ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 519.688

ДИСКРЕТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА МУЛЬТИМНОЖЕСТВАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПОЛНЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ[1]

В. М. Чернов, М. А. Чичева

В работе рассматривается специфическая версия авторского подхода к синтезу базисов дискретных ортогональных преобразований (ДОП), учитывающего связь структуры базисных функций преобразования и существованием той или иной системы счисления на (многомерном) множестве индексов входного сигнала. В отличие от случая прототипной работы В. М. Чернова “Дискретные ортогональные преобразования с базисами, порожденными самоподобными последовательностями” (2018), в которой рассматривались ДО, ассоциированные с безизбыточными системами счисления (т. е. с такими системами счисления, в которых каждый индекс входного сигнала имел бы единственное представление в избранной системе счисления), в данной работе рассматривается случай так называемых полных систем счисления. Для них уже нет биективного соответствия между множеством входных индексов ДОП и множеством их цифровых представлений. Потенциально такие постановки прикладных задач естественно возникают в распознавании изображений, искусственном интеллекте, теории формальных языков, математическом программировании и в других областях, где анализируемые объекты характеризуются многими разнородными признаками, которые могут быть и количественными, и качественными, и смешанными. При этом сами объекты могут существовать в нескольких экземплярах, имеющих, в частности и противоречивые описания, которые должны рассматриваться и анализироваться как единое целое. Такие многопризнаковые объекты можно представить как мультимножества (“множества с повторениями”). В силу того, что дискретный спектральный анализ является одним из основных инструментов перечисленных задач в классической “множественной” интерпретации объектов исследования, в настоящей работе предпринимается попытка экстраполяции некоторых идей и методов дискретного спектрального анализа на случай анализа мультимножественных объектов.

Ключевые слова: мультимножества, дискретные ортогональные преобразования, полные последовательности.

V. M. Chernov, M. A. Chicheva. Discrete orthogonal transforms on multisets associated with complete sequences.

We consider a specific version of the authors’ approach to the synthesis of bases of discrete orthogonal transforms (DOTs). The approach takes into account the relation between the structure of basis functions of a transform and the existence of a certain numeral system on the (multidimensional) index set of the input signal. In contrast to Chernov’s prototype paper “Discrete orthogonal transforms with bases generated by self-similar sequences” (2018), which was concerned with DOTs associated with irredundant numeral systems (where each index of the input signal has a unique representation in a chosen numeral system), in the present paper we study the case of the so-called complete numeral systems. In this case, there is no bijection between the set of input indices of DOTs and the set of their digital representations. Potentially, such statements of applied problems naturally appear in image recognition, artificial intelligence, theory of formal languages, mathematical programming, and other areas where the analyzed objects are characterized by many heterogeneous attributes, which can be quantitative, qualitative, and mixed. There may be several copies of each objects, and the copies may have inconsistent descriptions, which must be considered and analyzed as a whole. Such objects with many attributes can be represented as multisets (“sets with repetitions”). Since discrete spectral analysis is a basic tool for solving the described problems in the classical "multiple” interpretation of objects, we try to extend some ideas and methods of spectral analysis to the case of multiset objects.

Keywords: multisets, discrete orthogonal transformations, complete sequences.

MSC: 42A38, 42B10

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-249-257

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ “Кристаллография и фотоника” РАН (соглашение № 007 - ГЗ/Ч3363/26) — в части исследования систем счисления и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты РФФИ №19-07-00357_а, № 18-29-03135_ мк) — в части исследования машинной арифметики.

Введение

Побудительным мотивом к написанию этой работы явилось знакомство с работами [1; 2] А. Б. Петровского — одного из немногочисленных исследователей в области теории мультимножеств, которое убедило авторов и в нетривиальности теории, и в ее востребованности. Теоретическим аспектам теории мультимножеств посвящено незаслуженно мало работ. Хотя множества с повторениями традиционно изучались в комбинаторной математике (см. [3; 4]), Д. Кнут был, по-видимому, первым, кто обратил внимание на необходимость рассмотрения мультимножеств как самостоятельных математических объектов. Как отмечается в [2], теоретико-мультимножественные постановки прикладных задач естественно возникают в "распознавании изображений, искусственном интеллекте, теории формальных языков, математическом программировании и других областях, где анализируемые объекты характеризуются многими разнородными признаками, которые могут быть и количественными, и качественными, и смешанными. При этом сами объекты могут существовать в нескольких экземплярах, имеющих, в частности, и противоречивые описания, которые должны рассматриваться и анализироваться как единое целое. Примерами подобных задач служат классификация и упорядочение объектов, оцененных несколькими экспертами по многим качественным критериям, распознавание графических символов, обработка текстовых документов. Такие многопризнаковые объекты можно представить как мультимножества".

Еще одной причиной рассмотрения авторами дискретных ортогональных преобразований (ДОП), определенных на мультимножествах, явился многолетний интерес к различным аспектам теории дискретного спектрального анализа и, в частности, желание продолжить исследования, начатые в [5], где вводится в рассмотрение новый класс ДОП — *дискретные ортогональные преобразования с самоподобными базисами.* В [5] приведено описание методов синтеза базисов новых ДОП, явным образом использующих интерпретацию целочисленных индексов преобразуемых сигналов как векторов "цифр" $(n_0, \ldots, n_{d-1})$ целочисленных входных индексов, представленных в некоторой традиционной g-ичной системе счисления:

$$n = \sum_{j=0}^{d(n)-1} n_j g^j, \quad n_j \in \{0, 1, \ldots, g-1\}.$$

В работах [6; 7] анонсированы приложения таких ДОП и к прикладным задачам анализа цифровых изображений, и к классическим "аппаратным" проблемам аналитической теории чисел — проблемам продолжения рядов Дирихле.

Существенно, что традиционные g-ичные системы счисления являются *безызбыточными*: тогда равенство $n = \sum_{j=0}^{d(n)-1} n_j g^j$, $n_j \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$, устанавливает биективное соответствие между *множеством* $\mathbf{Z}^+$ неотрицательных целых чисел и множеством

$$\mathbf{Z}_g^{<\infty} = \bigcup_{d \in \mathbf{Z}^+} \big\{(n_0, \ldots, n_{d-1}, 0, 0, \ldots), \quad n_j \in \{0, 1, \ldots, g-1\}\big\}.$$

Если система счисления с базисом $F(j)$ *избыточная*, т. е. если некоторые числа допускают несколько различных представлений в форме

$$n = \sum_{j=0}^{d(n)-1} n_j F(j), \quad n_j \in \Omega \subset \mathbf{Z},$$

можно считать, что последнее равенство устанавливает биекцию между множеством

$$\mathbf{Z}_F^{<\infty} = \big\{(n_0, \ldots, n_{d(n)-1}, 0, 0, \ldots),\ n_j \in \Omega \subset \mathbf{Z}\big\}$$

и некоторым *мультимножеством*, состоящим из целых чисел.

Так как результаты исследований [1;2] позволяют сделать вывод об отсутствие каких-либо непреодолимых идейных трудностей при экстраполяции классических конструкций меры и метрики на случай мультимножеств, то одной из целей данной статьи является попытка перенесения идей и методов работы [5] на случаи некоторых *мультимножеств*, или *“множеств с повторениями”*.

1. Полные последовательности

Использование термина “система счисления” в традиционном смысле не является принципиальным в контексте рассматриваемых в настоящей работе вопросов. Принципиальным является то, что целые числа можно представить (может быть, и *неединственным* образом) линейными комбинациями значений некоторой базовой последовательности с коэффициентами из некоторого конечного подмножества — *цифрового алфавита*, целых или целых алгебраических чисел. Наиболее изученным классом таких последовательностей является класс полных последовательностей [8].

О п р е д е л е н и е. Целочисленная последовательность $\phi(k)$ называется *полной последовательностью*, если любое положительное целое число может быть выражено в виде суммы значений членов последовательности, при этом каждое значение можно использовать только один раз.

Утверждение 1 [8, критерий Brown]. *Пусть целочисленная последовательность $\phi(m)$ неубывающая и $\Phi(\mu) = \sum\limits_{m=0}^{\mu} \phi(m)$. Тогда условия $\phi(0) = 1$, $\Phi(\mu-1) \geq \phi(\mu)-1$ $\forall\mu \geq 1$ являются необходимыми и достаточными для последовательности $\phi(m)$, чтобы она была полной.*

Последнее утверждение позволяет в случае полноты последовательности $\phi(m)$ находить представление элементов $z \in \mathbf{Z}$ в форме

$$z = \sum_{k=0}^{d(z)} \xi_k \phi(k), \quad \xi_k \in \{0, 1\},$$

с помощью так называемого *жадного* алгоритма: от числа z последовательно, шаг за шагом, отщепляются слагаемые, равные наибольшему члену последовательности z_t, не превосходящему

$$z\colon z_t = \sum_{k=0}^{t} \xi_k \phi(k).$$

Следствие. *Из утверждения* 1 *легко выводим, что условия*

$$\phi(0) = 1, \quad \forall\, m > 1 \quad 2\phi(m) > \phi(m+1)$$

являются достаточными для того, чтобы последовательность $\phi(m)$ была полной.

Однако эти условия не являются необходимыми: существуют полные последовательности, которые не удовлетворяют условиям данного следствия. Например, последовательность, состоящая из 1 и первого простого числа после каждой степени двойки.

В данной статье мы развиваем дальше идею работы [5], использующей индексацию входных аргументов линейными комбинациями значений некоторой *базовой* последовательности, но вместо естественно возникающих в [5] представлений целочисленных индексов в g-ичных системах счисления, т. е. линейными комбинациями степеней целого числа g, будем рассматривать индексацию входных аргументов линейными комбинациями элементов некоторой *полной* последовательности $\phi(k)$.

П р и м е р ы полных последовательностей. Ниже приведен далеко не полный список наиболее известных полных последовательностей.

1. *Последовательность простых чисел* $P(k) \stackrel{\Delta}{=} \phi(k)$, начинающаяся с $\phi(0) = 1$ (несмотря на “каноничность” проблем, связанных с простыми числами, относительно новый взгляд на эту последовательность “в целом” содержится в работе С. С. Пиллаи (см. [9]). Для последовательности (простых) чисел $P(k) \stackrel{\Delta}{=} \phi(k)$ из постулата Бертрана $P(k-1) < P(k) < 2P(k-1)$ следует выполнимость критерия Бруна (считая, что $\{P(k)\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$).

2. *Последовательность обычных чисел Фибоначчи* $\Phi(k)\colon \Phi(k+2) = \Phi(k+1) + \Phi(k)$; $\Phi(0) = \Phi(1) = 1$.

Справедливость неравенства утверждения 1 для этой последовательности легко следует из того, что (формула Бине)

$$\Phi(k) = \frac{\varphi^k - (1-\varphi)^k}{\sqrt{5}}, \quad \{\Phi(k)\} = \{1, 2, 3, 5, 8, \ldots\},$$

где $\varphi = 1,618034\ldots$ — “золотое сечение”.

3. *Все последовательности “обобщенных n-шаговых” чисел Фибоначчи* (n-step Fibonacci numbers; n-bonacci numbers (см. [10–12])): $\phi_n(k+n) = \phi_n(k + (n-1)) + \ldots + \phi_n(k)$.

Терминология, используемая в англоязычной литературе, приведена в табл. 1.

Справедливость неравенства (выполнимость критерия Бруна) следует из того факта, что для комплексного корня ν характеристического полинома $\chi(t) = t^n - t^{n-1} - \ldots - t^1 - t^0$ с максимальным модулем выполняется неравенство $1 < \max|\nu| < 2$ (см. [12]).

4. *Центральные многоугольные числа* $L(k)$ — максимальное число частей плоскости, которое можно получить ее разбиением с помощью k прямых; в англоязычной литературе для этой последовательности встречается название *Lazy caterer’s sequence* — “последовательность ленивого поставщика” (см. [13; 14]). Известно, что

$$L(k) = 1 + \frac{k(k+1)}{2}, \quad L(k) = \{1, 2, 4, 7, 11, 22, \ldots\}, \quad k \geq 0.$$

Поэтому выполнимость критерия Бруна выводим из полиномиального порядка роста $L(k)$.

В табл. 2 приводятся численные примеры представления чисел суммами небольшой длины $d \leq 5$ относительно базисов, порожденных полными последовательностями $P(k), \Phi(k), L(k)$.

2. Синтез ДОП на мультимножествах, ассоциированных с полными последовательностями

2.1. Синтез области определения ДОП

Пусть $\phi(k)$ — полная последовательность,

$$M = M_d = \sum_{j=0}^{d-1} 1 \cdot \phi(j).$$

Рассмотрим множество $\mathbf{W}^d$ битовых d-мерных векторов:

$$\mathbf{W}^d = \{\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_{d-1})\colon w_j \in \{0, 1\}\}$$

и отображение

$$\tau\colon \mathbf{W}^d \to \mathbf{Z}\colon \mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_{d-1}) \mapsto w_0\phi(0) + \ldots + w_{d-1}\phi(d-1) = \tau(\mathbf{w})$$
$$= \Phi_{\mathbf{w}}(w_0, \ldots, w_{d-1}) = \Phi_{\mathbf{w}}.$$

Т а б л и ц а 1

n	Название последовательности		n	Название последовательности
2	fibonacci		5	pentanacci
3	tribonacci		6	hexanacci
4	tetranacci		7	heptanacci

Т а б л и ц а 2

Натуральные числа, представимые суммой первых пяти членов полных последовательностей

“Цифры” (коды) $\phi(0),\ldots,\phi(4)\ldots$ натуральных чисел	Полные последовательности		
	$P(k)$	$\Phi(k)$	$L(k)$
0,0,0,0,0,...	0	0	0
1,0,0,0.0,...	1	1	1
0,1,0,0.0,...	2	2	2
1,1,0,0.0,...	**3**	**3**	3
0,0,1,0.0,...	**3**	**3**	4
1,0,1,0.0,...	4	4	5
0,1,1,0.0,...	**5**	5	6
1,1,1,0.0,...	6	6	**7**
0,0,0,1,0,...	**5**	5	**7**
1,0,0,1.0,...	6	6	8
0,1,0,1.0,...	7	7	9
1,1,0,1.0,...	**8**	**8**	10
0,0,1,1.0,...	**8**	**8**	11
1,0,1,1.0,...	9	9	12
1,1,1,1.0,...	10	10	13
1,1,1,1.0,...	11	11	14
0,0,0,0,1,...	7	**8**	11
1,0,0,0.1,...	**8**	9	12
0,1,0,0.1,...	9	10	13
1,1,0,0.1,...	**10**	**11**	14
0,0,1,0,1,...	**10**	**11**	15
1,0,1,0.1,...	11	12	16
0,1,1,0.1,...	**12**	13	17
1,1,1,0.1,...	**13**	**14**	**18**
0,0,0,1,1,...	**12**	13	**18**
1,0,0,1.1,...	**13**	**14**	19
0,1,0,1.1,...	**14**	15	20
1,1,0,1.1,...	**15**	**16**	21
0,0,1,1.1,...	**15**	**16**	22
1,0,1,1.1,...	16	17	23
0,1,1,1.1,...	17	18	24
1,1,1,1.1,...	18	19	25

В силу свойств полных последовательностей числа $\tau(\mathbf{w}) = \Phi_w(w_0, w_1, \dots, w_{d-1})$ образуют подмножество $\mathbf{Z}_M = \{0, 1, \dots, M\} \subset \mathbf{Z}$, причем отображение τ не является инъективным: разные векторы $\mathbf{w}$ могут отображаться в одинаковые элементы $\Phi_{\mathbf{w}} = \tau(\mathbf{w})$. Поэтому совокупность чисел $\{\Phi_{\mathbf{w}} \colon \mathbf{w} \in \mathbf{W}^d\} = \{\tau(\mathbf{w}) \colon \mathbf{w} \in \mathbf{W}^d\} = \mathbf{Z}_M \subset \mathbf{Z}$ является *“множеством с повторениями”*, т. е. *мультимножеством.*

На множестве $\mathbf{W}^d$ введем отношение эквивалентности $(\sim)$

$$\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_{d-1}) \sim \mathbf{v}$$

$$= (v_0, v_1, \dots, v_{d-1}) \leftrightarrow w = w_0\phi(0) + \ldots + w_{d-1}\phi(d-1) = v_0\phi(0) + \ldots + v_{d-1}\phi(d-1) = v,$$

которое индуцирует и отношение эквивалентности на $\mathbf{Z}_M$, определяя, таким образом, на множестве $\tau(\mathbf{W}^d)$ структуру фактор-множества, состоящего из классов эквивалентных элементов, т. е. классов чисел, равных, но имеющих различное представление в форме

$$z = \sum_{k=0}^{d(z)} \xi_k \phi(k), \;\; \xi_k \in \{0, 1\}.$$

Далее класс эквивалентных элементов из $\tau(\mathbf{W}^d)$, содержащий элемент z, будем обозначать как $\langle z \rangle$, т. е. $\tau(\mathbf{W}^d) = \bigcup\limits_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}^d} \langle \Phi_{\mathbf{w}} \rangle$. Таким образом, фактор-множество $\tau(\mathbf{W}^d)$ может пониматься как объектное множество — объединение непересекающихся классов эквивалентных чисел, каждый из которых в свою очередь ассоциируется с множеством бинарных векторов из $\mathbf{W}^d$, а именно, с множеством τ-прообразов элементов $\tau(\mathbf{W}^d)$.

2.2. Синтез базисных функций ДОП

Пусть $\{\phi(n)\}$ — полная последовательность. Рассмотрим

$$F_d(z) = \prod_{k=0}^{d-1} \Big(1 + z^{\phi(k)} \exp\Big\{\frac{\pi i 2^k}{2^t}\Big\}\Big) = \sum_{n \in \Delta} a(n) z^n, \quad \Delta = \{n \colon \phi(1) \le n \le \phi(1) + \ldots + \phi(d-1)\}.$$

Если $n = \nu_1 \phi(1) + \ldots + \nu_d \phi(d), \;\; \nu_j \in \{0, 1\}$, то

$$a(n) \doteq a(\nu_1, \dots, \nu_d) = \exp \sum_{k=1}^{d} \nu_k \Big\{\frac{\pi i 2^k}{2^t}\Big\}.$$

Равенство для $F_d(z)$ можно также записать в виде, явно подчеркивающем его “мультимножественный” характер:

$$F_d(z) = \prod_{k=0}^{d-1} \Big(1 + z^{\phi(k)} \exp\Big\{\frac{\pi i 2^k}{2^t}\Big\}\Big) = \sum_{n \in \Delta} a(n) z^n = \sum_{n \in \Delta} z^n \Big(\sum_{\Upsilon(n)} \exp \sum_{k=1}^{d} \nu_k \Big\{\frac{\pi i 2^k}{2^t}\Big\}\Big),$$

и суммирование в средней сумме распространяется на $\{0, 1\}$-множество “цифр”

$$\Upsilon(n) = \big\{(\nu_1, \dots, \nu_d) \colon n = \nu_1 \phi(1) + \ldots + \nu_d \phi(d), \;\; \nu_j \in \{0, 1\}\big\}.$$

Положим далее

$$\prod_{k=0}^{t-1} \Big(1 + z^{\phi(k)} \exp\Big\{\frac{\pi i 2^k m}{2^t}\Big\}\Big) = \sum_{n \in \Delta} a^{(m)}(n) z^n,$$

т. е.

$$a^{(m)}(n) = \exp \sum_{k=1}^{d} \nu_k \Big\{\frac{\pi i 2^k m}{2^t}\Big\}.$$

Утверждение 2. *Для функций* $\Psi_m(n) = a^{(m)}(n)$ *выполняется соотношение ортогональности в форме* $\langle \Psi_m, \Psi_\mu \rangle = \sum\limits_{n=0}^{2^t-1} \Psi_m(n)\overline{\Psi_\mu(n)} = \delta_{m,\mu} 2^t$, *где* $\delta_{m,\mu}$ *— дельта функция Кронекера.*

Доказательство. Действительно, формально имеем при нечетном ρ и некотором τ, $(0 \le \tau < t)$ соотношение делимости для m, μ: $(m-\mu) = 2^\tau \rho$:

$$\langle \Psi_m, \Psi_\mu \rangle = \sum_{n=0}^{2^e-1} \Psi_m(n)\overline{\Psi_\mu(n)} = \sum_{n=0}^{2^e-1} a^{(m)}(n)\,\overline{a^{(\mu)}(n)}$$

$$= \sum_{n}^{2^e-1} \exp\Big\{\frac{\pi i(m-\mu)}{2^{t-1}}\Big(\sum_{k\in\Delta_n} 2^k\Big)\Big\} = \sum_{n}^{2^e} \exp\Big\{\frac{\pi i(m-\mu)}{2^{t-1}}\Big(\sum_{k\in\Delta_n} 2^k\Big)\Big\} z^n\Big|_{z=1}$$

$$= \prod_{k=0}^{t-1}\Big(1 + z^{\phi(k)} \exp\Big\{\frac{\pi i 2^k(m-\mu)}{2^{t-1}}\Big\}\Big) z^n\Big|_{z=1} = \prod_{k=0}^{t-1}\Big(1 + \exp\Big\{\frac{\pi i 2^k(m-\mu)}{2^{t-1}}\Big\}\Big);$$

и, по крайней мере, один из сомножителей в последнем произведении при $(m-\mu) \neq 0$ обращается в нуль.

Заключение

Необходимо, наверное, все же признать, что *первым* толчком к написанию этой работы явилось осознание авторами простого (житейского) тезиса: “*Эквивалентные* объекты далеко не всегда *тождественные* объекты”. И, как следствие, осознание того факта, что множества, рассматриваемые в математике, практически всегда являются фактор-множествами, т. е. редукциями относительно некоторого отношения эквивалентности, факт наличия которого зачастую оправдывается невнятными рассуждениями об абстрактности Науки (= “если что-то не абстрактно, то это *что-то* уж точно НЕ Наука”).

Глобальная программа Н. Бурбаки построения всей современной математики на единой методологической основе — теории множеств на практике привела к дилемме:

(а) следует либо довести до всеобщего сведения, что математика если и изучает в некоторой степени явления окружающего мира, то только с *точностью до* ..., например, чувственного восприятия субъектами явлений окружающего мира, отправляя эти чувственные, непосредственные восприятия субъектов (и авторов, и читателей, в частности) в ядро гомоморфизма, порожденного вышеупомянутым отношением эквивалентности;

(б) либо, если уж и признать познавательную роль математики как развитой теории исключительно фактор-множеств, одновременно следует передать мировоззренческую функцию науки (псевдо)формализованным описаниям отношений эквивалентности объектов окружающего мира, т. е. в частности, *метаматематическим* теориям или вообще естественнонаучным и экспериментальным исследованиям.

Возможность многократного вхождения элементов в мультимножество, а вернее, интерпретация исследуемого объекта и модели его наблюдения именно в виде “эквивалентных, но нетождественных”, создает новое качество, которое отличает мультимножество от обычного “ординарного” множества и порождает существенно большее, чем у множеств, разнообразие видов и особенностей мультимножеств, и оставляет простор для дальнейших исследований в этой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Петровский А. Б.** Пространства множеств и мультимножеств. Москва: Едиториал УРСС, 2003. 248 p.
2. **Петровский А. Б.** Теория измеримых множеств и мультимножеств. Москва: Наука, 2018. 359 с.

3. **М. Айгнер.** Комбинаторная теория; пер. с англ. Москва: Мир, 1982. 558 с.
4. **Баранов В. И., Стечкин Б. С.** Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. Москва: Наука, 1989. 240 с.
5. **Чернов В. М.** Дискретные ортогональные преобразования с базисами, порожденными самоподобными последовательностями // Компьютерная оптика. 2018. Т. 42, № 5. С. 904–911.
6. **Chernov V. M.** Some spectral properties of fractal curves // Machine Graphics & Vision. 1996. Vol. 5, no. 1/2. P. 413–422.
7. **Chernov V. M.** Tauber theorems for Dirichlet series and fractals // Proc. ICPR'96. Vienna, 1996. Vol. 2, Track B. P. 656–661. doi: 10.1109/ICPR.1996.546905 .
8. **Brown J. L.** Note on complete sequences of integers // The American Math. Monthly. 1961. Vol. 68, no. 6. P. 557–560. doi: 10.2307/2311150 .
9. **Pillai S. S.** An arithmetical function concerning primes // Annamalai University J. 1930. pp. 159–167.
10. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). [e-resource]. URL: https://oeis.org/ .
11. **Feinberg M.** Fibonacci — Tribonacci. Fibonacci. Quart. 1963. Vol. 1, no. 30. P. 71–74.
12. **Noe T. D.** Primes in Fibonacci n-step and Lucas n-step sequences // J. Integer Seq. 2005. Vol. 8, Article 05.4.4. 12 p.
13. **Moore T. L.** Using Euler's formula to solve plane separation problems // The College Mathematics J. 1991. Vol. 22, no. 2. P. 125–130.
doi:10.2307/2686448 .
14. **Steiner J.** Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes (A few statements about the division of the plane and of space) // J. Reine Angew. Math. 1826. Vol. 1. P. 349–364. doi: 10.1515/crll.1826.1.349 .

Поступила 14.04.2020
После доработки 23.06.2020
Принята к публикации 27.07.2020

Чернов Владимир Михайлович
д.-р физ.-мат наук
главный науч. сотрудник
Институт систем обработки изображений РАН,
филиал ФНИЦ "Кристаллография и фотоника" РАН,
г. Самара;
профессор
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева,
г. Самара
e-mail: schraube@samtel.ru

Чичева Марина Александровна
канд. техн. наук
старший науч. сотрудник
Институт систем обработки изображений РАН,
филиал ФНИЦ "Кристаллография и фотоника" РАН,
г. Самара;
доцент
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева,
г. Самара
e-mail: mchi@geosamara.ru

REFERENCES

1. Petrovskii A.B. *Prostranstva mnozhestv i mul'timnozhestv* [Spaces of sets and multisets]. Moscow: Editorial URSS, 2003. 248 p. ISBN: 5-354-00486-1 .
2. Petrovskii A.B. *Teoriya izmerimykh mnozhestv i mul'timnozhestv* [Theory of measurable sets and multisets]. Moscow: Nauka Publ., 2018, 359 p. ISBN: 978-5-02-040124-2 .

3. Aigner M. *Combinatorial theory.* N Y: Springer-Verlag, 1979, 483 p. doi: 10.1007/978-1-4615-6666-3 . Translated to Russian under the title *Kombinatornaya teoriya.* Moscow: Mir Publ., 1982. 558 p.
4. Stechkin B.S., Baranov V.I. *Extremal combinatorial problems and their applications.* Dordrecht: Springer, 1995, 210 p. doi: 10.1007/978-0-585-29602-9 . Original Russian text published in Stechkin B.S., Baranov V.I. *Ekstremal'nye kombinatornye zadachi i ikh prilozheniya.* Moscow: Nauka Publ., 1989. 240 p.
5. Chernov V.M. Discrete orthogonal transforms with bases generated by self-similar sequences. *Computer Optics*, 2018, vol. 42, no. 5, pp. 904–911 (in Russian). doi: 10.18287/2412-6179-2018-42-5-904-911 .
6. Chernov V.M. Some spectral properties of fractal curves. *Machine Graphics & Vision*, 1996, vol. 5, no. 1/2, pp. 413–422.
7. Chernov V.M. Tauber theorems for Dirichlet series and fractals. *Proc. of ICPR'96, Vienna*, 1996, vol. 2, Track B, pp. 656–661. doi: 10.1109/ICPR.1996.546905 .
8. Brown J.L. Note on complete sequences of integers. *The American Mathematical Monthly*, 1961, vol. 68, no. 6, pp. 557–560. doi: 10.2307/2311150 .
9. Pillai S.S. An arithmetical function concerning primes. *Annamalai University Journal*, 1930, pp. 159–167.
10. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS). Available at: https://oeis.org/ .
11. Feinberg M. Fibonacci-Tribonacci. *The Fibonacci quarterly*, 1963, vol. 1(30), pp. 71–74.
12. Noe T.D. Primes in Fibonacci $n-$step and Lucas $n-$step sequences. *J. Integer Seq.*, 2005, vol. 8, art.-no. 05.4.4, 12 p.
13. Moore T.L. Using Euler's formula to solve plane separation problems. *The College Mathematics Journal*, 1991, vol. 22, no. 2, pp. 125–130. doi: 10.2307/2686448 .
14. Steiner J. A Few Statements about the Division of the Plane and of Space. *J. Reine Angew. Math.*, 1826, no. 1, pp. 349–364 (in German). doi: 10.1515/crll.1826.1.349 .

Received April 14, 2020
Revised June 23, 2020
Accepted July 27, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the state assignment to the Federal Research Center "Crystallography and Photonics" of the Russian Academy of Sciences (agreement no. 007-GZ/Ch3363/26) in studying numeral systems and by the Russian Foundation for Basic Research (project nos. 19-07-00357_a and 18-29-03135) in studying machine arithmetics.

Vladimir Mikhailovich Chernov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences — Branch of the Federal Scientific Research Center Crystallography and Photonics of Russian Academy of Sciences, Samara, 443001 Russia; Samara National Research University, Samara, 443086 Russia, e-mail: schraube@samtel.ru .

Marina Aleksandrovna Chicheva, Cand. Sci. (Phys.-Math), Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences — Branch of the Federal Scientific Research Center Crystallography and Photonics of Russian Academy of Sciences, Samara, 443001 Russia; Samara National Research University, Samara, 443086 Russia, e-mail: mchi@geosamara.ru .

Cite this article as: V. M. Chernov, M. A. Chicheva. Discrete orthogonal transforms on multisets associated with complete sequences, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 249–257 .