ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 517.925.51

# ОБ УТОЧНЕНИИ ОЦЕНОК ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

**А. В. Ласунский**

Получена оценка нормы квадратной матрицы $A^t$ порядка $n$:

$$\|A^t\| \le \sum_{k=0}^{n-1} C_t^k \gamma^{t-k}(\gamma + \|A\|)^k, \quad t \ge n-1,$$

где $C_t^k$ — биномиальный коэффициент; $\gamma = \max\limits_i |\lambda_i|$; $\lambda_i$ — собственные числа матрицы $A$. С помощью этой оценки методом замораживания получены уточнения констант в оценке сверху для старшего $\Lambda$ и в оценке снизу для младшего $\lambda$ показателей системы $x(t+1) = A(t)x(t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{Z}^+$ с вполне ограниченной матрицей $A(t)$. Предполагается, что матрицы $A(t)$ и $A^{-1}(t)$ для любых $t, s \in \mathbb{Z}^+$ удовлетворяют неравенствам $\|A(t) - A(s)\| \le \delta|t-s|^\alpha,\ \|A^{-1}(t) - A^{-1}(s)\| \le \delta|t-s|^\alpha$ с некоторыми постоянными $0 < \alpha \le 1$ и $\delta > 0$. На примере показано, что постоянные $\gamma$ и $\delta$, вообще говоря, связаны между собой.

Ключевые слова: оценки показателей Ляпунова, метод замораживания для дискретных систем.

**A. V. Lasunskii. Refinement of estimates for the Lyapunov exponents of a class of linear nonautonomous systems of difference equations.**

We obtain an estimate for the norm of an $n$th-order square matrix $A^t$:

$$\|A^t\| \le \sum_{k=0}^{n-1} C_t^k \gamma^{t-k}(\gamma + \|A\|)^k, \quad t \ge n-1,$$

where $C_t^k$ are the binomial coefficients, $\gamma = \max\limits_i |\lambda_i|$, and $\lambda_i$ are the eigenvalues of $A$. Based on this estimate and using the freezing method, we improve the constants in the upper and lower estimates for the highest and lowest exponents, respectively, of the system $x(t+1) = A(t)x(t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{Z}^+$, with a completely bounded matrix $A(t)$. It is assumed that the matrices $A(t)$ and $A^{-1}(t)$ satisfy the inequalities $\|A(t) - A(s)\| \le \delta|t-s|^\alpha,\ \|A^{-1}(t) - A^{-1}(s)\| \le \delta|t-s|^\alpha$ with some constants $0 < \alpha \le 1$ and $\delta > 0$ for any $t, s \in \mathbb{Z}^+$. We give an example showing that the constants $\gamma$ and $\delta$ are generally related.

Keywords: estimates for Lyapunov exponents, freezing method for discrete systems.

**MSC:** 39A30, 39A22

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-84-90

## 1. Введение

Линейные неавтономные системы разностных уравнений представляют интерес и как самостоятельный объект, и как вспомогательный при исследовании свойств решений нелинейных систем методом линеаризации. В [1] приведена обширная библиография по этому вопросу. У авторов этой статьи большой цикл публикаций, посвященных дискретным системам. Хотим отметить работы [2–4], подчеркивающие актуальность рассматриваемой задачи. Вопросы устойчивости решений дискретных систем получили всестороннее развитие и достигли уровня, сравнимого с теорией устойчивости решений систем дифференциальных уравнений. Здесь уместно сказать, что в последние годы активно разрабатывается теория характеристик колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы. Первый шаг в этом направлении сделал И. Н. Сергеев, введя определение характеристической частоты скалярной функции [5]. С публикациями по этой тематике можно также можно ознакомиться в его статье [6]. По-видимому, этот вопрос для дискретных систем еще не разрабатывался.

В работе [7] для старшего $\Lambda$ и младшего $\lambda$ показателей системы

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad \|A(t)\| \le M, \quad \|A^{-1}(t)\| \le M, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{Z}^+, \tag{1}$$

при условии, что матрицы $A(t)$ и $A^{-1}(t)$ для любых $t, s \in \mathbb{Z}^+$ удовлетворяют неравенствам

$$\|A(t) - A(s)\| \le \delta|t-s|^\alpha, \tag{2}$$

$$\|A^{-1}(t) - A^{-1}(s)\| \le \delta|t-s|^\alpha$$

с некоторыми постоянными $0 < \alpha \le 1$ и $\delta > 0$, получены оценки

$$\Lambda \le \ln\gamma + C\delta^{1/(n+\alpha)}, \quad \lambda \ge \ln\omega - C\delta^{1/(n+\alpha)}. \tag{3}$$

Здесь

$$\gamma = \sup_{t\in\mathbb{Z}^+} \max_i |\lambda_i(t)|, \quad \omega = \inf_{t\in\mathbb{Z}^+} \min_i |\lambda_i(t)| > 0,$$

$\lambda_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, — собственные числа матрицы $A(t)$ системы (1), $C = L\gamma^{-1} + n + \alpha - 1$, постоянная $L$ из оценки

$$\|A^t(t_1)\| \le L(1+t)^{n-1}\gamma^t, \quad t_1, t \in \mathbb{Z}^+. \tag{4}$$

В публикациях [8; 9] изучался случай $\alpha = 1$ при условии

$$\|A(t+1) - A(t)\| \le \delta. \tag{5}$$

Заметим, что неравенство (2) с $\alpha = 1$ и неравенство (5) равносильны. Действительно, пусть выполнено неравенство (5), тогда из неравенства треугольника для нормы имеем для $t > s$

$$\|A(t) - A(s)\| \le \sum_{i=s}^{t-1} \|A(i+1) - A(i)\| \le \delta(t-s).$$

Обратное очевидно.

В настоящей работе мы уточним постоянную $C$ в оценках (3). Заметим, что постоянные $\gamma$ и $\delta$ для матрицы $A(t)$, вообще говоря, связаны между собой. Утверждать, что если $0 < \gamma < 1$, то при достаточно малом $\delta > 0$ значение $\ln\gamma + C\delta^{1/(n+\alpha)} < 0$, нельзя.

П р и м е р. Система (1) с матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} a\exp((t+2)\sin\ln(t+2) - (t+1)\sin\ln(t+1)) & 0 \\ 1 & \exp(-|a|) \end{pmatrix},$$

$a \ne 0$, неправильна, так как не существует строгий предел

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln\Big|\prod_{i=0}^{t-1} a_{11}(i)\Big| = \ln|a| + \lim_{t\to+\infty} \frac{t+1}{t}\sin\ln(t+1).$$

Из теоремы Лагранжа для функции $\varphi(t) = (t+1)\sin\ln(t+1)$, $t \in [0; +\infty)$, следует, что $|\varphi(t+1) - \varphi(t)| \le \sqrt{2}$ . Значит, матрица $A(t)$ вполне ограничена (ограничена вместе с обратной). Так как у треугольной матрицы собственные числа стоят на главной диагонали, то $\gamma = \max(|a|\exp(\sqrt{2}); \exp(-|a|)) = \exp(-|a|) < 1$ при достаточно малых по модулю значениях параметра $a$.

Имеем

$$|a_{11}(t) - a_{11}(s)| = |a_{11}'(c)||t-s| \le \big(|a|2\sqrt{2}\exp\sqrt{2}\big)|t-s| = \delta|t-s|.$$

Неравенство (2) выполняется с $\alpha = 1$, причем положительную постоянную $\delta$ можно сделать сколь угодно малой за счет выбора параметра $a$. Величина $\ln\gamma + C\delta^{1/(n+\alpha)} = \ln\gamma + C\delta^{1/3} = -|a| + C_1|a|^{1/3} > 0$, если значение $|a|$ близко к нулю.

## 2. Оценка нормы матрицы $A^t$

В следующей лемме мы получим оценку нормы матрицы $A^t$. Эту оценку мы будем использовать в дальнейшем.

**Лемма.** *Пусть $\lambda_i$ — собственные числа матрицы $A$ порядка $n$ и $\gamma = \max\limits_i |\lambda_i|$, тогда для всех натуральных $t \geq n-1$ справедлива оценка*

$$\|A^t\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} C_t^k \gamma^{t-k} (\gamma + \|A\|)^k, \tag{6}$$

*где $C_t^k$ — биномиальный коэффициент.*

Доказательство. Воспользуемся идеей доказательства оценки матричной экспоненты $\exp(At)$ [10, с. 78; 11, с. 131; 12, с. 163].

Для любой аналитической функции $f(z)$ и матрицы $A$ $n$-го порядка имеет место равенство

$$f(A) = b_1 E + b_2(A - \lambda_1 E) + b_3 (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) + \ldots + b_n (A - \lambda_1 E) \ldots (A - \lambda_{n-1} E), \tag{7}$$

в котором $E$ — единичная матрица, $b_1 = f(\lambda_1)$,

$$b_{k+1} = \int_0^{t_0} dt_1 \ldots \int_0^{t_{k-1}} f^{(k)}(\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) t_1 + \ldots + (\lambda_{k+1} - \lambda_k) t_k) dt_k, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{8}$$

При желании можно считать, что формула для коэффициента $b_1$ получается из общей формулы (8) при $k = 0$ и очевидных допущениях. Переменные интегрирования изменяются в пределах $0 \leq t_k \leq \ldots \leq t_1 \leq t_0 = 1$.

Имеем

$$\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)) t_1 + \ldots + (\lambda_{k+1} - \lambda_k) t_k = \lambda_1 (t_0 - t_1) + \lambda_2 (t_1 - t_2) + \ldots + \lambda_{k+1} (t_k - t_{k+1}). \tag{9}$$

Мы положили $t_{k+1} = 0$ и учли, что $t_0 = 1$.

Из формулы (7), получаем

$$\|f(A)\| \leq |b_1| + \sum_{k=1}^{n-1} |b_{k+1}| (\|A\| + |\lambda_1|) \ldots (\|A\| + |\lambda_k|) \leq |b_1| + \sum_{k=1}^{n-1} |b_{k+1}| (\|A + \gamma\|)^k.$$

Оценим модули коэффициентов $b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Для функции $f(z) = z^t$ имеем $f^{(k)}(z) = t(t-1) \ldots (t-k+1) z^{t-k}$, поэтому для $t \geq n-1$ и $k = 1, 2, \ldots, n-1$ с учетом формулы (9) выводим

$$|f(\lambda_1)| \leq \gamma^t, \quad |f^{(k)}(\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)) t_1 + \ldots + (\lambda_{k+1} - \lambda_k) t_k)|$$

$$= t(t-1) \ldots (t-k+1) \Big| \sum_{i=0}^{k} (t_i - t_{i+1}) \lambda_{i+1} \Big|^{t-k} \leq t(t-1) \ldots (t-k+1) \Big( \gamma \sum_{i=0}^{k} (t_i - t_{i+1}) \Big)^{t-k}$$

$$= t(t-1) \ldots (t-k+1) \gamma^{t-k}.$$

Мы учли, что $\sum_{i=0}^{k} (t_i - t_{i+1}) = 1$ и $t - k \geq 0$. Далее из формул (8) следует, что

$$|b_1| \leq \gamma^t; \quad |b_{k+1}| \leq t(t-1) \ldots (t-k+1) \gamma^{t-k} \int_0^{t_0} dt_1 \ldots \int_0^{t_{k-1}} dt_k = C_t^k \gamma^{t-k}.$$

Неравенство (6) леммы доказано.

З а м е ч а н и е 1. В дальнейшем нас будет интересовать оценка (6) для случая $\gamma > 0$, но лемма справедлива, разумеется, и при $\gamma = 0$. Действительно, пусть все собственные числа матрицы $A$ порядка $n$ равны 0, тогда $\gamma = 0$. Если $t = n - 1$, то оценка (6) превращается в неравенство $\|A^{n-1}\| \le \|A\|^{n-1}$. Если $t \ge n$, то неравенство (6) дает $\|A^t\| = 0$, что согласуется с тем, что $A^t = \mathbb{O}$ для всех $t \ge n$. Действительно, пусть $S^{-1}AS = B = \operatorname{diag}[B_1, \ldots, B_p]$ — жорданова форма матрицы A, тогда $A^t = SB^tS^{-1} = S\operatorname{diag}[B_1^t; \ldots; B_p^t]S^{-1}$. Клетка Жордана порядка $k$, соответствующая собственному числу 0, является нильпотентной матрицей порядка $k$, поэтому, по крайней мере начиная со степени $n$, все степени матрицы являются нулевыми матрицами.

## 3. Оценки показателей Ляпунова

В этом разделе с помощью предыдущей леммы методом замораживания мы получим оценку сверху для старшего и оценку снизу для младшего показателя Ляпунова дискретной системы (1).

**Теорема.** *Для старшего* $\Lambda$ *и младшего* $\lambda$ *показателей системы* (1) *справедливы оценки*

$$\Lambda \le \ln\gamma + \left(\frac{(\gamma + M)^{n-1}}{\gamma^n(n-1)!} + n + \alpha - 1\right)\delta^{1/(n+\alpha)},$$

$$\lambda \ge \ln\omega - \left(\frac{(\omega^{-1} + M)^{n-1}\omega^n}{(n-1)!} + n + \alpha - 1\right)\delta^{1/(n+\alpha)}.$$

З а м е ч а н и е 2. У матриц $A(t)$ и $A^{-1}(t)$ константы $M, \delta, \alpha$ в неравенствах (1), (2) мы считаем общими. Если мы будем считать, что $\|A^{-1}(t)\| \le M_1$, $\|A^{-1}(t) - A^{-1}(s)\| \le \delta_1|t-s|^{\alpha_1}$, то соответствующим образом изменится оценка для $\lambda$ в формулировке предыдущей теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $t_1 \ge n - 1$ и перепишем систему (1) в виде

$$x(t+1) = A(t_1)x(t) + (A(t) - A(t_1)x(t).$$

По методу вариации произвольных постоянных имеем

$$x(t) = A^t(t_1)x(0) + \sum_{p=0}^{t-1} A^{t-p-1}(t_1)(A(p) - A(t_1)x(p),$$

откуда

$$\|x(t)\| \le \|A^t(t_1)\| \cdot \|x(0)\| + \sum_{p=0}^{t-1} \|A^{t-p-1}(t_1)\| \cdot \|(A(p) - A(t_1)\| \cdot \|x(p)\|.$$

Так как $\|A(t)\| \le M$ и $\gamma = \sup\limits_{t\in\mathbb{Z}^+} \max\limits_i |\lambda_i(t)| > 0$, то из леммы следует, что

$$\|A^t(t_1)\| \le \sum_{k=0}^{n-1} C_t^k \gamma^{t-k}(\gamma + M)^k = \gamma^t\,\varphi(t).$$

Заметим, что $\varphi(t)$ — многочлен переменной $t$ степени $n-1$ со старшим коэффициентом $(\gamma + M)^{n-1}((n-1)!\gamma^{n-1})^{-1}$. Учитывая неравенство (2), выводим неравенство

$$\|x(t)\| \le \gamma^t\varphi(t)\|x(0)\| + \sum_{p=0}^{t-1} \gamma^{t-p-1}\varphi(t-p-1)\delta|t_1 - p|^{\alpha}\|x(p)\|.$$

Последнее неравенство справедливо при всех $t \geq n-1$, в том числе и при $t = t_1 \geq n-1$. Положим $t = t_1$, а затем переобозначим $t_1$ через $t$, получим

$$\|x(t)\| \leq \gamma^t \varphi(t)\|x(0)\| + \sum_{p=0}^{t-1} \gamma^{t-p-1}\varphi(t-p-1)\delta(t-p)^{\alpha}\|x(p)\|, \quad t \geq n-1.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\|x(t)\|}{\gamma^t\varphi(t)} \leq \|x(0)\| + \sum_{p=o}^{t-1} \frac{\|x(p)\|}{\gamma^{p+1}\varphi(p)} \frac{\varphi(p)\varphi(t-p-1)\delta(t-p)^{\alpha}}{\varphi(t)}.$$

Так как $\varphi(p)/\varphi(t) \leq 1$ для $p \leq t-1$ в силу возрастания функции $\varphi(t)$, то приходим к неравенству

$$\frac{\|x(t)\|}{\gamma^t\varphi(t)} \leq \|x(0)\| + \sum_{p=o}^{t-1} \frac{\|x(p)\|}{\gamma^{p+1}\varphi(p)} \cdot \varphi(t-p-1)\delta(t-p)^{\alpha}. \tag{10}$$

Далее получаем

$$\varphi(t-p-1)(t-p)^{\alpha}\delta = \varphi(t-p-1)(t-p)^{1-n} \cdot (t-p)^{n+\alpha-1}\delta^{(n+\alpha-1)/(n+\alpha)}\delta^{1/(n+\alpha)}$$

$$\leq (\tilde{L}+\varepsilon)\delta^{1/(n+\alpha)}\left((t-p)\delta^{1/(n+\alpha)}\right)^{n+\alpha-1} \leq (\tilde{L}+\varepsilon)\delta^{1/(n+\alpha)}\exp\left((n+\alpha-1)(t-p))\delta^{1/(n+\alpha)}\right)$$

для всех достаточно больших $t$, $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало.

Мы воспользовались неравенством $x^m < \exp(mx)$ для $m > 0$, $x > 0$. Также мы учли, что $\varphi(t)$ — многочлен переменной $t$ степени $n-1$, поэтому

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t-p-1)}{(t-p)^{n-1}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t)}{(t+1)^{n-1}} = \frac{(\gamma+M)^{n-1}}{\gamma^{n-1}(n-1)!} = \tilde{L}.$$

Неравенство (10) преобразуется к виду

$$\psi(t) \leq \|x(0)\| + \sum_{p=o}^{t-1} \gamma^{-1}\psi(p)(\tilde{L}+\varepsilon)\delta^{1/(n+\alpha)}.$$

Мы ввели обозначение $\psi(t) = \|x(t)\|\left(\gamma^t\varphi(t)\exp\left((n+\alpha-1)t\delta^{1/(n+\alpha)}\right)\right)^{-1}$. Кроме того, множитель $\exp\left(-(n+\alpha-1)t\delta^{1/(n+\alpha)}\right)$, стоящий в правой части неравенства перед $\|x(0)\|$, мы оценили сверху единицей. Применяя дискретный аналог неравенства Гроноулла — Беллмана, получаем

$$\psi(t) \leq \|x(0)\|\exp\left(\sum_{k=0}^{t-1}\gamma^{-1}(\tilde{L}+\varepsilon)\delta^{1/(n+\alpha)}\right) = \|x(0)\|\exp\left(t\gamma^{-1}(\tilde{L}+\varepsilon)\delta^{1/(n+\alpha)}\right).$$

Функция $\varphi(t)$ имеет строгий нулевой показатель, поэтому

$$\chi[x(t)] \leq \ln\gamma + (\gamma^{-1}\tilde{L} + n + \alpha - 1)\delta^{1/(n+\alpha)}, \tag{11}$$

так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало.

Получили оценку сверху для старшего показателя $\Lambda$ системы (1). Оценку снизу для младшего показателя $\lambda$ системы (1) получим, перейдя к сопряженной системе

$$y(t) = (A^{-1}(t))^T y(t). \tag{12}$$

Собственные числа $\mu_i(t)$ матрицы $(A^{-1}(t))^T$ связаны с собственными числами $\lambda_i(t)$ матрицы $A(t)$ соотношением $\mu_i(t) = (\lambda_i(t))^{-1}$, поэтому

$$\sup_{t\in\mathbb{Z}^+}\max_i|\mu_i(t)| = \sup_{t\in\mathbb{Z}^+}\max_i(|\lambda_i(t)|)^{-1} = \big(\inf_{t\in\mathbb{Z}^+}\min_i|\lambda_i(t)|\big)^{-1} = \omega^{-1}.$$

Для решений системы (12) имеем оценку, аналогичную оценке (11) с заменой $\gamma$ на $\omega^{-1}$. Из этой оценки следует, что

$$\chi[y(t)] \le -\ln\omega + \left(\frac{(\omega^{-1}+M)^{n-1}\omega^n}{(n-1)!} + n + \alpha - 1\right)\delta^{1/(n+\alpha)}.$$

Для любого решения $x(t)\ne 0$ системы (1) найдется решение $y(t)$ сопряженной системы (12) такое, что $(x(t),y(t)) = (x(0),y(0)) \ne 0$.

Так как $(x,y)\le \|x\|\cdot\|y\|$, то

$$\chi[x(t)] \ge -\chi[y(t)] \ge \ln\omega - \left(\frac{(\omega^{-1}+M)^{n-1}\omega^n}{(n-1)!} + n + \alpha - 1\right)\delta^{1/(n+\alpha)}.$$

Получили оценку снизу младшего показателя $\lambda$ системы (1).

Теорема доказана.

Замечание 3. Подборку контпримеров для дискретных линейных систем, показывающих отсутствие связи между поведением решений и собственными числами матрицы коэффициентов системы, можно найти, например, в [13].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Kuznetsov N.V., Alexeeva T.A., Leonov G.A.** Invariance of Lyapunov exponents and Lyapunov dimension for regular and irregular linearizations // Nonlinear Dyn. 2016. Vol. 85. P. 195–201. doi: 10.1007/s11071-016-2678-4 .
2. **Czornik A., Nawrat A.** On new estimates for Lyapunov exponents of discrete time varying linear systems // Automatica. 2010. Vol. 46, no. 4. P. 775–778. doi: 10.1016/j.automatica.2010.01.014 .
3. **Czornik A., Mokry P., Nawrat A.** On the sigma exponent of discrete linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2010. Vol. 55, no. 6. P. 1511–1515. doi: 10.1109/TAC.2010.2045699 .
4. **Czornik A., Nawrat A., Niezabitowski M.** On the Lyapunov exponents of a class of second-order discrete time linear systems with bounded perturbations // Dynamical Systems. 2013. Vol. 28, no. 4. P. 473–483. doi: 10.1080/14689367.2012.748718 .
5. **Сергеев И.Н.** Определение характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 11. С. 1573.
6. **Сергеев И.Н.** Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Серия математическая. 2012. Т. 6, № 1. С. 149—172. doi: 10.4213/im5035 .
7. **Ласунский А.В.** Оценки решений линейных и квазилинейных систем в неавтономном случае // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 2. С. 177–185.
8. **Замковая Л.Д.** К методу замораживания для дискретных систем // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 4. С. 697–704.
9. **Замковая Л.Д.** Оценки показателей экспоненциального роста решений некоторых систем // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 11. С. 2008–2010.
10. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Москва: Физматгиз, 1958. 274 с.
11. **Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В. В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. Москва: Наука, 1966. 576 с.
12. **Изобов Н.А.** Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006. 319 с.
13. **Ласунский А.В.** Устойчивость и собственные числа линейных неавтономных систем разностных и дифференциальных уравнений // Математика в высшем образовании. 2010. № 8. С. 37–40.

Поступила 28.04.2020
После доработки 16.05.2020
Принята к публикации 30.06.2020

Ласунский Александр Васильевич
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры прикладной математики и информатики
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
г. Великий Новгород
e-mail: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru

**REFERENCES**

1. Kuznetsov N.V., Alexeeva T.A., Leonov G.A. Invariance of Lyapunov exponents and Lyapunov dimension for regular and irregular linearizations. *Nonlinear Dyn.*, 2016, vol. 85, pp. 195–201. doi: 10.1007/s11071-016-2678-4 .
2. Czornik A., Nawrat A. On new estimates for Lyapunov exponents of discrete time varying linear systems. *Automatica*, 2010, vol. 46, no. 4, pp. 775—778 . doi: 10.1016/j.automatica.2010.01.014 .
3. Czornik A., Mokry P., Nawrat A. On the sigma exponent of discrete linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, vol. 55, no. 6, pp. 1511–1515 . doi: 10.1109/TAC.2010.2045699 .
4. Czornik A., Nawrat A., Niezabitowski M. On the Lyapunov exponents of a class of second-order discrete time linear systems with bounded perturbations. *Dynamical Systems*, 2013, vol. 28, no. 4, pp. 473–483. doi: 10.1080/14689367.2012.748718 .
5. Sergeev I.N. Definition of characteristic frequencies of a linear equation. *Diff. Eq.*, 2004, vol. 40, no. 11, p. 1573 (in Russian) .
6. Sergeev I.N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential system.*Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol.76, no.1, pp. 139–162. doi: 10.1070/IM2012v076n01ABEH002578 .
7. Lasunskii A.V. Estimates for solutions of Linear and quasilinear systems in the nonautonomous case. *Diff. Eq.*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 177–185. doi: 10.1134/S001226611602004X .
8. Zamkovaya L.D. On a method of “Freezing” for discrete systems. *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 4, pp. 697–704 (in Russian).
9. Zamkovaya L.D. Estimates of exponents of exponential growth of solutions of some systems. *Differ. Uravn.*, 1988, vol. 24, no. 11, pp. 2008–2010 (in Russian).
10. Gel’fand I.M., Shilov G.E. *Generalized functions*, vol. 3: Theory of differential equations. Providence: AMS Chelsea Publ., 1967, 222 p. ISBN: 978-1-4704-2661-3 . Original Russian text published in Gel’fand I.M., Shilov G.E. *Nekotorye voprosy teorii differentsial’nykh uravnenii.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1958, 274 p.
11. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., and Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* [Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability]. Moscow: Nauka Publ., 1966, 576 p.
12. Izobov N.A. *Vvedenie v teoriyu pokazatelei Lyapunova* [Introduction to the theory of Lyapunov exponents]. Minsk: BGU Publ., 2006, 319 p. ISBN: 985-485-515-5 .
13. Lasunskii A.V. Stability and eigenvalues of linear nonautonomous systems of difference and differential equations. *Matematika v Vysshem Obrazovanii*, 2010, no. 8, pp. 37–40 (in Russian).

Received April 28, 2020
Revised May 16, 2020
Accepted Juny 30, 2020

*Alexandr Vasil’evich Lasunskii,* Dr. Phys.-Math. Sci., Yaroslav-the-Vise Novgorod State University, Veliky Novgorod, 173003 Russia, e-mail: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru .

Cite this article as: A. V. Lasunskii. Refinement of estimates for the Lyapunov exponents of a class of linear nonautonomous systems of difference equations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 84–90 .