchuk V.M. Niltriangular subalgebra of Chevalley algebra: the enveloping algebra, ideals and automorphisms. *Dokl. Math.*, 2018, vol. 97, no. 1, pp. 23–27. doi: 10.1134/S1064562418010088 .
3. Chevalley C. Sur certain groups simples. *Tôhoku Math. J.*, 1955, vol. 7, no. 1-2, pp. 14–66. doi: 10.2748/tmj/1178245104 .
4. Carter R. *Simple groups of Lie type.* N Y: Wiley and Sons, 1972, 331 p. ISBN: 0471137359 .
5. Dubish R., Perlis S. On total nilpotent algebras. *Amer. J. Math.*, 1951, vol. 73, no. 2, pp. 439–452. doi: 10.2307/2372186 .
6. Egorychev G.P., Levchuk V.M. Enumeration in the Chevalley algebras. *ACM SIGSAM Bulletin*, 2001, vol. 35, no. 2, pp. 20–34.
7. Levchuk V.M., Suleimanova G.S. Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type. *J. Algebra*, 2012, vol. 349, no. 1, pp. 98–116. doi: 10.1016/j.algebra.2011.10.025 .
8. Serre J-P. *Lie algebras and Lie groups.* N Y; Amsterdam: Benjamin, 1965, 376 p. Translated to Russian under the title *Algebry Li i gruppy Li.* Moscow: Mir Publ., 1969, 376 p.

9. Levchuk V.M. Automorphisms of unipotent subgroups of Chevalley groups. *Algebra and Logic*, 1990, vol.29, no. 3, pp. 211–224. doi: 10.1007/BF01979936 .
10. Hodyunya N.D. Enumerations of ideals in niltriangular subalgebra of Chevalley algebras. *J. SFU Math. and Phys*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 271–277. doi: 10.17516/1997-1397-2018-11-3-271-277 .

Received December 11, 2019
Revised May 11, 2020
Accepted August 3, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center, which is financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the project for the establishment and development of regional centers for mathematical research and education (agreement no. 075-02-2020-1534/1).

Vladimir Mikhailovich Levchuk, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru .

Galina Safiullanovna Suleimanova, Dr. Phys.-Math. Sci., Khakass Technical Institute — Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: suleymanova@list.ru .

Nikolay Dmitrievich Khodyunya, doctoral student, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: nkhodyunya@gmail.com .

V. M. Levchuk, G. S. Suleimanova, N. D. Khodyunya. Nonassociative enveloping algebras of Chevalley algebras, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 91–100 .