ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 519.17

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{30,22,9;1,3,20\}$[1]

К. С. Ефимов, А. А. Махнев

Дистанционно регулярный граф диаметра 3 называется графом Шилла, если он имеет второе собственное значение $\theta_1 = a_3$. В этом случае $a = a_3$ делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Кулен и Пак перечислили массивы пересечений дистанционно регулярных графов Шилла с $b = 3$. Известно существование графов с массивами пересечений $\{12,10,5;1,1,8\}$ и $\{12,10,3;1,3,8\}$. Ранее было доказано несуществование графов Шилла с массивами персечений $\{12,10,2;1,2,8\}$, $\{27,20,10;1,2,18\}$, $\{42,30,12;1,6,28\}$ и $\{105,72,24;1,12,70\}$. В работе изучены автоморфизмы дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{30,22,9;1,3,20\}$, являющегося графом Шилла с $b = 3$. Пусть a — вершина графа Γ, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ — неразрешимая группа, $\bar{G} = G/S(G)$ и $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G}$. Тогда $\bar{T} \cong L_2(7), A_7, A_8$ или $U_3(5)$. Если Γ есть реберно-симметричным графом, то группа T — расширение неприводимого $F_2U_3(5)$-модуля V с помощью $U_3(5)$, размерность V над F_2 равна 20, 28, 56, 104 или 288.

Ключевые слова: граф Шилла, автоморфизм графа.

K. S. Efimov, A. A. Makhnev. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array {30,22,9;1,3,20}.

A distance-regular graph Γ of diameter 3 is called a Shilla graph if it has the second eigenvalue $\theta_1 = a_3$. In this case $a = a_3$ divides k and we set $b = b(\Gamma) = k/a$. Koolen and Park obtained the list of intersection arrays for Shilla graphs with $b = 3$. There exist graphs with intersection arrays $\{12,10,5;1,1,8\}$ and $\{12,10,3;1,3,8\}$. The nonexistence of graphs with intersection arrays $\{12,10,2;1,2,8\}$, $\{27,20,10;1,2,18\}$, $\{42,30,12;1,6,28\}$, and $\{105,72,24;1,12,70\}$ was proved earlier. In this paper we study the automorphisms of a distance-regular graph Γ with intersection array $\{30,22,9;1,3,20\}$, which is a Shilla graph with $b = 3$. Assume that a is a vertex of Γ, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ is a nonsolvable group, $\bar{G} = G/S(G)$, and $\bar{T}$ is the socle of $\bar{G}$. Then $\bar{T} \cong L_2(7), A_7, A_8$, or $U_3(5)$. If Γ is arc-transitive, then T is an extension of an irreducible $F_2U_3(5)$-module V by $U_3(5)$ and the dimension of V over F_3 is 20, 28, 56, 104, or 288.

Keywords: Shilla graph, graph automorphism.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-23-31

Введение

Пусть Γ — граф диаметра d. Тогда через Γ_i, где $i \le d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

С определением дистанционно регулярного графа с массивом пересечений

$$\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$$

можно ознакомиться в работе [1].

Для автоморфизма g графа Γ через $\mathrm{Fix}(g)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, остающихся неподвижными под действием g. Пусть $\alpha_i(g)$ — число вершин x графа Γ таких, что $d(x, x^g) = i$.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 с собственным значением θ_1, равным a_3. Для графа Шилла a_3 делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a_3$.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований — ГФЕН Китая (проект 20-51-53013).

В статье Дж. Кулена, Й. Пак [2] введено понятие графа Шилла и найдены возможные массивы пересечений этих графов для параметра $b = 2$ и 3. Отметим, что для всех графов Шилла с $b = 2$ известны их существование и единственность [2, теорема 12]. Среди 12 найденных Дж. Куленом и Й. Пак возможных массивов пересечений графов Шилла с $b = 3$ [2, теорема 19] всего для двух массивов доказано существование и для одного единственность. Позже в работах А. Е. Броувера, С. Самолоя, Ч. Варованнотаи [3], И. Н. Белоусова, А. А. Махнева [4; 5] и А. А. Махнева, М. П. Голубятникова (2019) было доказано несуществование графов для еще четырех массивов из списка Кулена — Пак.

Естественной представляется задача исследовать оставшиеся массивы на предмет возможного построения графов по группе автоморфизмов. В статьях Н. Д. Зюляркиной, А. А. Махнева (2011) и А. А. Махнева (2019) были найдены возможные автоморфизмы графов Шилла с массивами пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$ и $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$ соответственно. В данной работе найдены возможные автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$.

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$ имеет $v = 1+30+220+99 = 350$ вершин и спектр $30^1, 10^{63}, 0^{154}, -5^{132}$. Ввиду границы Дельсарта порядок клики в Γ не превосходит 7 $(1-k/\theta_3 = 7)$. Если C является 7-кликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma - C$ смежна с 0 или $(b_1/(\theta_3+1)+1-k/\theta_3) = -11/2+1+6$ вершинами из C [1, предложение 4.4.6]; противоречие. Значит, Γ не содержит 7-клик.

Теорема. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *Ω — пустой граф, либо*

$$p = 7, \quad \alpha_1(g) = 70s + 35t, \quad \alpha_3(g) = -140s + 105t, \quad s = -1 \;\text{ и }\; t = 2,$$

или $s = 0$ и $t \in \{0, 1, 2\}$, или $s = 1$ и $t \in \{2, 3\}$, или $s = 2$ и $t = 3$, либо

$$p = 5, \quad \alpha_1(g) = 25s - 50l + 25 \;\text{ и }\; \alpha_3(g) = 75s + 100l - 75,$$

либо

$$p = 2 \;\text{ и }\; \alpha_3(g) = 350;$$

(2) *Ω является m-кокликой, либо Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, $m \le 30$, $p = 5$, m делится на 5,*

$$\alpha_1(g) = 25(2t - s + 1) \;\text{ и }\; \alpha_3(g) = 9m - 100t + 175s - 75$$

или $p = 2$, m четно,

$$\alpha_1(g) = 20m + 25s - 175, \quad \alpha_3(g) = 350 - 31m$$

и s сравнимо с 3 по модулю 4, либо $m \le 29$, $p = 3$, m сравнимо с 2 по модулю 3, Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 2 в Γ,

$$\alpha_1(g) = 30s \;\text{ и }\; \alpha_3(g) = 9m - 60s + 75l;$$

(3) *Ω содержит ребро и является объединением по крайней мере двух изолированных клик, $p = 2$, вершины из разных максимальных клик графа Ω находятся на расстоянии 3 в Γ, порядок любой максимальной клики из Ω нечетен и число максимальных клик в Ω четно;*

(4) *Ω содержит геодезический 2-путь и $p \le 5$.*

Следствие. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Тогда $S(G)$ является $\{2, 5\}$-группой, цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен*

$L_2(7), A_7, A_8$ или $U_3(5)$. Если граф Γ реберно симметричен, a, b — смежные вершины из Γ, то $\bar{T} \cong U_3(5)$, $\bar{T}_a \cong M_{10}$, T — расширение неприводимого $F_2U_3(5)$-модуля V с помощью $U_3(5)$, размерность V над F_2 равна 20, 28, 56, 104 или 288.

В доказательстве теоремы применяется метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [6]. Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ дает мономиальное матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, \dots, W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [6, § 3.7]) для $g \in G$ получим равенство $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $Q = (Q_{ij})$ — дуальная матрица собственных значений графа.

1. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Ненулевые числа пересечений дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$ определяются следующим образом:*

(1) $p^1_{11} = 7$, $p^1_{12} = 22$, $p^1_{22} = 132$, $p^1_{23} = 66$, $p^1_{33} = 33$;
(2) $p^2_{11} = 3$, $p^2_{12} = 18$, $p^2_{13} = 9$, $p^2_{22} = 138$, $p^2_{23} = 63$, $p^2_{33} = 27$;
(3) $p^3_{12} = 20$, $p^3_{13} = 10$, $p^3_{22} = 140$, $p^3_{23} = 60$, $p^3_{33} = 28$.

Доказательство. Применяем лемму 4.1.7 из [1]. □

Лемма 2. *Пусть g — автоморфизм дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 63, χ_3 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 132. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$,*

$$\chi_1(g) = (9\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/50,$$

$$\chi_3(g) = (9\alpha_0(g) - 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/25 + 6.$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $63 - \chi_1(g)$ и $132 - \chi_3(g)$ делятся на p.

Доказательство. Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$. В матрице Q на месте (i, j) стоят числа $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$, где $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Поэтому

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 63 & 21 & 0 & -7 \\ 154 & 0 & -7 & 14 \\ 132 & -22 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (9\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/50$.

Аналогично

$$\chi_3(g) = (66\alpha_0(g) - 11\alpha_1(g) + 3\alpha_2(g) - 4\alpha_3(g))/175.$$

Подставляя $\alpha_2(g) = 350 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим

$$\chi_3(g) = (9\alpha_0(g) - 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/25 + 6.$$

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 2 работы 2010 г. (Гаврилюк А.Л., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН. 2010. Т 432, № 5. С. 583–587.) □

2. Изучение автоморфизмов графа Шилла с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если $p > 29$, то вместе с вершиной a подграф Ω содержит $[a]$. Противоречие с тем, что в данном случае $\Omega = \Gamma$. Значит, $p \leq 29$.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 7$, $\alpha_1(g) = 70s + 35t$, $\alpha_3(g) = -140s + 105t$, $s = -1$ и $t = 2$ или $s = 0$ и $t \in \{0, 1, 2\}$, или $s = 1$ и $t \in \{2, 3\}$, или $s = 2$ и $t = 3$, либо $p = 5$, $\alpha_1(g) = 25s - 50l$ и $\alpha_3(g) = 75s + 100l - 150$, либо $p = 2$ и $\alpha_3(g) = 350$*;

(2) *Ω не является кликой*;

(3) *если Ω является m-кокликой, то либо Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, $m \leq 30$, $p = 5$, m делится на 5, $\alpha_1(g) = 25(2t - s + 1)$ и $\alpha_3(g) = 9m - 100t + 175s - 75$ или $p = 2$, m четно, $\alpha_1(g) = 20m + 25s - 175$, $\alpha_3(g) = 350 - 31m$ и s сравнимо с 3 по модулю 4, либо $m \leq 29$, Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 2 в Γ, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 30s$ и $\alpha_3(g) = 9m - 60s + 75l$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если Ω — пустой граф, то число p равно 2, 5 или 7.

Пусть $p = 7$. Тогда по лемме 2 $\chi_3(g) = (-2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/25 + 6$, число $\chi_1(g) = (3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/50$ делится на 7. Отсюда $\alpha_3(g) = 3\alpha_1(g) - 350s$, $-\alpha_1(g) + 70s$ делится на 5, поэтому $\alpha_1(g) = 70s + 35t$ и $\alpha_3(g) = -140s + 105t$. Таким образом, либо $s = -1$ и $t = 2$, либо $s = 0$ и $t \in \{0, 1, 2\}$, либо $s = 1$ и $t \in \{2, 3\}$, либо $s = 2$ и $t = 3$.

Пусть $p = 5$. Тогда число $\chi_1(g) = (3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/50$ сравнимо с 3 по модулю 5, поэтому $\alpha_3(g) = 3\alpha_1(g) + 250l - 150$. Далее, число $\chi_3(g) = (-2\alpha_1(g) - (3\alpha_1(g) + 250l - 150))/25 + 6 = -\alpha_1(g)/5 - 10l + 12$ сравнимо с 2 по модулю 5, $\alpha_1(g) = 25s - 50l$ и $\alpha_3(g) = 75s + 100l - 150$.

Пусть $p = 2$. Так как числа a_1 и c_2 нечетны, то $\alpha_1(g) = \alpha_2(g) = 0$.

Пусть Ω является n-кликой. В случае $n = 1$ число p делит $k = 30$, $k_3 = 99$ и $v - 1 = 349$; противоречие. Если $n > 1$, то p делит $b_1 = 22$, $k_3 = 99$ и $a_1 - (n - 2) = 9 - n$; противоречие.

Пусть Ω является m-кокликой, $m > 1$. Тогда p делит 30 и $350 - m$. Если Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, то p делит $p^3_{33} - (m - 2) = 30 - m$ и $k_3 - (m - 1) = 100 - m$, поэтому $p = 2$ или $p = 5$. В случае $p = 5$ число m делится на 5, $\chi_3(g) = (9m - 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/25 + 6$ сравнимо с 2 по модулю 5 и $\alpha_3(g) = 9m - 2\alpha_1(g) + 125s - 25$. Далее, число $\chi_1(g) = (9m + 3\alpha_1(g) - (9m - 2\alpha_1(g) + 125s - 25))/50$ сравнимо с 3 по модулю 5, $\alpha_1(g) = 25(2t - s + 1)$ и $\alpha_3(g) = 9m - 100t + 175s - 75$.

В случае $p = 2$ число m четно. Если $d(u, u^g) = 1$ или $d(u, u^g) = 2$,то $[u] \cap [u^g]$ содержит вершину из Ω. Поэтому $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 30m$. Далее, число $\chi_3(g) = (9m - 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/25 + 6$ четно и $\alpha_3(g) = 9m - 2\alpha_1(g) + 50s$. Отсюда $31m + 9m - 2\alpha_1(g) + 50s = 350$, $\alpha_1(g) = 20m + 25s - 175$, s нечетно и $\alpha_3(g) = 9m - 2(20m + 25s - 175) + 50s = 350 - 31m$, m четно. Наконец, число $\chi_1(g) = (9m + 3(20m + 25s - 175) - (350 - 31m))/50 = 2m + (3s - 35)/2$ нечетно и $3s - 3$ сравнимо с 2 по модулю 4.

Если Ω содержит вершины a, b, находящиеся на расстоянии 2, то $p = 3$ и число m сравнимо с 2 по модулю 3. Далее, $c_3 = 20$, поэтому $\Gamma_3(a)$ не пересекает Ω и Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 2 в Γ.

Имеем $\chi_3(g) = (9m - 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/25 + 6$, поэтому $\alpha_3(g) = 9m - 2\alpha_1(g) + 75l$. Аналогично $\chi_1(g) = (9m + 3\alpha_1(g) - (9m - 2\alpha_1(g) + 75l))/50 = (\alpha_1(g) - 15l)/10$, $\alpha_1(g) = 30s$ и $\alpha_3(g) = 9m - 60s + 75l$.

Если некоторая вершина u смежна с 5 вершинами $a_1, a_2, \ldots, a_5$ из Ω, то $[u] \cap [a_i]$ содержит две вершины из $u^{\langle g \rangle}$ и еще 5 вершин. Противоречие с тем, что $[u]$ содержит две вершины из $u^{\langle g \rangle}$, 5 вершин из Ω и еще 25 вершин из $\Gamma - u^{\langle g \rangle}$. Итак, любая вершина смежна не более чем с 4 вершинами из Ω.

Если $m \geq 32$, то число ребер между $[a]$ и $\Omega-\{a\}$ не меньше 93. В этом случае некоторая вершина u из $[a]$ смежна с 4 вершинами из $\Omega-\{a\}$; противоречие. Значит, $m \leq 29$. □

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Ω содержит ребро и является объединением по крайней мере двух изолированных клик, то $p=2$, вершины из разных максимальных клик графа Ω находятся на расстоянии* 3 *в Γ, порядок любой максимальной клики из Ω нечетен и число максимальных клик в Ω четно*;

(2) *если $[a]$ содержится в Ω для некоторой вершины a, то $p \leq 3$*;

(3) *если Ω содержит геодезический 2-путь b,a,c, то $p \leq 5$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω содержит ребро $\{a,b\}$ и является объединением не менее двух изолированных клик. Так как по лемме 1 $p^1_{12}=22$, то $p=2$ или $p=11$. В последнем случае g поточечно фиксирует $[a]\cap[b]$, противоречие с тем, что порядок клики в Γ не больше 6. Далее, $c_2=3$, поэтому вершины из разных максимальных клик графа Ω находятся на расстоянии 3 в Γ.

Заметим, что максимальная клика графа Ω содержит нечетное число вершин. Отсюда число максимальных клик графа Ω четно.

Пусть $[a]$ содержится в Ω. Тогда любая вершина u из $\Gamma_2(a)-\Omega$ смежна с 3 вершинами b_1,b_2,b_3 из $[a]$ и орбита $u^{\langle g\rangle}$ не содержит геодезических 2-путей. Из этого следует, что $u^{\langle g\rangle}$ есть клика или коклика.

Если $u^{\langle g\rangle}$ — клика, то и $\{b_i\}\cup u^{\langle g\rangle}$ является кликой, поэтому $p \leq 5$. Но в случае $p=5$ подграф $\{b_1,b_2,b_3\}\cup u^{\langle g\rangle}$ является 8-кликой; противоречие. Если же $u^{\langle g\rangle}$ — коклика, то либо $p \leq 3$, либо $\{b_1,b_2,b_3\}$ является кликой, $p=5$, $[b_1]\cap[b_2]=\{a,b_3\}\cup u^{\langle g\rangle}$ и $[u^{g^i}]\cap[u^{g^j}]=\{b_1,b_2,b_3\}$. Теперь $[b_1]\cap[u]$ содержит b_2,b_3 и еще 5 вершин из $[b_1]-\Omega$, лежащих в $\langle g\rangle$-орбитах длины 5. Если число $\langle g\rangle$-орбит длины 5 на $[b_1]$ больше 3, то степень b_1 в $[a]$ не меньше 8; противоречие. Значит, число $\langle g\rangle$-орбит длины 5 на $[b_1]$ равно 3 и $|[u]\cap w^{\langle g\rangle}| \geq 3$ для некоторой вершины $w \in [b_1]-\Omega$. Противоречие с тем, что $[u]\cap u^{g^j}$ содержит вершину из $w^{\langle g\rangle}$. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b,a,c, Δ — связная компонента графа Ω содержащая a.

Если $p>7$, то по теореме Боуза — Доулинга Δ — вполне регулярный граф с параметрами $(v',k',7,3)$.

Если $p=23$, то $k'=7$; противоречие. Если $p=19$, то $k'=11$, противоречие с тем, что Δ содержит $7k'/2$ ребер. Аналогичное противоречие получается в случаях $p=17$ и $p=13$. Если $p=11$, то $k'=8$ и Δ является 8-кликой; противоречие.

Пусть $p=7$. Тогда Ω содержит вершину из $\Gamma_3(a)$, вершину из $\Gamma_2(a)$ и не менее 9 вершин из $[a]$. Покажем, что $|[a]-\Omega|=14$.

Допустим, что вершина u из $[a]-\Omega$ смежна с еще одной вершиной e из Ω. Тогда $e\in[a]$ и $[a]\cap[e]=u^{\langle g\rangle}$. В частности, b,a,e — геодезический 2-путь для любой вершины $b\in\Omega(a)-\{e\}$. Если $u^{\langle g\rangle}$ не является кокликой, то $u^{\langle g\rangle}$ — семиугольник. Далее, $[u]\cap[a]$ содержит e и еще 6 вершин из $[a]-\Omega$, поэтому $|[a]-\Omega|\geq 14$.

Допустим, что $|[a]-\Omega|=21$. Так как $\Omega(a)-\{e\}$ содержит несмежные вершины b,c, то можно утверждать, что b смежна с вершиной $w\in[a]-(\Omega\cup u^{\langle g\rangle})$. Подграф $\Omega(a)-\{b,e\}$ не является кликой, поэтому он содержит несмежные вершины c,d. Можно считать, что c смежна с вершиной из $[a]-(\Omega\cup u^{\langle g\rangle}\cup w^{\langle g\rangle})$. Противоречие с тем, что $|\Omega(a)-\{b,c,e\}|=6$ и $\Omega(a)-\{b,c,e\}$ не является кликой. Итак, $|[a]-\Omega|=14$.

Пусть $w\in[a]-(\Omega\cup u^{\langle g\rangle})$. Если $u^{\langle g\rangle}$ — коклика, то $[u]\cap[a]$ содержит не менее 6 вершин из $w^{\langle g\rangle}$; противоречие. Значит, $u^{\langle g\rangle}$ — семиугольник. Если u смежна с вершиной e из $\Omega(a)$, то $[u]\cap[a]$ содержит не менее 4 вершин из $w^{\langle g\rangle}$. В этом случае $[w]$ содержит две вершины y,z, находящиеся на расстоянии 2 в $u^{\langle g\rangle}$, противоречие с тем, что $[y]\cap[z]$ содержит a,e,w и вершину из $u^{\langle g\rangle}$. Если же u не смежна с вершинами из $\Omega(a)$, то $[u]\cap[a]$ содержит не менее 5 вершин из $w^{\langle g\rangle}$. В этом случае для вершин y, z, находящихся на расстоянии 2 в $u^{\langle g\rangle}$, подграф $[y]\cap[z]$ содержит a и не менее 3 вершин из $w^{\langle g\rangle}$; противоречие. □

Из лемм 3, 4 следует теорема. □

3. Вершинно симметричный граф с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве его вершин. Ввиду теоремы 1 имеем $|G| = 2^\beta 3^\gamma 5^\delta 7$, $|G : G_a| = 350$ и $|G_a|$ не делится на 7. Пусть a — вершина графа Γ, $\bar T$ — цоколь группы $\bar G = G/S(G)$ и f — элемент порядка 7 из G.

Лемма 5. *Если g — элемент порядка 5 из $C_G(f)$, то $\alpha_3(g) = 350$ и порядок силовской 5-подгруппы из $C_G(f)$ делит 5.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть g — элемент порядка 5 из $C_G(f)$. По теореме 1 граф $\mathrm{Fix}(f)$ является пустым, $\alpha_1(f) = 70s + 35t$, $\alpha_3(f) = -140s + 105t$, $s = -1$ и $t = 2$, или $s = 0$ и $t \in \{0, 1, 2\}$, или $s = 1$ и $t \in \{2, 3\}$, или $s = 2$ и $t = 3$.

Пусть $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Ω — пустой граф, то по теореме 1 числа $\alpha_1(g) = 25(s - 2l + 1)$ и $\alpha_3(g) = 25(3s + 4l - 3)$ делятся на 7. Отсюда $s = 3, 10, \ldots$ и $l = 2, 7, \ldots$, поэтому $s = 3, l = 2$ и $\alpha_3(g) = 350$.

Если Ω — непустой граф, то по теореме 1 Ω либо является m-кокликой, либо содержит геодезический 2-путь. В первом случае m делится на 35, противоречие с тем, что $m \le 30$.

Положим $|\Omega| = 35t$. Тогда число $\chi_3(g) = (9\alpha_0(g) - 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/25 + 6$ сравнимо с 2 по модулю 5, поэтому $(9\alpha_0(g) - 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/25$ сравнимо с 1 по модулю 5. Отсюда $\alpha_3(g) = 315t - 2\alpha_1(g) + 125s - 25$, $5s - 1$ делится на 7 и $s = -4, 3$. Далее, число $\chi_1(g) = (315t + 3\alpha_1(g) - (315t - 2\alpha_1(g) + 125s - 25))/50$ сравнимо с 3 по модулю 5, соответственно $\alpha_1(g) = 25s + 50l + 25$, $s + 2l + 1$ делится на 7 и $l = -2, 5$.

Итак, $\alpha_1(g) = 25s + 50l + 25$, $\alpha_3(g) = 315t + 75s - 100l - 75$ и $350t + 100s - 50l - 50 \le 350$. Отсюда $s = -4$, $l = 5$ и $t = 3$, поэтому $|\Omega| = 105$, $\alpha_1(g) = 175$ и $\alpha_3(g) = 70$. Теперь число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не больше $175 \cdot 4$, и некоторая вершина a из Ω смежна не более чем с $175 \cdot 4/105 = 28/3$ вершинами из $\Gamma - \Omega$. В этом случае $[a] - \Omega = u^{\langle g\rangle}$, $[a] \cap [u]$ содержит 4 вершины из $u^{\langle g\rangle}$ и 3-клику из $\Omega(a)$. Противоречие с тем, что $\{a\} \cup u^{\langle g\rangle} \cup ([u] \cap \Omega(a))$ является 9-кликой.

Если порядок силовской 5-подгруппы P из $C_G(f)$ равен 25, то на Γ имеются две $P\langle f\rangle$-орбиты длин 175, причем расстояние между двумя вершинами любой орбиты равно 3. Противоречие с тем, что Γ является двудольным графом. □

Лемма 6. *$S(G)$ является $\{2, 5\}$-группой, цоколь $\bar T$ группы $\bar G = G/S(G)$ — простая неабелева группа, и выполняется одно из утверждений:*

(1) $\bar T \cong L_2(7)$, индекс $|S(G) : S(G)_a|$ равен 25 или 50 и $\bar T_a \cong S_4, A_4$;

(2) $\bar T \cong A_7$, индекс $|S(G) : S(G)_a|$ равен 25 или 50 и $\bar T_a$ — расширение $Z_3 \times A_4$ с помощью группы порядка 2 или $\bar T_a \cong A_6$;

(3) $\bar T \cong A_8$, индекс $|S(G) : S(G)_a|$ равен 5 и $\bar T_a$ — расширение элементарной абелевой группы порядка 16 с помощью $S_3 \times S_3$;

(4) $\bar T \cong U_3(5)$, $\bar T_a \cong A_6, M_{10}$ и либо $|S(G) : S(G)_a| = 2$, либо $S(G) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S = O_7(G)$ — неединичная группа. Ввиду леммы 5 G_a является $\{5, 7\}'$-группой, противоречие с неразрешимостью G. Значит, $S(G)$ есть $\{2, 5\}$-группа.

Согласно лемме 5 группа $\bar T$ простая и ее порядок делится на 7.

По [7, табл. 1] группа $\bar T$ изоморфна $L_2(7)$, $L_2(8)$, $U_3(3)$, A_7, $U_3(5)$, $L_3(4)$, A_8, A_9, A_{10}, J_2, $U_4(3)$, $Sp_6(2)$, $\Omega_8^+(2)$.

Напомним, что $\bar{T}$ содержит подгруппу $\bar{T}_a$ индекса, делящегося на 7 и делящего $5^2 \cdot 14$. Поэтому $\bar{T} \cong L_2(7), A_7, A_8, U_3(5)$.

Если $\bar{T} \cong L_2(7)$, то индекс $|S(G) : S(G)_a|$ равен 25 или 50 (и $\bar{T}_a \cong S_4, A_4$), если $\bar{T} \cong A_7$, то индекс $|S(G) : S(G)_a|$ равен 25 или 50 (и $\bar{T}_a$ — расширение $Z_3 \times A_4$ с помощью группы порядка 2 или $\bar{T}_a \cong A_6$). Если $\bar{T} \cong A_8$, то индекс $|S(G) : S(G)_a| = 5$ (и $\bar{T}_a$ — расширение элементарной абелевой группы порядка 16 с помощью $S_3 \times S_3$).

Если $\bar{T} \cong U_3(5)$, то $\bar{T}_a \cong A_6, M_{10}$. В этом случае либо $|S(G) : S(G)_a| = 2$, либо $S(G) = 1$. □

Пусть до конца работы G_a действует транзитивно на $[a]$ и $b \in [a]$.

Лемма 7. *Если $\bar{T} \cong U_3(5)$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $|S(G) : S(G)_a| = 2$, *T — расширение неприводимого $F_2U_3(5)$-модуля V с помощью $U_3(5)$, размерность V над F_2 равна* 20, 28, 56, 104 *или* 288;

(2) $T \cong Z_2 \times U_3(5)$, $T_a \cong Z_2 \times A_6$ *или* M_{10};

(3) $T \cong U_3(5)$ *и* $T_a \cong A_6$;

(4) T — *точное расширение* $U_3(5)$ *с помощью группы порядка* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $|S(G) : S(G)_a| = 2$, то по лемме 6 либо G — расширение неприводимого $F_2U_3(5)$-модуля V с помощью $U_3(5)$, либо $|S(G)| = 2$. В первом случае G_a — расширение подмодуля V_0 с помощью M_{10}, $|V : V_0| = 2$. По [8] размерность V над F_2 равна 20, 28, 56, 104 или 288. Во втором случае $T \cong Z_2 \times U_3(5)$, $T_a \cong Z_2 \times A_6$ или M_{10}.

Если $S(G) = 1$, то по лемме 6 либо $T \cong U_3(5)$ и $T_a \cong A_6$, либо T — точное расширение $U_3(5)$ с помощью группы порядка 2, $|T_a : A_6| = 4$ и Γ является объединением двух G'-орбит длины 175. □

Заметим, что $U_3(5)$ содержит три класса сопряженных подгрупп, изоморфных A_6, все эти подгруппы сопряжены в $\mathrm{Aut}(U_3(5))$.

Пусть $T \cong U_3(5)$ и $T_a \cong A_6$. Тогда на Γ имеются две T_a-орбиты длины 1, по четыре орбиты длин 6, 36 и одна — длины 180; противоречие.

Пусть $T \cong Z_2 \times U_3(5)$. Если $T_a \cong M_{10}$, то на Γ имеются либо по две T_a-орбиты длин 1, 12, 72, 90, либо по две T_a-орбиты длин 1, 12, 72 и одна — длины 180. В любом случае имеем противоречие. Если $T_a \cong Z_2 \times A_6$, то на Γ имеется две T_a-орбиты длины 1, по четыре орбиты длин 6, 36 и одна длины 180; противоречие.

Пусть T — точное расширение $U_3(5)$ с помощью группы порядка 2 (подгруппа индекса 3 из $\mathrm{Aut}(U_3(5))$). Тогда возможны два случая: на Γ имеется либо по две T_a-орбиты длин 1, 12, 72, 90, либо по одной орбите длин 1, 10, 12, 45,72, 90, 120. В любом случае получаем противоречие. □

Из леммы 7 следует заключение следствия в случае $\bar{T} \cong U_3(5)$. □

Пусть далее группа $\bar{T}$ не изоморфна $U_3(5)$.

Лемма 8. *Пусть G_a действует транзитивно на $[a]$ и $b \in [a]$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *индекс* $|S(G)_a : S(G)_{a,b}|$ *равен* 5 *или* 10, $\bar{T}_{a,b}$ — *расширение элементарной абелевой группы порядка* 16 *с помощью группы порядка* 6 *или* 12, $\bar{T}_{a,b} \cong A_5$ *или* $|\bar{T}_{a,b}|$ *делит* 8;

(2) *силовская* 5*-подгруппа* P *из* G_a *имеет на* $[a]$ *шесть орбит длины* 5, $\bar{T} \cong A_6$;

(3) *порядок силовской* 5*-подгруппы* P *из* G_a *делит* 5^7.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\bar{T}_a$ содержит подгруппу индекса, делящего 30, то в случае $\bar{T} \cong A_7$ получаем $\bar{T}_a \cong A_6$, $\bar{T}_{a,b} \cong A_5$ и $|S(G)_a : S(G)_{a,b}| = 5$, а в случае $\bar{T} \cong L_2(7)$ индекс $|S(G)_a : S(G)_{a,b}|$ равен 5 или 10. В случае $\bar{T}_a \cong A_8$ группа $\bar{T}_{a,b}$ — расширение элементарной абелевой группы порядка 16 с помощью группы порядка 6 или 12 и индекс $|S(G)_a : S(G)_{a,b}|$ равен 5 или 10. Утверждение (1) доказано.

Пусть P — силовская 5-подгруппа из G_a. Тогда на $[a]$ имеется шесть P-орбит длины 5: $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$, где $\Delta_1 = b^P$. Далее, подгруппа P_0 индекса 5 из P фиксирует каждую орбиту Δ_i. Так как G_a действует на $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_6\}$ транзитивно, то $\bar{T}_a \cong A_6$.

Заметим, что подгруппа P_1 индекса 5^6 из P_0 поточечно фиксирует $[a]$ и по лемме 5 $P_1 = 1$. $\square$

Завершим доказательство следствия. По лемме 8 порядок силовской 5-подгруппы P_0 из $S(G)_a$ делит 5^6. Пусть R — силовская 5-подгруппа из $S(G)$, содержащая P_0. Тогда $|R|$ делит 5^8. По [8] размерность неприводимого 5-модулярного представления группы A_6 равна 5, 8 или 10, а размерность неприводимого 5-модулярного представления группы A_7 равна 6, 8, 10 (над F_{25}), 13, 15, 20 или 35. Так как по лемме 5 число $|C_R(f)|$ делит 5 для элемента f порядка 7 из $N_G(R)$, то $|R| = 5^6$. Противоречие с действием группы A_6 на R_a. Следствие доказано. $\square$

Заключение. Для графов Шилла с $b = 3$ Кулен и Пак доказали, что имеется 12 допустимых массивов пересечений. Только для двух из них известно существование графов. Для четырех массивов доказано, что графы не существуют, а еще для трех массивов найдены возможные автоморфизмы графов. Таким образом, в классе графов Шилла с $b = 3$ осталось изучить свойства графов с массивами пересечений $\{60, 42, 18; 1, 6, 40\}$, $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$ и $\{93, 64, 24; 1, 6, 62\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Koolen J.H., Park J.** Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010. Vol. 31, no. 8. P. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012 .
3. **Brouwer A. E., Sumaloj S., Worawannotai C.** The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ and $\{36, 28, 4; 1, 2, 24\}$ // Australasian J. Comb. 2016. Vol. 66, no. 2. P. 330–332.
4. **Белоусов И.Н., Махнев А.А.** Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ и $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ не существуют // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Vol. 15. С. 1506–1512.
5. **Белоусов И.Н., Махнев А.А.** Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не существует // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Vol. 16. P. 206–216.
6. **Cameron P. J.** Permutation groups. London: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
7. **Zavarnitsine A. V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2009. Vol. 6. P. 1–12.
8. Atlas of finite groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p .

Поступила 2.03.2020
После доработки 26.05.2020
Принята к публикации 15.06.2020

Ефимов Константин Сергеевич
доцент
Уральский государственный экономический университет
г. Екатеринбург
e-mail: konstantin.s.efimov@gmail.com

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 0387506195 .
2. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012 .
3. Brouwer A.E., Sumaloj S., Worawannotai C. The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ and $\{36, 28, 4; 1, 2, 24\}$. *Australasian J. Comb.*, 2016, vol. 66, no. 2, pp. 330–332.
4. Belousov I.N., Makhnev A.A. Distance-regular graphs with intersection arrays $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ and $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ do not exist. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018, vol. 15, pp. 1506–1512 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2018.15.125 .
5. Belousov I.N., Makhnev A.A. Distance-regular graph with intersection arrays $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ does not exist. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, vol. 16, pp. 206–216 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2019.16.012 .
6. Cameron P. *Permutation Groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 220 p. ISBN: 0-521-65302-9 .
7. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.
8. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0198531990 .

Received March 2, 2020
Revised May 26, 2020
Accepted June 15, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research – the National Natural Science Foundation of China (project no. 20-51-53013_a).

Konstantin Sergeevich Efimov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural State University of Economics, Yekaterinburg, 620144 Russia, e-mail: konstantin.s.efimov@gmail.com .

Aleksandr Alekseevich Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: makhnev@imm.uran.ru .

K. S. Efimov, A. A. Makhnev. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array {30,22,9;1,3,20}, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 23–31 .