ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 512.554

АВТОМОРФИЗМЫ КОЛЕЦ НЕФИНИТАРНЫХ НИЛЬТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ[1]

Ю. В. Беккер, Д. В. Левчук, Е. А. Сотникова

Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей и Γ — произвольное линейно упорядоченное множество (кратко — цепь). Матрицы $\alpha = \|a_{ij}\|$ над K с индексами i, j из Γ относительно линейных операций всегда образуют K-модуль $M(\Gamma, K)$. Матричное умножение в этом модуле, вообще говоря, не определено, когда Γ — бесконечная цепь. Известное кольцо с матричными умножением и сложением образуют финитарные матрицы в $M(\Gamma, K)$. С другой стороны, в 2019 г. установлено, что для цепи $\Gamma = \mathbb{N}$ натуральных чисел подмодуль в $M(\Gamma, K)$ всех (нижних) нильтреугольных матриц с матричным умножением дает радикальное кольцо $NT(\Gamma, K)$. Его присоединенная группа изоморфна предельной унитреугольной группе. Автоморфизмы группы $UT(\infty, K)$ над полем K порядка больше 2 ранее изучала Р. Словик. В настоящей статье доказано, что бесконечная цепь Γ изометрична или антиизометрична цепи $\mathbb{N}$ или цепи всех целых чисел, если $NT(\Gamma, K)$ с матричным умножением является кольцом. Когда кольцо коэффициентов K — без делителей нуля, основная теорема показывает стандартность автоморфизмов кольца $NT(\mathbb{N}, K)$ и ассоциированного кольца Ли, а также присоединенной группы.

Ключевые слова: радикальное кольцо, алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра, унитреугольная группа, нефинитарные обобщения, автоморфизм.

Yu. V. Bekker, D. V. Levchuk, E. A. Sotnikova. Automorphisms of rings of nonfinitary niltriangular matrices.

Let K be an associative ring with identity, and let Γ be an arbitrary linearly ordered set (briefly, chain). Matrices $\alpha = \|a_{ij}\|$ over K with indices i and j from Γ with respect to linear operations always form a K-module $M(\Gamma, K)$. The matrix multiplication in $M(\Gamma, K)$ is generally not defined if Γ is an infinite chain. The finitary matrices in $M(\Gamma, K)$ form a known ring with matrix multiplication and addition. On the other hand, as proved in 2019, for the chain $\Gamma = \mathbb{N}$ of natural numbers, the submodule in $M(\Gamma, K)$ of all (lower) niltriangular matrices with matrix multiplication and addition gives a radical ring $NT(\Gamma, K)$. Its adjoint group is isomorphic to the limit unitriangular group. The automorphisms of the group $UT(\infty, K)$ over a field K of order greater than 2 were studied by R. Slowik. In the present paper, it is proved that any infinite chain Γ is isometric or anti-isometric to the chain $\mathbb{N}$ or the chain of all integers if $NT(\Gamma, K)$ with matrix multiplication is a ring. When the ring of coefficients K has no divisors of zero, the main theorem shows that the automorphisms of $NT(\mathbb{N}, K)$ and of the associated Lie ring, as well as of the adjoint group, are standard.

Keywords: radical ring, Chevalley algebra, niltriangular subalgebra, unitriangular group, nonfinitary generalizations, automorphism.

MSC: 22E05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-7-13

Введение

Пусть Γ — произвольное линейно упорядоченное множество (кратко, цепь) с отношением порядка $\leq$ и K — ассоциативное кольцо с единицей. Все Γ-матрицы $\alpha = \|a_{ij}\|_{i,j\in\Gamma}$ над K относительно обычных линейных операций образуют K-модуль $M(\Gamma, K)$. Подмодуль матриц α с условием (нижней) нильтреугольности $a_{ij} = 0$ для всех $i \leq j$ обозначают через $NT(\Gamma, K)$, а подмодуль треугольных матриц — через $T(\Gamma, K)$. При $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ приходим к известной матричной алгебре $M(n, K) := M(\Gamma, K)$ и ее подалгебрам $T(n, K)$ и $NT(n, K)$. Матричное умножение в модуле $M(\Gamma, K)$ с бесконечной цепью Γ, вообще говоря, не определено (см. разд. 2).

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым минобрнауки РФ в рамках создания и развития региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Γ-матрицу называют *финитарной*, если число ее ненулевых элементов конечно. Финитарные Γ-матрицы над K с обычными матричными операциями сложения и умножения образуют даже кольцо $FM(\Gamma, K)$ с подкольцом $FT(\Gamma, K)$ и радикальным подкольцом $FNT(\Gamma, K)$. Для случая, когда кольцо K — без делителей нуля, известны максимальные абелевы идеалы кольца $FNT(\Gamma, K)$ и ассоциированного кольца Ли [1]. Это позволило описать автоморфизмы и изоморфизмы тех же колец и финитарной унитреугольной группы $FUT(\Gamma, K)$ (см. [1, теорема 3] и [2, теорема 2.9]). Специфические свойства групп $FUT(\Gamma, K)$ отмечал Ю. И. Мерзляков [3].

Некоторые конструкции групп нефинитарных матриц исследовал В. Холубовский [4; 5]. Автоморфизмы предельной унитреугольной группы $UT(\infty, K)$ над полем K порядка > 2 исследовала Р. Словик [6] (см. также [7; 8]). Эта группа представлена в [9] группой $UT(\Gamma, K)$ с цепью $\Gamma = \mathbb{N}$ натуральных чисел. Более точно, в работе [9] показано, что $NT(\mathbb{N}, K)$ с обычным матричным умножением есть радикальное кольцо и его присоединенная группа изоморфна группе $UT(\infty, K)$. К другим нефинитарным группам приводит перенесение в [9] конструкции $NT(\mathbb{N}, K)$ на нильтреугольные подалгебры алгебр Шевалле классических типов.

В настоящей статье мы перечислим все цепи Γ, для которых $NT(\Gamma, K)$ (равносильно $T(\Gamma, K)$) с обычным матричным умножением является кольцом. Основная теорема 1 разд. 2 утверждает, что любая такая бесконечная цепь Γ оказывается изометричной или антиизометричной цепи $\mathbb{N}$ или цепи всех целых чисел.

Когда кольцо коэффициентов K — без делителей нуля, главная теорема 2 работы показывает стандартность автоморфизмов кольца $NT(\mathbb{N}, K)$. При тех же ограничениях она утверждает, что группа автоморфизмов кольца $NT(\mathbb{N}, K)$ совпадает с группами автоморфизмов ассоциированного кольца Ли и присоединенной группы.

1. Модули нефинитарных матриц

В этом разделе основной является теорема 1. Нам потребуются некоторые известные понятия.

Ассоциативное кольцо $R = (R, +, \cdot)$ всегда образует полугруппу с единицей 0 относительно присоединенного умножения $\alpha \circ \beta := \alpha + \beta + \alpha\beta \quad (\alpha, \beta \in R)$. Обратимые элементы в $(R, \circ)$ образуют *присоединенную группу* кольца R. Кольцо R называют *радикальным* (по Джекобсону), если $(R, \circ)$ — группа. Ассоциированную алгебру Ли $R^{(-)}$ получают заменой умножения в кольце R коммутированием $a * b := ab - ba$.

Изоморфная вложимость [10, теорема II.4.2] кольца R в кольцо с единицей e дает изоморфизм $\alpha \to e + \alpha$ $(\alpha \in R)$ полугрупп $(R, \circ)$ и $(e + R, \cdot)$.

Элемент $\alpha' \in R$ называют *квазиобратным* к α, если $\alpha \circ \alpha' = 0$, т. е. $e + \alpha' = (e + \alpha)^{-1}$. Очевидно, радикальным является всякое ассоциативное нилькольцо. Любой элемент нилькольца нильпотентен, по определению, и поэтому имеет квазиобратный $\alpha' = \sum_{k=1}^{\infty}(-\alpha)^k$.

Выберем линейно упорядоченное множество (кратко — цепь) Γ с отношением порядка $\leq$ и произвольное ассоциативное кольцо K с (ненулевой) единицей. Все Γ-матрицы $\alpha = \|a_{ij}\|_{i,j\in\Gamma}$ над K относительно обычных линейных операций с матрицами образуют K-модуль $M(\Gamma, K)$ с подмодулями $T(\Gamma, K)$ и $NT(\Gamma, K)$. Правило матричного умножения в них действует не всегда.

Γ-матрицу называют *финитарной*, если число ее ненулевых элементов конечно. Нильпотентность колец $NT(n, K)$ и их изоморфные вложения в $FNT(\Gamma, K)$ показывают, что финитарные кольца $FNT(\Gamma, K)$ являются нилькольцами и поэтому радикальны. Обзор специальных важных случаев определенности произведения бесконечномерных матриц представлен в работах В. Холубовского [4; 5]. В кольце коэффициентов K считаем определенными только такие суммы элементов из K, в которых число ненулевых слагаемых конечно. Тогда в модуле $M(\Gamma, K)$ с бесконечной цепью Γ, вообще говоря, формула матричного умножения перестает быть корректной. Это показывает очевидная

Лемма 1. *Пусть* q *и* p *— два произвольных элемента бесконечной цепи* Γ. *Тогда матрицы* $\alpha = \|a_{ij}\|$ *и* $\beta = \|b_{ij}\|$ *в* $M(\Gamma, \mathrm{K})$ *можно выбрать только с элементами* 0 *или* 1 *и условием* $a_{qm}b_{mp} = 1$ *для бесконечного числа значений* m *в* Γ.

Как доказано в [9], для цепи $\mathbb{N}$ натуральных чисел $NT(\mathbb{N}, K)$ с обычными матричными сложением и умножением есть радикальное кольцо. Его присоединенная группа представляет предельную унитреугольную группу $UT(\infty, K)$, для которой Р. Словик [6] исследовала автоморфизмы.

Выявим сейчас все цепи Γ с корректным матричным умножением в $NT(\Gamma, K)$ или, равносильно, в $T(\Gamma, K)$. Отметим, что модуль $T(\Gamma, K)$ есть прямая сумма модуля $NT(\Gamma, K)$ и модуля $D(\Gamma, K)$ диагональных матриц в $M(\Gamma, K)$; очевидно, $D(\Gamma, K)$ всегда является и алгеброй.

В отличие от понятия отрезка из [11, с. 215], используемого в [1], назовем отрезком цепи Γ всякое ее подмножество

$$[p, q] := \{j \in \Gamma \mid p \leq j \leq q\}, \quad p, q \in \Gamma, \quad p \leq q.$$

Первый (или наименьший) и последний элементы цепи Γ (если они существуют) называем также крайними. Напомним, что биективное соответствие двух цепей называют изометрией, если оно сохраняет отношение порядка, и антиизометрией, если отношение порядка меняется на противоположное. Например, отображение

$$m \to -m \ (m \in \mathbb{N})$$

является антиизометрией цепи $\mathbb{N}$ на подцепь $-\mathbb{N}$ цепи целых чисел.

Лемма 2. *Если для бесконечной цепи* Γ *матричное умножение в* $NT(\Gamma, \mathrm{K})$ *или* $T(\Gamma, \mathrm{K})$ *корректно, то любой отрезок цепи* Γ *конечен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p и q — два произвольных элемента бесконечной цепи Γ и $p < q$. Допустим, что отрезок $[p, q]$ цепи Γ бесконечен. Тогда к модулю $M([p, q], K)$ можем применить лемму 1 и выявить в ней матрицы α и β с указанными ограничениями на q-ю строку в α и p-й столбец в β. Остальные элементы в α и β можем считать нулевыми, поскольку они не влияют на утверждение леммы 1.

Это позволяет аналогично выбрать треугольные матрицы $\alpha, \beta \in T(\Gamma, K)$, для которых (q, p)-я координата произведения $\alpha\beta$ (сумма по $m \in [p, q]$ произведений $a_{qm}b_{mp} = 1$) не определена. Поэтому матричное умножение не корректно в $T(\Gamma, K)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 1. *Матричное умножение в модуле* $T(\Gamma, \mathrm{K})$ *или* $NT(\Gamma, \mathrm{K})$ *с бесконечной цепью* Γ *корректно тогда и только тогда, когда, с точностью до перехода к противоположной цепи, цепь* Γ *изометрична цепи* $\mathbb{Z}$ *целых чисел или цепи* $\mathbb{N}$ *натуральных чисел.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 2 сразу же следует, что цепь Γ имеет не более одного крайнего элемента и, кроме того, любой ее отрезок конечен. Если в Γ нет крайних элементов, то, с точностью до перехода к противоположной цепи, цепь Γ изометрична цепи $\mathbb{Z}$ целых чисел. Выберем $q, p \in \Gamma$ с условием $p \leq q$ и произвольные матрицы $\alpha, \beta \in T(\Gamma, K)$. В этом случае (q, p)-я координата произведения $\alpha\beta$ определена, так как отрезок $[p, q]$ конечен. Поэтому матричное умножение определено в $T(\Gamma, \mathrm{K})$.

Пусть в Γ есть крайний элемент. С точностью до перехода к антиизометричной цепи, можем считать, что цепь Γ имеет первый элемент и не имеет последний элемент. Конечность всех ее отрезков показывает, с одной стороны, ее счетность, а с другой стороны, ее изометричность цепи натуральных чисел.

Теорема 1 доказана.

2. Автоморфизмы нильтреугольного кольца $NT(\mathbb{N}, K)$ и ассоциированного кольца Ли

К стандартным автоморфизмам кольца $FNT(\Gamma, K)$ в [1] отнесены внутренние, диагональные и центральные (тождественные по модулю центра) автоморфизмы, а также автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами или антиавтоморфизмами основного кольца K или цепи Γ. Основные нестандартные автоморфизмы действуют тождественно по модулю m-го гиперцентра при $m = 2$ или 3. Базис алгебры $FNT(\Gamma, K)$ составляют матричные единицы e_{ij} $(i > j)$, умножаемые по правилу

$$e_{ij}e_{st} = 0 \ \ (j \neq s), \quad e_{ij}e_{jt} = e_{it} \quad (i, j, s, t \in \Gamma).$$

Зафиксируем далее цепь $\Gamma = \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$ натуральных чисел. Кольцо $R = NT(\mathbb{N}, K)$ согласно [9, теорема 1] является нефинитарным и радикальным. Его присоединенная группа $G(R) = (R, \circ)$ изоморфна нефинитарной унитреугольной группе $UT(\mathbb{N}, K) := e + NT(\mathbb{N}, K)$.

Диагональные и внутренние автоморфизмы кольца $R = NT(\mathbb{N}, K)$ мы выделяем, аналогично Дюбишу и Перлису [12], для Aut $NT(n, K)$. Это сопряжения $\alpha \to \beta\alpha\beta^{-1}$ $(\alpha \in R)$ обратимой диагональной матрицей $\beta \in D(\mathbb{N}, K)$ и матрицей $\beta \in UT(\mathbb{N}, K)$ соответственно. Индуцированный автоморфизм

$$\bar{\theta} \colon \|a_{ij}\| \to \|\theta(a_{ij})\|$$

кольца R дает любой автоморфизм θ основного кольца K.

Отметим, что основные операции кольца Ли $R^{(-)}$ и присоединенной группы $G(R)$ производны от операции в R. Отсюда группа автоморфизмов Aut R является подгруппой в группах Aut $R^{(-)}$ и Aut $G(R)$. Все три группы автоморфизмов действуют на множестве R. Поэтому они могут рассматриваться как подгруппы симметрической группы подстановок множества R. Оказывается, при дополнительных ограничениях эти три подгруппы попарно совпадают. К основным результатам работы относится следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей и без делителей нуля. Тогда всякий автоморфизм кольца $R = NT(\mathbb{N}, \mathrm{K})$ есть произведение автоморфизма, индуцированного автоморфизмом основного кольца K, диагонального и внутреннего автоморфизмов. Группы автоморфизмов кольца Ли $R^{(-)}$ и присоединенной группы $G(R)$ совпадают с* Aut R.

Доказательство. Выявим вначале некоторые характеристические идеалы колец R и $R^{(-)}$. Стандартным центральным рядом кольца Ли $R^{(-)}$ и присоединенной группы $G(R)$ называют ряд

$$L_1 = R \supset L_2 \supset L_3 \supset \cdots \supset L_m \supset \cdots \ ; \tag{2.1}$$

$$L_m = \langle \alpha = \|a_{uv}\| \in NT(\mathbb{N}, K) \mid a_{uv} = 0 \ \text{ при } \ \ 0 < u - v < m\rangle \quad (m > 1).$$

Характеристичность членов L_m стандартного центрального ряда показывает

Лемма 3. *Нижние центральные ряды кольца Ли $R^{(-)}$ и присоединенной группы $G(R)$, а также ряд степеней $R^1 = R \supset R^2 \supset R^3 \supset \cdots$ кольца R совпадают со стандартным центральным рядом* (2.1).

Доказательство. Вначале покажем, что $\bigcap_{j=1}^{\infty} L_j = 0$. Допустим противное. Это означает, что пересечение содержит матрицу α с ненулевой (u, v)-координатой. Поэтому $(u - v)$-я диагональ матрицы α (т. е. совокупность элементов $a_{u-v+1,1}$, $a_{u-v+2,2}$, $\ldots$, a_{uv}, $\ldots$) ненулевая. Следовательно, $\alpha \notin L_i$, $i = u - v + 1, u - v + 2, \ldots$. Полученное противоречие доказывает формулу нашего пересечения.

Когда $k, m \in \mathbb{N}$, находим

$$L_k L_m = R^{k+m} \mod L_j \quad (j > k + m).$$

Поэтому индукция по j дает равенства $L_j = R^j$ для всех j. Для взаимных коммутантов в кольце Ли $R^{(-)}$ и присоединенной группе $G(R)$ аналогично получаем $L_k * L_m = L_{k+m}$ и $[L_k, L_m] = L_{k+m}$ соответственно. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Выделим сейчас в кольце $NT(\mathbb{N}, K)$ идеалы

$$T_{ij} = \left\langle \alpha = \|a_{uv}\| \in NT(\mathbb{N}, K) \mid a_{uv} = 0, \text{ если } \ u < i \ \text{ или } \ v > j \right\rangle \quad (i, j \in \mathbb{N}),$$

$$T_{i,\infty} = \left\langle \alpha = \|a_{uv}\| \in NT(\mathbb{N}, K) \mid a_{uv} = 0, \text{ если } \ u < i \right\rangle \quad (i \in \mathbb{N})$$

и их пересечения FT_{ij} и $FT_{i,\infty}$ с подкольцом $FNT(\mathbb{N}, K)$. Несложно проверяются равенства

$$T_{ij} = T_{ii-1} \cap T_{j+1j} = Ke_{ij} + Q_{ij} \quad (i > j), \tag{2.2}$$

где $Q_{ij} = T_{ij} \cap L_{i-j+1}$.

Согласно [9, теорема 2], справедлива

Лемма 4. *Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля. Тогда T_{i+1i} $(i = 1, 2, \ldots)$ исчерпывают все максимальные абелевы идеалы в кольце $R = NT(\mathbb{N}, K)$ и в ассоциированном кольце Ли $R^{(-)}$, а также все максимальные абелевы нормальные подгруппы присоединенной группы $G(R)$.*

Лемма 5. *Если K — ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля и $R = NT(\mathbb{N}, K)$, то все L_j, $T_{n,\infty}$, T_{ij} и Q_{ij} $(i > j)$ характеристичны в кольцах R, $R^{(-)}$, а также в присоединенной группе $G(R)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристичность всех L_j следует из леммы 3, в силу которой ряд (2.1) есть нижний центральный ряд и в $R^{(-)}$, и в $G(R)$. Согласно лемме 4 произвольный автоморфизм

$$\varphi \in \mathrm{Aut}\ R \cup \mathrm{Aut}\ R^{(-)} \cup \mathrm{Aut}\ G(R)$$

индуцирует подстановку на множестве идеалов T_{j+1j}. Взаимные коммутанты $T_{i+1i} * T_{j+1j}$ в $R^{(-)}$ и $[T_{i+1i}, T_{j+1j}]$ в $G(R)$ для фиксированного i являются ненулевыми по модулю L_3 точно для двух значений j, кроме случая крайнего $i = 1$ с единственным $j = 2$. Таким образом, приходим к равенствам $\varphi(T_{i+1i}) = T_{i+1i}$ для $i = 1, 2$; равенства с заменой i на $i + 1$ находим аналогично. Индукцией по i получаем те же равенства для каждого i. С учетом (2.2) характеристичность всех T_{ij} $(i > j)$ доказана. Отсюда несложно вытекает характеристичность всех $T_{n,\infty}$. Это завершает доказательство леммы.

Убывающий ряд идеалов $T_{2,\infty} = R \supset T_{3,\infty} \supset \cdots \supset T_{n,\infty} \supset \cdots$ имеет нулевое пересечение. Действительно, если матрица из R ненулевая, то ее j-я строка для некоторого номера j является ненулевой и поэтому матрица не лежит в $T_{j+1,\infty}$.

Далее используем изоморфизмы $NT(\mathbb{N}, K)/T_{n+1,\infty} \simeq NT(n, K)$ $(n > 1)$. В силу (2.2) и леммы 5 для любого автоморфизма φ получаем $\varphi(T_{ij}) = T_{ij} \supset Q_{ij}$. В частности, φ однозначно определяет автоморфизмы φ_{ij} аддитивной группы основного кольца K такие, что

$$\varphi(xe_{ij}) = \varphi_{ij}(x)e_{ij} \mod Q_{ij} \quad (x \in K, \ i > j).$$

Цепь $\mathbb{N}$ не допускает нетривиальных автоморфизмов и антиавтоморфизмов. Поэтому, согласно [13, теорема 1; 1] φ действует по модулю L_2 как произведение диагонального автоморфизма и автоморфизма, индуцированного автоморфизмом основного кольца K. С точностью до умножения на соответствующие стандартные автоморфизмы можем считать действие φ по модулю L_2 тождественным.

Любой отрезок цепи $\mathbb{N}$, отличный от нее, конечен. С учетом [1; 13] φ действует на каждый фактор $NT(\mathbb{N}, K)/T_{n+1,\infty}$ $(n > 4)$ как произведение внутреннего автоморфизма и автоморфизма, тождественного по модулю m-го гиперцентра при $m < 4$. Напомним, что верхний центральный или гиперцентральный ряд $Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \cdots \subseteq Z_m \subseteq Z_{m+1} \subseteq \cdots$ группы или кольца Ли Ω ($Z_0 = 1$ или $Z_0 = 0$ соответственно) определяется рекуррентно по правилу: Z_1– центр в Ω, Z_{m+1}– прообраз центра фактора Ω/Z_m. В цепи $\mathbb{N}$ нет последнего элемента. Поэтому как в $R^{(-)}$, так и в $G(R)$ центры являются нулевыми, гиперцентральные ряды стабилизируются на нулевом идеале и φ — внутренний автоморфизм.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Левчук В.М.** Некоторые локально нильпотентные кольца и их присоединенные группы // Мат. заметки. 1987. Т. 42, №5. С. 631–641.
2. **Kuzucuoglu F., Levchuk V.M.** Isomorphism of certain locally nilpotent finitary groups and associated rings // Acta Appl. Math. 2004. Vol. 82, no. 2. P. 169–181. doi: 10.1023/B:ACAP.0000027533.59937.14 .
3. **Мерзляков Ю. И.** Эквиподгруппы унитреугольных групп: критерий самонормализуемости // Докл. РАН. 1994. Т.339, №6. С. 732–735.
4. **Холубовски В.** Алгебраические свойства групп бесконечных матриц: автореферат дис. ... д-ра физ.-мат. наук / С.-Петерб. гос. ун-т. Санкт-Петербург, 2007. 27 с.
5. **Холубовски В.** Алгебраические свойства групп бесконечных матриц. Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Slaskiej, 2017. 136 p.
6. **Slowik R.** Bijective maps of infinite triangular and unitriangular matrices preserving commutators // Linear and Multilinear Algebra. 2013. Vol. 61, no. 8. P. 1028–1040. doi: 10.1080/03081087.2012.728214 .
7. **Levchuk V. M., Radchenko O. V.** Derivations of the locally nilpotent matrix rings // J. Algebra Appl. 2010. Vol. 9, no. 5. C. 717–724. doi: 10.1142/S0219498810004154 .
8. **Holubowski W., Slowik R.** Parabolic subgroups of groups of column-finite infinite matrices // Linear Algebra Appl. 2012. Vol. 437, no. 2. P. 519—524. doi: 10.1016/j.laa.2012.02.020 .
9. **Левчук В.М., Беккер Ю.В., Сотникова Е.А.** Нефинитарные обобщения нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2019. Т. 29. С. 39–51. doi: 10.26516/1997-7670.2019.29.39
10. **Курош А. Г.** Общая алгебра. СПб.: Лань, 1975. 262 с.
11. **Kuratovski K., Mostovski A.** Set theory. Amsterdam: North-Holland, 1968. 417 p. (Ser. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).
12. **Dubish R., Perlis S.** On total nilpotent groups // Amer. J. Math. 1951. Vol.73, no. 3. P. 439–452.
13. **Левчук В.М.** Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. II. Группы автоморфизмов // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, №4. С. 543–557.

Поступила 11.07.2020
После доработки 22.07.2020
Принята к публикации 10.08.2020

Беккер Юлианна Владимировна
аспирант
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета, г. Красноярск
e-mail: angel220@bk.ru

Левчук Денис Владимирович
канд.физ.-мат.наук, доцент кафедры МОДУС
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета, г. Красноярск
e-mail: Dlevchuk82@mail.ru

Сотникова Елена Андреевна
магистрант
Институт математики и фундаментальной информатики
Сибирского федерального университета, г. Красноярск
e-mail: olgaRV520@yandex.ru

REFERENCES

1. Levchuk V.M. Some locally nilpotent rings and their adjoined groups. *Mat. Zametki*, 1987, vol. 42, no. 5, pp. 848–853. doi: 10.1007/BF01137426 .
2. Kuzucuoglu F., Levchuk V.M. Isomorphism of certain locally nilpotent finitary groups and associated rings. *Acta Appl. Math.*, 2004, vol. 82, no. 2, pp. 169–181. doi: 10.1023/B:ACAP.0000027533.59937.14 .
3. Merzlyakov Yu.I. Equisubgroups of unitriangular groups: a criterion for self-normalizability. *Dokl. Math.*, 1995, vol. 50, no. 3, pp. 507–511.
4. Holubovski W. *Algebraic properties of groups of infinite matrices.* Abstract of Dr. Phys.–Math. Sci. Dissertation. St. Petersburg: St. Petersburg State Univ., 2007, 27 p.
5. Holubowski W. *Algebraicheskie svoistva grupp beskonechnykh matrits* [Algebraic properties of groups of infinite matrices]. Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Slaskiej, 2017, 140 p.
6. Slowik R. Bijective maps of infinite triangular and unitriangular matrices preserving commutators. *Linear and Multilinear Algebra*, 2013, vol. 61, no. 8, pp. 1028–1040. doi: 10.1080/03081087.2012.728214 .
7. Levchuk V.M., Radchenko O.V. Derivations of the locally nilpotent matrix rings. *J. Algebra Appl.*, 2010, vol. 9, no. 5, pp. 717–724. doi: 10.1142/S0219498810004154 .
8. Holubowski W., Slowik R. Parabolic subgroups of groups of column-finite infinite matrices. *Linear Algebra Appl.*, 2012, vol. 437, no. 2, pp. 519–524. doi: 10.1016/j.laa.2012.02.020 .
9. Bekker J.V., Levchuk V.M., Sotnikova E.A. Non-finitary generalizations of nil-triangular subalgebras of Chevalley algebras. *The Bulletin of Irkutsk State University*, Series Mathematics, 2019, vol. 29, pp. 39–51 (in Russian). doi: 10.26516/1997-7670.2019.29.39 .
10. Kurosh A.G. *Obshchaya algebra* [General Algebra]. St. Petersburg: Lan' Publ, 1975, 262 p.
11. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory.* Studies in logic and the foundations of mathematics, vol. 53. Amsterdam: North-Holland, 1968, 417 p. ISBN: 9780444534170 .
12. Dubish R., Perlis S. On total nilpotent algebras. *Amer. J. Math.*, 1951, vol. 73, no. 3, pp. 439–452. doi: 10.2307/2372186 .
13. Levchuk V.M. Connections between a unitriangular group and certain rings. II. Groups of automorphisms. *Sib. Math. J.*, 1983, vol. 24, no. 4, pp. 543–557. doi: 10.1007/BF00969552 .

Received July 11, 2020
Revised July 22, 2020
Accepted August 10, 2020

Funding Agency: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center, which is financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the project for the establishment and development of regional centers for mathematical research and education (agreement no. 075-02-2020-1534/1).

Julianna Vladimirovna Bekker, doctoral student, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: angel220@bk.ru .

Denis Vladimirovich Levchuk , Cand. Sci. (Phys.-Math.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: Dlevchuk82@mail.ru .

Elena Andreevna Sotnikova, graduate student, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russia, e-mail: olgaRV520@yandex.ru .

Yu. V. Bekker, D. V. Levchuk, E. A. Sotnikova. Automorphisms of rings of nonfinitary niltriangular matrices, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 7–13 .