ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 512.53

1-РЕШЕТОЧНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ МОНОИДОВ, РАЗЛОЖИМЫХ В СВОБОДНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

А. Я. Овсянников

Пусть M и M' — моноиды. Обозначим через $\mathrm{Sub}^1 M$ решетку всех подмоноидов моноида M. 1-*решеточным изоморфизмом* моноида M на моноид M' называется всякий изоморфизм решетки $\mathrm{Sub}^1 M$ на решетку $\mathrm{Sub}^1 M'$. Говорят, что биекция φ моноида M на моноид M' *индуцирует* 1-решеточный изоморфизм ψ M на M', если $\varphi(K) = \psi(K)$ для любого подмоноида $K \in \mathrm{Sub}^1 M$. Моноид M *строго* 1-*решеточно определяется*, если всякий его 1-решеточный изоморфизм на произвольный моноид индуцируется некоторым изоморфизмом или антиизоморфизмом. Похожие понятия группы, строго определяющейся решеткой подгрупп и полугруппы, строго определяющейся решеткой подполугрупп, давно привлекали внимание и активно изучались в классах групп и полугрупп. В случае моноидов здесь почти ничего не было известно. Однако около 40 лет назад был поставлен вопрос: будет ли произвольный моноид, разложимый в свободное произведение, строго 1-решеточно определяться? Получен исчерпывающий ответ на этот вопрос, а именно доказано, что произвольный моноид, нетривиальным образом разложимый в свободное произведение, строго 1-решеточно определяется. Этот результат перекликается с известными утверждениями о строгой решеточной определяемости как группы, нетривиальным образом разложимой в свободное произведение, так и полугруппы, разложимый в свободное произведение.

Ключевые слова: моноид, решетка подмоноидов, свободное произведение, 1-решеточный изоморфизм.

A. Ya. Ovsyannikov. 1-Lattice isomorphisms of monoids decomposable into a free product.

Let M and M' be monoids. Denote by $\mathrm{Sub}^1 M$ the lattice of all submonoids of M. Any isomorphism of $\mathrm{Sub}^1 M$ onto the lattice $\mathrm{Sub}^1 M'$ is called a 1-*lattice isomorphism* of M onto M'. We say that a bijection φ of M onto M' *induces* a 1-lattice isomorphism ψ of M onto M' if $\varphi(K) = \psi(K)$ for any submonoid $K \in \mathrm{Sub}^1 M$. A monoid M *is strictly* 1-*lattice determined* if any of its 1-lattice isomorphisms onto an arbitrary monoid is induced either by an isomorphism or by an antiisomorphism. The similar notions of a group strictly determined by its subgroup lattice and a semigroup strictly determined by its subsemigroup lattice have long attracted attention and have been actively studied in the classes of groups and semigroups. For monoids almost nothing has been known here. However, the following question was asked about forty years ago: is any monoid that is decomposable into a free product strictly 1-lattice determined? A complete answer to this question is found. Namely, it is proved that an arbitrary monoid nontrivially decomposable into a free product is strictly 1-lattice determined. This result has something in common with the well-known results on the strictly lattice determinability of both a group nontrivially decomposable into a free product and a semigroup decomposable into a free product.

Keywords: monoid, submonoid lattice, free product, 1-lattice isomorphism.

MSC: 20M32

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-142-153

Введение

Изучение разнообразных взаимосвязей между алгебраическими системами и решетками их подсистем ведется на протяжении уже многих десятилетий. Среди типов таких алгебраических систем — группы, полугруппы, кольца, алгебры Ли и даже произвольные алгебры. Для групп соответствующие исследования были подытожены в монографии [14], а для полугрупп до начала 1990-х г. — в монографиях [12; 13]. И в последние годы работа здесь продолжается. Решеткам подполугрупп посвящена публикация [2], решеточные свойства полугрупп с дополнительной унарной операцией (эпигрупп) рассматриваются в [7]. Решеткам подколец посвящены исследования [5; 6], решеткам подалгебр алгебр Ли — работа [1]. Решетки поалгебр произвольных конечных алгебр являются предметом изучения в статье [8].

История изучения решеточных изоморфизмов полугрупп насчитывает уже около семидесяти лет и здесь получено множество разнообразных результатов. Исследования в этом направлении до начала 1990-х г. были отражены в монографиях [12; 13]. При этом 1-решеточным изоморфизмам моноидов практически не уделялось внимания, за исключением упомянутого ниже одного из результатов работы [3]. Отчасти это объясняется простейшими соображениями, приведенными в лемме 1.

В [9] было доказано, что *всякая группа, нетривиальным образом разложимая в свободное произведение, строго определяется решеткой подгрупп в классе всех групп.*

В [10] было доказано, что *всякая полугруппа. разложимая в свободное произведение, строго решеточно определяется в классе всех полугрупп.*

В [3] было, в частности, доказано, что *всякий моноид с сокращением, разложимый в свободное произведение двух нетривиальных моноидов, строго* 1*-решеточно определяется.*

В связи с этим в обзоре [11] был поставлен такой вопрос (воспроизведенный также в монографиях [12, с. 177; 13, p. 316]: *будет ли строго* 1*-решеточно определяться произвольный моноид, разложимый в свободное произведение моноидов?*

Настоящая работа посвящена доказательству следующего утверждения, дающего исчерпывающий ответ на указанный вопрос.

Теорема. *Всякий моноид, нетривиальным образом разложимый в свободное произведение, строго* 1*-решеточно определяется.*

1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть S — полугруппа без единицы и S^1 — моноид, полученный из S присоединением единицы. Тогда решетка $\mathrm{Sub}^1 S^1$ изоморфна решетке подполугрупп $\mathrm{Sub} S$.*

Полугруппы без единицы S и T решеточно изоморфны тогда и только тогда, когда моноиды S^1 и T^1 1-решеточно изоморфны.

Доказательство. Изоморфизмом решетки $\mathrm{Sub}^1 S^1$ на решетку $\mathrm{Sub} S$ является отображение $A \mapsto A\backslash\{1\}$ для каждого подмоноида $A \in \mathrm{Sub}^1 S^1$. Второе утверждение леммы — непосредственное следствие первого. Лемма доказана.

Пусть M — моноид, X — произвольное подмножество M.

Введем следующие обозначения:

$\langle\langle X\rangle\rangle$ — подмоноид;

$\langle X\rangle$ — подполугруппы, которые порождены множеством X;

I_M — множество всех элементов бесконечного порядка моноида M;

E_M — множество всех его идемпотентов, отличных от 1.

Пусть $\psi : \mathrm{Sub}^1 M \longrightarrow \mathrm{Sub}^1 M'$ — 1-решеточный изоморфизм моноида M на моноид M'. Тогда существует биекция $\varphi : I_M \longrightarrow I_{M'}$ такая, что $\psi\langle\langle x\rangle\rangle = \langle\langle \varphi(x)\rangle\rangle$ при всех $x \in I_M$, причем для любых $x \in I_M$, $n \in \mathbb{N}$ справедливо $\varphi(x^n) = \varphi(x)^n$. Будем говорить, что биекция φ *связана* с 1-решеточным изоморфизмом ψ. Эти факты доказываются точно так же, как для обычных решеточных изоморфизмов. Кроме того, ясно, что каждый атом решетки $\mathrm{Sub}^1 M$ является либо циклической подгруппой простого порядка с единицей 1, либо подмоноидом вида $\{e, 1\}$, где $e \in E_M$.

Лемма 2. *Бесконечная циклическая группа строго* 1*-решеточно определяется.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a\rangle \cup \langle a^{-1}\rangle \cup \{1\}$ — бесконечная циклическая группа и ψ — 1-решеточный изоморфизм моноида G на некоторый моноид H. Обозначим через φ биекцию G на H, связанную с 1-решеточным изоморфизмом ψ. Тогда $H = \langle\alpha\rangle \cup \langle\beta\rangle \cup \{1'\}$, где $\alpha = \varphi(a)$ и $\beta = \varphi(a^{-1})$.

Убедимся, что $\alpha\beta = 1'$. От противного, предположим что $\alpha\beta \neq 1'$. Тогда и $\beta\alpha \neq 1'$, поскольку в противном случае $\alpha\beta$ — идемпотент в H, отличный от $1'$, и отсюда согласно лемме 1.31 [4, с. 69] H является бициклическим моноидом. В частности, H имеет бесконечное множество идемпотентов, отличных от единицы, хотя G не имеет ни таких идемпотентов, ни подгрупп простого порядка. Следовательно, $\alpha\beta, \beta\alpha \in \langle\alpha\rangle \cup \langle\beta\rangle$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\alpha\beta, \beta\alpha \in \langle\alpha\rangle$. Тогда $\alpha\beta = \alpha^k$, $\beta\alpha = \alpha^m$ для некоторых $k, m \in \mathbb{N}$. Так как α — элемент бесконечного порядка, из равенств $\alpha^{k+1} = \alpha\beta\alpha = \alpha^{m+1}$ следует $k+1 = m+1$ и $k = m$, т. е. $\alpha\beta = \beta\alpha$. Из равенства $a^{-1} = aa^{-2}$ имеем $\beta \in \langle\langle \alpha, \beta^2 \rangle\rangle$, что невозможно. Таким образом, случай 1 невозможен.

2. $\alpha\beta, \beta\alpha \in \langle\beta\rangle$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему и также невозможен.

3. $\alpha\beta \in \langle\alpha\rangle$, $\beta\alpha \in \langle\beta\rangle$. Тогда $\alpha\beta = \alpha^k$, $\beta\alpha = \beta^m$ для некоторых $k, m \in \mathbb{N}$. Имеем $\alpha^{k+1} = \alpha\beta\alpha = \alpha\beta^m = \alpha^k\beta^{m-1} = \alpha^{2k-1}\beta^{m-2}\ldots = \alpha^{1+(k-1)m}$, откуда $\alpha^{k+1} = \alpha^{1+(k-1)m}$ и $k+1 = 1+(k-1)m$, т. е. $k = (k-1)m$. Последнее равенство возможно лишь в случае $k = m = 2$. Следовательно, $\alpha\beta = \alpha^2$, $\beta\alpha = \beta^2$. Снова из равенства $a^{-1} = aa^{-2}$ получаем $\beta \in \langle\langle \alpha, \beta^2 \rangle\rangle$, что невозможно. Таким образом, случай 3 невозможен.

4. $\alpha\beta \in \langle\beta\rangle$, $\beta\alpha \in \langle\alpha\rangle$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему и также невозможен.

Итак, $\alpha\beta = 1'$. Тогда и $\beta\alpha = 1'$, иначе, как в начале доказательства, придем к тому, что H — бициклический моноид. Таким образом, H является бесконечной циклической группой. Теперь ясно, что биекция φ — это изоморфизм. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть ψ — 1-решеточный изоморфизм непериодической группы G на моноид M. Тогда M — группа и ограничение ψ на решетку подгрупп* Subgr$G$ *группы G является изоморфизмом этой решетки на решетку подгрупп* Subgr$M$.

Доказательство. Пусть 1 $[1']$ — единица G $[M]$. Предположим, что M не является группой. Если γ — произвольный элемент бесконечного порядка из M, то $\psi^{-1}\langle\gamma\rangle = \langle g\rangle$, где $g \in G$ — элемент бесконечного порядка, порождающий бесконечную циклическую подгруппу с единицей 1, и по лемме 2 элемент γ порождает бесконечную циклическую подгруппу с единицей $1'$. Следовательно, M содержит элемент конечного порядка, некоторая степень которого есть идемпотент $\varepsilon \neq 1'$. Положим $\psi^{-1}\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle = \langle\langle h\rangle\rangle = \langle h\rangle$. Тогда $\langle h\rangle$ — циклическая группа простого порядка p. Зафиксируем элемент бесконечного порядка $g \in G$ и примем $\langle\langle\gamma\rangle\rangle = \psi\langle\langle g\rangle\rangle$. Согласно лемме 2 элемент γ порождает в M бесконечную циклическую подгруппу с единицей $1'$.

Покажем, что существует элемент $d \in \langle g, h\rangle$ бесконечного порядка, отличный от g и такой, что $g \in \langle h, d\rangle$. Если $g \neq h^{-1}gh$, то $d = h^{-1}gh$, поскольку $h^{-1} = h^{p-1}$. Если $g = h^{-1}gh$, то $hg = gh$ и $d = gh$.

Положим $\langle\langle\delta\rangle\rangle = \psi\langle\langle d\rangle\rangle$. Тогда $\delta \in \langle\gamma, \varepsilon\rangle$. Из условия $g \in \langle h, d\rangle = \langle\langle h, d\rangle\rangle$ следует $\gamma \in \langle\langle\varepsilon, \delta\rangle\rangle = \langle\varepsilon, \delta\rangle$. Так как $\delta \neq \gamma$, имеем $\gamma = \gamma^{m_1}\varepsilon\gamma^{m_2}\ldots\gamma^{m_s}\varepsilon\gamma^{m_{s+1}}$, где $s \in \mathbb{N}$, $m_1, m_{s+1} \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $m_2, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\gamma^{1-m_1-m_{s+1}} = \varepsilon\gamma^{m_2}\ldots\gamma^{m_s}\varepsilon$. Возьмем $\ell = 1 - m_1 - m_{s+1}$. Если $\ell = 0$, то $\varepsilon\gamma^{m_2}\ldots\gamma^{m_s}\varepsilon = 1'$, откуда следует $\varepsilon = 1'$, что невозможно. Значит, $\ell < 0$. Из равенства $\gamma^\ell = \varepsilon\gamma^{m_2}\ldots\gamma^{m_s}\varepsilon$ выводим, что $\gamma^\ell\varepsilon = \gamma^\ell$. Умножив слева обе части последнего равенства на $\gamma^{-\ell}$, получим $1'\varepsilon = 1'$ и опять $\varepsilon = 1'$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что M — группа.

Пусть H — произвольная подгруппа группы G. Покажем, что ψH — группа. Пусть $g \in H$. Если g — элемент конечного порядка, то $\psi\langle g\rangle$ — конечная циклическая подполугруппа группы M, т. е. подгруппа. Если g — элемент бесконечного порядка, то g порождает бесконечную циклическую подгруппу $K \subseteq H$ и согласно лемме 2 ее образ ψK — бесконечная циклическая группа. Так как $\psi H = \bigcup_{g\in H}\psi\langle g\rangle$, ясно, что ψH является подгруппой в M. Точно так же проверяется, что для любой подгруппы $L \subseteq M$ моноид $\psi^{-1}L$ является подгруппой в G. Следовательно, ограничение ψ на решетку подгрупп Subgr$G$ является изоморфизмом этой решетки на решетку подгрупп Subgr$M$. Лемма доказана.

Из леммы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Всякая непериодическая группа, которая строго определяется решеткой подгрупп в классе всех групп, также строго* 1*-решеточно определяется в классе всех моноидов.*

Лемма 4. *Если решетка подгрупп конечной циклической группы G изоморфна решетке подмоноидов полугруппы S^1 с присоединенной единицей, то эта решетка является цепью, а G — примарная циклическая группа.*

Доказательство. Решетка подгрупп группы G либо является цепью, либо разложима в прямое произведение неодноэлементных цепей. Второе невозможно, так как решетка подмоноидов моноида S^1, будучи изоморфной решетке подполугрупп полугруппы S, имеет единственный атом. Так как решетка подгрупп группы G — цепь, G есть примарная циклическая группа.

2. Доказательство теоремы

Достаточно рассмотреть случай свободного произведения двух нетривиальных моноидов. Обозначим свободное произведение моноидов A и B в многообразии всех моноидов через $A \star B$, а свободное произведение полугрупп S и T в многообразии всех полугрупп через $S * T$. Зафиксируем нетривиальные моноиды A и B. Пусть $M = A \star B$ — их свободное произведение в многообразии всех моноидов.

Если моноиды A и B — группы, то моноид M также будет непериодической группой. В этом случае утверждение теоремы обеспечивается следствием 1 и приведенным в начале основным результатом работы [9]. В дальнейшем будем предполагать для определенности, что моноид A не является группой.

Положим $C = M \backslash (A \cup B)$. Пусть $a_1, \dots, a_{n+1} \in A \backslash \{1\}$, $b_1, \dots, b_{n+1} \in B \backslash \{1\}$. Назовем элементы из C вида $a_1 b_1 \dots a_n b_n a_{n+1}$, $a_1 b_1 \dots a_n b_n$, $b_1 a_1 \dots b_n a_n$, $b_1 a_1 \dots b_n a_n b_{n+1}$ соответственно AA-, AB-, BA-, BB-*элементами. Длиной элемента* назовем его количество множителей. Элементы из $A \backslash \{1\}$ $[B \backslash \{1\}]$ будем называть AA-элементами [BB-элементами] длины 1. AA-элементы и BB-элементы имеют нечетную длину, AB-элементы и BA-элементы — четную.

По определению свободного произведения два элемента из $(A \star B) \backslash \{1\}$ равны в том и только том случае, когда равны их длины, они являются элементами одного типа и соответствующие их множители равны. Это определение используется для обоснования утверждений типа: если $a \in A \backslash \{1\}$, $b \in B \backslash \{1\}$, то $ba \notin \langle\langle x, y \rangle\rangle$ для любых AB-элементов x, y из множества C.

Обозначим через S_{11} $[S_{12}, S_{21}, S_{22}]$ множество всех AA-элементов [AB-элементов, BA-элементов, BB-элементов] моноида M.

Все утверждения следующей леммы получаются на основании определения равенства элементов в $(A \star B) \backslash \{1\}$.

Лемма 5. 1. *Множество $M_{ij} = S_{ij} \cup \{1\}$ при $i \neq j$ является подмоноидом в M и*

$$\text{если } j \neq k, \text{ то } M_{ij} M_{k\ell} \subseteq M_{i\ell} \quad \text{для всех} \quad i, j, k, \ell = 1, 2.$$

Если $x = x_1 c \in M_{ij}$, $y = d y_1 \in M_{jk}$, где $x_1 \in M_{i,3-j}$, $y_1 \in M_{j,3-k}$, $c, d \in A$ или $c, d \in B$ и $cd \neq 1$, то $xy \in M_{ik}$.

2. *Справедливы условия*

$$M_{ij} \cap M_{k\ell} = \{1\} \text{ если } i \neq k \text{ или } j \neq \ell. \tag{2.1}$$

3. *Все AB-элементы и BA-элементы лежат в I_M, т. е. S_{12} и S_{21} — полугруппы без идемпотентов и с сокращением.*

4. *Если для AA-элемента $a_1 b_1 \dots a_n b_n a_{n+1}$ [BB-элемента $b_1 a_1 \dots b_n a_n b_{n+1}$] справедливо условие $a_{n+1} a_1 \neq 1$ $[b_{n+1} b_1 \neq 1]$, то этот элемент лежит в I_M.*

5. *Для AA-элемента $x = a_1b_1\dots a_nb_na_{n+1}$ [BB-элемента $x = b_1a_1\dots b_na_nb_{n+1}$] справедливо условие $x \in E_M$ тогда и только тогда, когда*

при $n = 2k$ справедливы равенства

$a_{n+1}a_1 = 1, a_na_2 = 1, \dots, a_{k+1}a_{k-1} = 1,\ a_k^2 = a_k$ *и* $b_nb_1 = 1, b_{n-1}b_2 = 1, \dots, b_{k+1}b_k = 1$

$[b_{n+1}b_1 = 1, b_nb_2 = 1, \dots, b_{k+1}b_{k-1} = 1,\ b_k^2 = b_k$ *и* $a_na_1 = 1, a_{n-1}a_2 = 1, \dots, a_{k+1}a_k = 1]$;

при $n = 2k+1$ справедливы равенства

$a_{n+1}a_1 = 1, a_na_2 = 1\dots, a_{k+2}a_{k+1} = 1$ *и* $b_nb_1 = 1, b_{n-1}b_2 = 1\dots, b_{k+2}b_{k-1} = 1,\ b_{k+1}^2 = b_{k+1}$

$[b_{n+1}b_1 = 1, b_nb_2 = 1\dots, b_{k+2}b_{k+1} = 1$ *и* $a_na_1 = 1, a_{n-1}a_2 = 1\dots, a_{k+2}a_{k-1} = 1,\ a_{k+1}^2 = a_{k+1}]$.

Зафиксируем 1-решеточный изоморфизм ψ моноида M на моноид M'. Пусть 1 [$1'$] — единица моноида M [M'].

Через φ обозначим биекцию множества I_M на $I_{M'}$, связанную с ψ. Положим также $\varphi(1) = 1'$. Обозначим $A' = \psi A$, $B' = \psi B$, $M'_{ij} = \psi M_{ij} = \varphi(M_{ij})$ для всех $i \neq j$ $(i, j = 1, 2)$ и $M'_{ii} = \bigcup_{x \in S_{ii}} \psi\langle\langle x\rangle\rangle$ при $i = 1, 2$.

Лемма 6. *Справедливы равенства*

$$M' = \bigcup_{i,j=1}^{2} M'_{ij} \quad \text{и} \quad M'_{ij} \cap M'_{k\ell} = \{1'\} \quad \text{при} \quad i \neq k \quad \text{или} \quad j \neq \ell.$$

Доказательство. Зафиксируем $\xi \in M'\backslash\{1'\}$. Если подмоноид $\langle\langle\xi\rangle\rangle$ — однопокрывающий элемент в решетке Sub^1M', то $\psi^{-1}\langle\langle\xi\rangle\rangle = \langle\langle x\rangle\rangle$ для некоторого $x \in M\backslash\{1\}$. Тогда требуемое утверждение следует из равенства $M = \cup_{i,j=1}^2 M_{ij}$. Пусть $\langle\langle\xi\rangle\rangle$ не является однопокрывающим элементом. В этом случае ξ — групповой элемент конечного порядка, в частности, $\psi^{-1}\langle\langle\xi\rangle\rangle$ — конечный подмоноид в M. Пусть $\langle\langle\xi_1\rangle\rangle$ и $\langle\langle\xi_2\rangle\rangle$ — различные однопокрывающие элементы решетки $\mathrm{Sub}^1\langle\langle\xi\rangle\rangle$. Покажем, что $\psi^{-1}\langle\langle\xi_1\rangle\rangle$, $\psi^{-1}\langle\langle\xi_2\rangle\rangle$ содержатся в одном подмоноиде M_{ij}. Предположим, что это не так. В силу утверждения 5 леммы 5 тогда $\psi^{-1}\langle\langle\xi_1\rangle\rangle \subseteq M_{ii}$ и $\psi^{-1}\langle\langle\xi_2\rangle\rangle \subseteq M_{jj}$ при $i \neq j$. Следовательно, подмоноид $\psi^{-1}\langle\langle\xi\rangle\rangle$ содержит произведение элемента из S_{ii} на элемент из S_{jj}, что противоречит конечности этого подмоноида в силу утверждений 1 и 3 леммы 5. Таким образом, $\psi^{-1}\langle\langle\xi\rangle\rangle \subseteq M_{ii}$ при $i = 1$ или $i = 2$ и $\xi \in M'_{ii}$. Первое равенство доказано.

Остальные равенства непосредственно следуют из равенств (2.1). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $a \in S_{11}$, $b \in S_{22}$, $1 \notin \langle a\rangle \cup \langle b\rangle$. Тогда $1'$ является присоединенной единицей в моноиде $\psi\langle\langle a, b\rangle\rangle$.*

Доказательство. Из условия следует, что 1 — присоединенная единица в моноидах $\langle\langle a\rangle\rangle$ и $\langle\langle b\rangle\rangle$, поэтому 1 будет присоединенной единицей и в моноиде $\langle\langle a, b\rangle\rangle$, равном $(\langle a\rangle * \langle b\rangle)^1$. От противного, предположим, что $1'$ не является присоединенной единицей в $\psi\langle\langle a, b\rangle\rangle$. В этом случае для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in \psi\langle\langle a, b\rangle\rangle\backslash\{1'\}$ справедливо равенство

$$\gamma_1\gamma_2 = 1'. \tag{2.2}$$

Тогда $(\gamma_2\gamma_1)^2 = \gamma_2\gamma_1\gamma_2\gamma_1 = \gamma_2\gamma_1$, т. е. $\gamma_2\gamma_1$ — идемпотент в $\psi\langle\langle a, b\rangle\rangle$. Имеются следующие две возможности: $\gamma_2\gamma_1 = 1'$ или $\gamma_2\gamma_1 = \varepsilon \neq 1'$.

1. Пусть $\gamma_2\gamma_1 = \varepsilon \neq 1'$ для некоторого идемпотента $\varepsilon \in \psi\langle\langle a, b\rangle\rangle$. Отсюда, как уже упоминалось выше, согласно лемме 1.31 [4, с. 69] $\langle\langle\gamma_1, \gamma_2\rangle\rangle$ — бициклический моноид. Он содержит счетное множество идемпотентов, отличных от $1'$. Все они содержатся в $\psi\langle\langle a, b\rangle\rangle$. Так как $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ содержит не более трех идемпотентов (включая 1), это невозможно.

2. Пусть $\gamma_2\gamma_1 = 1'$. Тогда $\langle\langle\gamma_1, \gamma_2\rangle\rangle$ — циклическая группа. Здесь также возникают две возможности.

2.1. Пусть $\langle\!\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle\!\rangle$ — бесконечная циклическая группа. Согласно лемме 2 $\psi^{-1}\langle\!\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle\!\rangle$ — бесконечная циклическая подгруппа в $\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle$, что невозможно, поскольку ни $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$, ни $\langle\!\langle b \rangle\!\rangle$ не является бесконечной циклической подгруппой.

2.2. Пусть $\langle\!\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle\!\rangle$ — конечная циклическая группа. Тогда по лемме 4 $\langle\!\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle\!\rangle = \langle \gamma_1 \rangle$ — примарная циклическая группа, т. е. однопокрывающий элемент в решетке $\mathrm{Sub}^1 M$, и поэтому $\psi^{-1}\langle \gamma_1 \rangle = \langle\!\langle g \rangle\!\rangle$ для некоторого элемента конечного порядка $g \in \langle a \rangle \cup \langle b \rangle$. Предположим без ограничения общности, что $g \in \langle b \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle b \rangle\!\rangle$ и $\psi\langle\!\langle b \rangle\!\rangle$ — конечные подмоноиды. Рассмотрим имеющиеся возможности для подмоноида $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$.

2.2.1. $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$ — бесконечный подмоноид. Положим $\alpha = \varphi(a)$, тогда $\psi\langle\!\langle a \rangle\!\rangle = \langle \alpha \rangle \cup \{1'\}$. Пусть $\gamma_1^k = 1$, где k — порядок группы $\langle \gamma_1 \rangle$. Покажем, что $\alpha\gamma_1, \gamma_1\alpha \notin \langle \alpha \rangle \cup \langle \gamma_1 \rangle$. Ясно, что $\alpha\gamma_1, \gamma_1\alpha \notin \langle \gamma_1 \rangle$, иначе $\alpha \in \langle \gamma_1 \rangle$. Предположим, что $\alpha\gamma_1 \in \langle \alpha \rangle$. Тогда $\alpha\gamma_1 = \alpha^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и $m = 1$, поскольку в противном случае $\alpha = \alpha\gamma_1^k = \alpha^m\gamma_1^{k-1} = \ldots = \alpha^{1+(m-1)k}$, что противоречит условию $a \in I_A$. Таким образом,

$$\alpha\gamma_1 = \alpha. \tag{2.3}$$

Далее, при этом $\gamma_1\alpha \notin \langle \alpha \rangle$, поскольку в противном случае $\psi\langle\!\langle a, g \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle \cup \langle \gamma_1 \rangle$, откуда $\langle\!\langle a, g \rangle\!\rangle = \langle\!\langle a \rangle\!\rangle \cup \langle\!\langle g \rangle\!\rangle$, хотя $\langle\!\langle a, g \rangle\!\rangle \neq \langle\!\langle a \rangle\!\rangle \cup \langle\!\langle g \rangle\!\rangle$. Так как $\gamma_1\alpha$ — элемент бесконечного порядка, $\varphi^{-1}(\gamma_1\alpha) \in \langle a, g \rangle \backslash (\langle a \rangle \cup \langle g \rangle)$. В силу (2.3) имеем $\alpha^3 = (\alpha^2\gamma_1)\alpha = \alpha^2(\gamma_1\alpha)$, откуда $a^3 \in \langle\!\langle a^2, \varphi^{-1}(\gamma_1\alpha) \rangle\!\rangle$, что невозможно. Таким образом, $\alpha\gamma_1 \notin \langle \alpha \rangle \cup \langle \gamma_1 \rangle$. Двойственные рассуждения показывают, что $\gamma_1\alpha \notin \langle \alpha \rangle \cup \langle \gamma_1 \rangle$.

Аналогично доказывается, что $\alpha^2\gamma_1, \gamma_1^{-1}\alpha \notin \langle \alpha \rangle \cup \langle \gamma_1 \rangle$. Поэтому $\varphi^{-1}(\alpha^2\gamma_1), \varphi^{-1}(\gamma_1^{-1}\alpha) \in \langle\!\langle a, g \rangle\!\rangle \backslash (\langle\!\langle a \rangle\!\rangle \cup \langle\!\langle g \rangle\!\rangle)$. Из равенства $\alpha^2\gamma_1\gamma_1^{-1}\alpha = \alpha^3$ следует $a^3 \in \langle\!\langle \varphi^{-1}(\alpha^2\gamma_1), \varphi^{-1}(\gamma_1^{-1}\alpha) \rangle\!\rangle$. Так как 1 является присоединенной единицей в $\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle$, последнее включение невозможно. Полученное противоречие показывает, что случай 2.2.1 невозможен.

2.2.2. $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$ — конечный подмоноид. Убедимся, что в этом случае единица $1'$ является присоединенной в подмоноиде $\psi\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$. От противного, пусть в подмоноиде $\psi\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$ имеется нетривиальная подгруппа с единицей $1'$. Рассмотрим максимальную подгруппу H' в $\psi\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle$, содержащую идемпотент $1'$. Так как $\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle$ не содержит групповых элементов бесконечного порядка, в силу леммы 2 группа H' периодическая. Согласно утверждениям 1 и 2 леммы 5 все элементы конечного порядка подполугруппы $\langle a, b \rangle$ принадлежат $\langle a \rangle \cup \langle b \rangle$. Следовательно, $H = \psi^{-1}H' \subseteq \langle a \rangle^1 \cup \langle b \rangle^1$ и при этом $H \cap \langle a \rangle \neq \varnothing$ и $H \cap \langle b \rangle \neq \varnothing$. Ясно, что это невозможно. Таким образом, подмоноид $\psi\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$ имеет присоединенную единицу $1'$.

Пусть e — идемпотент подполугруппы $\langle a \rangle$ и $\varepsilon = \varphi(e)$. Покажем, что $\varepsilon\gamma, \gamma\varepsilon \notin \langle \gamma \rangle \cup \langle \varepsilon \rangle$ для произвольного элемента $\gamma \in \langle \gamma_1 \rangle$. Если $\varepsilon\gamma = \gamma^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то $\varepsilon = \gamma^{m-1}$, т. е. $\varepsilon \in M'_{22}$, в то время как $e \in M_{11}$, что невозможно. Предположим, что $\varepsilon\gamma = \varepsilon$. Тогда $(\gamma\varepsilon)^2 = \gamma\varepsilon\gamma\varepsilon = \gamma\varepsilon^2 = \gamma\varepsilon$, т. е. $\gamma\varepsilon$ — идемпотент в $\psi\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle$. Поскольку в этом подмоноиде всего два идемпотента — $1'$ и ε, ясно, что $\gamma\varepsilon = \varepsilon$. Следовательно, $\langle\!\langle \gamma, \varepsilon \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \gamma \rangle\!\rangle \cup \langle\!\langle \varepsilon \rangle\!\rangle$. Напомним, что $\langle\!\langle \gamma \rangle\!\rangle \subseteq \langle\!\langle \gamma_1 \rangle\!\rangle = \psi\langle\!\langle g \rangle\!\rangle$. Таким образом, $\psi^{-1}\langle\!\langle \gamma, \varepsilon \rangle\!\rangle \subseteq \langle\!\langle g \rangle\!\rangle \cup \langle e \rangle$, причем $\psi^{-1}\langle\!\langle \gamma, \varepsilon \rangle\!\rangle \cap \langle\!\langle g \rangle\!\rangle \neq \varnothing$ и $e \in \psi^{-1}\langle\!\langle \gamma, \varepsilon \rangle\!\rangle$. Ясно, что это невозможно. Итак, $\varepsilon\gamma \notin \langle \gamma \rangle \cup \langle \varepsilon \rangle$. Двойственным образом устанавливаем, что $\gamma\varepsilon \notin \langle \gamma \rangle \cup \langle \varepsilon \rangle$ для произвольного элемента $\gamma \in \langle \gamma_1 \rangle$.

Из равенства (2.2) следует $\varepsilon = \varepsilon\gamma_1\gamma_2\varepsilon$, т. е. $\varepsilon \in \langle\!\langle \varepsilon\gamma_1, \gamma_2\varepsilon \rangle\!\rangle$, откуда $e \in \langle\!\langle \psi^{-1}\langle\!\langle \varepsilon\gamma_1 \rangle\!\rangle \cup \psi^{-1}\langle\!\langle \gamma_2\varepsilon \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle$. Последнее включение невозможно, так как $\psi^{-1}\langle\!\langle \varepsilon\gamma_1 \rangle\!\rangle \cup \psi^{-1}\langle\!\langle \gamma_2\varepsilon \rangle\!\rangle \subseteq \langle\!\langle e, g \rangle\!\rangle \backslash (\langle\!\langle e \rangle\!\rangle \cup \langle\!\langle g \rangle\!\rangle)$.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Предложение 1. *Пусть $a \in S_{11}$, $b \in S_{22}$, $1 \notin \langle a \rangle \cup \langle b \rangle$. Тогда ограничение 1-решеточного изоморфизма ψ на решетку $\mathrm{Sub}^1\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle$ индуцируется изоморфизмом или антиизоморфизмом φ_{ab}; при этом для всех $c \in I_{\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle}$ справедливо равенство $\varphi_{ab}(c) = \varphi(c)$.*

Доказательство. Так как $1 \notin \langle a \rangle \cup \langle b \rangle$, единица в подмоноиде $\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle$ является присоединенной и $\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle = \langle a, b \rangle^1 = (\langle a \rangle * \langle b \rangle)^1$. По лемме 7 и в подмоноиде $\psi\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle$ единица является присоединенной. Поэтому отображение $\psi_0 : K \backslash \{1\} \longmapsto (\psi K) \backslash \{1'\}$ есть изоморфизм решетки $\mathrm{Sub}\langle a,b\rangle$ на $\mathrm{Sub}(\psi\langle\!\langle a,b\rangle\!\rangle\backslash\{1'\})$. Из основного результата [10] следует, что решеточный изоморфизм ψ_0 индуцируется изоморфизмом или антиизоморфизмом. Поэтому и ограничение $\psi|_{\langle\!\langle a,\,b\rangle\!\rangle}$ индуцируется изоморфизмом или антиизоморфизмом φ_{ab}; при этом для всех $c\in I_{\langle\!\langle a,\,b\rangle\!\rangle}$ справедливо равенство $\varphi_{ab}(c)=\varphi(c)$. Предложение доказано.

Лемма 8. *Пусть S — полугруппа без идемпотентов и ϕ — 1-решеточный изомоморфизм моноида S^1 на произвольный моноид T. Тогда единица моноида T является присоединенной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. От противного, если это не так, то в моноиде T найдутся элементы γ_1,γ_2 такие, что справедливо равенство (2.2). Нужно рассмотреть те же случаи 1 и 2, что и в доказательстве леммы 7. В случае 1 $\langle\!\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle\!\rangle$ является бициклическим моноидом, и содержит счетное множество идемпотентов, в то время как S не имеет ни идемпотентов, ни групповых элементов. В случае 2 $\langle\!\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle\!\rangle$ не может быть конечной группой, так как S не имеет элементов конечного порядка. Бесконечной циклической группой $\langle\!\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle\!\rangle$ также не может быть в силу леммы 2, поскольку S не имеет групповых элементов. Таким образом, в подмоноиде T единица является присоединенной. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть S — моноид с сокращением, не являющийся группой, у которого единица не является присоединенной и наибольшая подгруппа периодическая, и ϕ — 1-решеточный изомоморфизм моноида S на произвольный моноид T. Тогда ϕ продолжается до решеточного изоморфизма ϕ_0 моноида S на T.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как хорошо известно, $S=L\cup G$, где $G=\mathrm{Gr}S$ — наибольшая подгруппа в S, а $L=S\backslash G$ — идеал моноида S и полугруппа без идемпотентов. Так как группа G периодическая, любая подполугруппа K в S, если она не подмоноид, содержится в L. Пусть K — такая полугруппа. Согласно лемме 8 в подмоноиде ϕK^1 единица является присоединенной.

Положим $\phi_0K=(\phi K^1)\backslash\{1'\}$. Для каждого подмоноида P моноида S примем $\phi_0P=\phi P$; положим также $\phi_0\varnothing=\varnothing$. Рассмотрим произвольный подмоноид K' моноида T, у которого единица $1'$ является присоединенной. Тогда $K'\backslash\{1'\}$ не содержит идемпотентов, так как $1'$ — единственный идемпотент в T. В этом случае по лемме 8 единица 1 присоединена в K и $\phi_0(K\backslash\{1\})=K'\backslash\{1'\}$. Таким образом, мы получили биекцию ϕ_0 решетки $\mathrm{Sub}S$ на решетку $\mathrm{Sub}T$. Легко проверить, что ϕ_0 и ϕ_0^{-1} суть изотонные отображения. Итак, ϕ_0 — решеточный изоморфизм моноида S на T. Лемма доказана.

Лемма 10. *Множества $I_M\cap S_{11}$ и $I_M\cap S_{22}$ непустые.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как моноид A, зафиксированный в начале доказательства теоремы, по предположению не является группой, A содержит элемент a, который является либо элементом бесконечного порядка, либо идемпотентом, отличным от 1. Тогда для любого $b\in B\backslash\{1\}$ в силу утверждения 4 леммы 5 имеем $aba\in I_M\cap S_{11}$ и $babab\in I_M\cap S_{22}$ в случае $b^2\neq 1$. Если $b^2=1$, то $(babab)^2=baba^2bab$ и ясно, что длина $(babab)^n$ монотонно возрастает с ростом $n\in\mathbb{N}$. Отсюда следует, что $babab\in I_M\cap S_{22}$. Лемма доказана.

Предложение 2. *Пусть $a\in I_M\cap S_{11}$, $b\in S_{22}$, $1\in\langle b\rangle$. Тогда ограничение 1-решеточного изоморфизма ψ на решетку $\mathrm{Sub}^1\langle\!\langle a,b\rangle\!\rangle$ индуцируется изоморфизмом или антиизоморфизмом φ_a; при этом для всех $c\in I_{\langle\!\langle a,\,b\rangle\!\rangle}$ справедливо равенство $\varphi_a(c)=\varphi(c)$.*

Пусть $a\in S_{11}$, $1\in\langle a\rangle$, $b\in I_M\cap S_{22}$. Тогда ограничение 1-решеточного изоморфизма ψ на решетку $\mathrm{Sub}^1\langle\!\langle a,b\rangle\!\rangle$ индуцируется изоморфизмом или антиизоморфизмом φ_b; при этом для всех $c\in I_{\langle\!\langle a,\,b\rangle\!\rangle}$ справедливо равенство $\varphi_b(c)=\varphi(c)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из двух симметричных относительно ролей a и b утверждений докажем первое. Из условия $1\in\langle b\rangle$ следует, что $\langle b\rangle$ — конечная группа с единицей 1. Тогда моноид $K = \langle\langle a, b\rangle\rangle$ является полугруппой с сокращением, причем $\mathrm{Gr}K = \langle b\rangle$. Согласно лемме 9 ограничение 1-решеточного изоморфизма ψ на решетку $\mathrm{Sub}^1 K$ продолжается до решеточного изоморфизма ψ_0 моноида K на ψK.

Положим $L = K\backslash \mathrm{Gr}K$. Для моноида K выполняются условия a) и b) теоремы 33.1 [13, p. 216] (или теоремы 26.1 [12, с. 23]): для любых $x \in L$, $y \in I_K$ справедливы условия $x \notin LxL^1xL$ и $x \notin \langle y\rangle x\langle y\rangle$. Из упомянутой теоремы следует, что решеточный изоморфизм ψ_0 моноида K на ψK индуцируется изоморфизмом или антиизоморфизмом φ_a; при этом для всех $c \in I_{\langle\langle a,\, b\rangle\rangle}$ справедливо равенство $\varphi_a(c) = \varphi(c)$. Поэтому и ограничение 1-решеточного изоморфизма ψ на решетку $\mathrm{Sub}^1\langle\langle a, b\rangle\rangle$ индуцируется изоморфизмом или антиизоморфизмом φ_a. Предложение доказано.

Из предложений 1 и 2 непосредственно получается

Следствие 2. *Для любых $a \in I_M \cap S_{11}$ и $b \in S_{22}$* [$a \in S_{11}$ и $b \in I_M \cap S_{22}$] существует биекция $\varphi_a : \langle\langle a, b\rangle\rangle \longrightarrow \psi\langle\langle a, b\rangle\rangle$ [$\varphi_b : \langle\langle a, b\rangle\rangle \longrightarrow \psi\langle\langle a, b\rangle\rangle$], индуцирующая ограничение 1-решеточного изоморфизма ψ на решетку $\mathrm{Sub}^1\langle\langle a, b\rangle\rangle$ и являющаяся изоморфизмом или антиизоморфизмом. При этом для всех $c \in I_{\langle\langle a,\, b\rangle\rangle}$ справедливо равенство $\varphi_a(c) = \varphi(c)$ [$\varphi_b(c) = \varphi(c)$].

Лемма 11. *Пусть $a_1, a_2 \in I_M \cap S_{11}$, $a_1 \neq a_2$ и $b \in S_{22}$* [$a \in S_{11}$ и $b_1, b_2 \in I_M \cap S_{22}$, $b_1 \neq b_2$]. Тогда либо $\varphi_{a_1}(b) = \varphi_{a_2}(b)$ [$\varphi_{b_1}(a) = \varphi_{b_2}(a)$], либо b [a] — групповой элемент конечного порядка и $\langle\langle\varphi_{a_1}(b)\rangle\rangle = \langle\langle\varphi_{a_2}(b)\rangle\rangle$ [$\langle\langle\varphi_{b_1}(a)\rangle\rangle = \langle\langle\varphi_{b_2}(a)\rangle\rangle$].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из двух симметричных утверждений докажем первое. Если b — элемент бесконечного порядка, то требуемое обеспечивается последним утверждением следствия 2. Пусть b — элемент конечного порядка. Так как подмоноид $\langle\langle b\rangle\rangle$ коммутативен, из первого утверждения следствия 2 заключаем, что подмоноид $\psi\langle\langle b\rangle\rangle$ изоморфен $\langle\langle b\rangle\rangle$ и порождается как элементом $\varphi_{a_1}(b)$, так и элементом $\varphi_{a_2}(b)$. Если $\langle\langle b\rangle\rangle$ порождается единственным элементом b, то $\psi\langle\langle b\rangle\rangle$ также порождается единственным элементом и в этом случае $\varphi_{b_1}(a) = \varphi_{b_2}(a)$. Если же $\langle\langle b\rangle\rangle$ имеет более одного порождающего, то $\langle\langle b\rangle\rangle$ — конечная циклическая группа и в этом случае $\langle\langle\varphi_{a_1}(b)\rangle\rangle = \langle\langle\varphi_{a_2}(b)\rangle\rangle$.

Предположим, что для некоторых $a_0 \in I_M \cap S_{11}$, $b_0 \in I_M \cap S_{22}$ справедливы равенства $\varphi(a_0b_0) = \varphi(a_0)\varphi(b_0)$, $\varphi(b_0a_0) = \varphi(b_0)\varphi(a_0)$, и докажем, что тогда 1-решеточный изоморфизм ψ индуцируется изоморфизмом. Двойственный случай рассматривается совершенно аналогично. Зафиксируем упомянутые элементы a_0, b_0 и положим $\alpha_0 = \varphi(a_0)$, $\beta_0 = \varphi(b_0)$. В силу нашего предположения и следствия 2 ограничение 1-решеточного изоморфизма ψ на решетку $\mathrm{Sub}^1\langle\langle a_0, b_0\rangle\rangle$ индуцируется изоморфизмом $\varphi|_{\langle\langle a_0,\, b_0\rangle\rangle}$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Ограничения биекции φ на подмоноиды M_{12} и M_{21} являются изоморфизмами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу утверждения 3 леммы 5 оба моноида являются полугруппами S_{12} и S_{21} с сокращением без идемпотентов с присоединенной единицей. По лемме 8 их образы M'_{12} и M'_{21} также являются полугруппами без идемпотентов с присоединенной единицей. Для полугрупп S_{12} и S_{21} выполняются условия a) и b) теоремы 33.1 [13, p. 216] (или теоремы 26.1 [12, с. 23]): для любых $x, y \in S_{ij}$ при $i \neq j$ справедливы условия $x \notin S_{ij}xS^1_{ij}xS_{ij}$ и $x \notin \langle y\rangle x\langle y\rangle$. Так как единицы в M_{12} и M_{21}, как и в M'_{12} и M'_{21}, являются присоединенными, полугруппа S_{ij} решеточно изоморфна полугруппе $M'_{ij}\backslash\{1'\}$, причем решеточный изоморфизм индуцируется ограничением биекции φ на S_{ij}. Из упомянутой теоремы следует, что ограничения биекции φ на подмоноиды M_{12} и M_{21} являются изоморфизмом или антиизоморфизмом. Убедимся, что эти ограничения — изоморфизмы. От противного, предположим, что $\varphi|_{M_{12}}$ есть антиизоморфизм. Тогда $\varphi(a_0b_0 \cdot a_0^2b_0) = \varphi(a_0^2b_0)\varphi(a_0b_0) = \alpha_0^2\beta_0\alpha_0\beta_0 = \alpha_0^2\varphi(b_0a_0)\beta_0$. Отсюда следует $a_0b_0a_0^2b_0 \in \langle a_0^2, b_0a_0, b_0\rangle$, что невозможно. Итак, $\varphi|_{M_{12}}$ является изоморфизмом. Аналогично убеждаемся, что $\varphi|_{M_{21}}$ — изоморфизм. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть* $a \in I_M \cap S_{11}$, $x \in S_{11}$, $b \in I_M \cap S_{22}$, $y \in S_{22}$. *Тогда* $\varphi(a_0y) = \alpha_0\varphi_{a_0}(y)$, $\varphi(xb_0) = \varphi_{b_0}(x)\beta_0$, $\varphi(ay) = \varphi(a)\varphi_a(y)$, $\varphi(xb) = \varphi_b(x)\varphi(b)$, $\varphi_a(y) = \varphi_{a_0}(y)$, $\varphi_b(x) = \varphi_{b_0}(x)$.

Доказательство. Покажем, что $\varphi(a_0y) = \alpha_0\varphi_{a_0}(y)$. Если это не так, то в силу следствия 2 $\varphi(a_0y) = \varphi_{a_0}(y)\alpha_0$. Согласно лемме 12 $\varphi(a_0y\cdot a_0b_0) = \varphi(a_0y)\varphi(a_0b_0) = \varphi_{a_0}(y)\alpha_0^2\beta_0 = \varphi_{a_0}(y)\varphi(a_0^2b_0)$. Следовательно, $a_0ya_0b_0 \in \langle y, a_0^2b_0\rangle$, что невозможно. Итак, $\varphi(a_0y) = \alpha_0\varphi_a(y)$. Аналогично получаем, что $\varphi(xb_0) = \varphi_{b_0}(x)\beta_0$.

Докажем, что $\varphi(ay) = \varphi(a)\varphi_a(y)$. Если это не так, то $a \notin \langle a_0\rangle$ и в силу следствия 2 $\varphi(ay) = \varphi_a(y)\varphi(a)$, при этом для любого $y_1 \in \langle y\rangle$ справедливо $\varphi(ay_1) = \varphi_a(y_1)\varphi(a)$. По лемме 12 для любых $m, k \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi(b_0^m a\cdot ya_0^k) = \varphi(b_0^m a)\varphi(ya_0^k) = \beta_0^m\varphi(a)\varphi_{a_0}(y)\alpha_0^k$. Положим $y_1 = \varphi_a^{-1}(\varphi_{a_0}(y))$. Согласно лемме 11 либо $y_1 = y$, либо $\langle y_1\rangle = \langle y\rangle$. Исходя из нашего предположения $\varphi(a)\varphi_{a_0}(y) = \varphi(y_1a)$. Следовательно, $\varphi(b_0^m aya_0^k) = \beta_0\varphi(y_1a)\alpha_0^k$, откуда для любых $m, k \in \mathbb{N}$

$$b_0^m aya_0^k \in \langle a_0^k, b_0^m, y_1a\rangle. \tag{2.4}$$

Покажем, что $a \notin \langle a_0^k, b_0^m, y_1a\rangle$ для некоторых $m, k \in \mathbb{N}$, тогда включение (2.4) будет невозможно. Пусть $a \in \langle a_0^k, b_0^m, y_1a\rangle$ для любых $m, k \in \mathbb{N}$. Это возможно, лишь если $b_0^{m\ell}y_1 = 1$ или $aa_0^{k\ell} = 1$ и $y_1^n = 1$ для некоторых $\ell, n \in \mathbb{N}$. Тогда либо $b_0^{m_1}y_1 = 1$, $b_0^{m_2}y_1 = 1$ при $m_1 < m_2$, либо $aa_0^{k_1} = 1$, $aa_0^{k_2} = 1$ при $k_1 < k_2$. В первом случае получаем $1 = b_0^{m_2}y_1 = b_0^{m_2-m_1}b_0^{m_1}y_1 = b_0^{m_2-m_1}$, т. е. $b_0^{m_2-m_1} = 1$, что невозможно. Второй случай приводится к противоречию аналогично.

Итак, $\varphi(ay) = \varphi(a)\varphi_a(y)$ и $\varphi(xb) = \varphi_b(x)\varphi(b)$.

Убедимся, что $\varphi_a(y) = \varphi_{a_0}(y)$. Положим $y_1 = \varphi_{a_0}^{-1}(\varphi_a(y))$. В силу леммы 12 имеем $\varphi(ay\cdot a_0^2y) = \varphi(ay)\varphi(a_0^2y) = \varphi(a)\varphi_a(y)\alpha_0^2\varphi_{a_0}(y)$, т. е.

$$\varphi(aya_0^2y) = \varphi(a)\varphi_a(y)\alpha_0^2\varphi_{a_0}(y). \tag{2.5}$$

Напомним, что произведение uv элементов u, v полугруппы называется *жестким*, если элемент uv не представим в алфавите $\{u, v\}$ в виде какого-либо слова, отличного от uv или vu (см. п. 24.9 [12, с. 10] или п. 22.1 [13, p. 154]). Если $u, v \in I_M$ и произведение uv жесткое, то $\varphi(uv) \in \{\varphi(u)\varphi(v), \varphi(v)\varphi(u)\}$ согласно лемме 24.10 [12, с. 11] или лемме 31.10 [13, p. 205]. Ясно, что произведение $y_1a_0\cdot a_0y$ является жестким, поэтому $\varphi(y_1a_0^2y) \in \{\varphi(y_1a_0)\varphi(a_0y), \varphi(a_0y)\varphi(y_1a_0)\} = \{\varphi_a(y)\alpha_0^2\varphi_{a_0}(y), \alpha_0\varphi_{a_0}(y)\varphi_a(y)\alpha_0\}$. Пусть $\varphi_{a_0}(y)\varphi_a(y) = \varphi_{a_0}(y_2)$. Если $\varphi(y_1a_0^2y) = (\alpha_0\varphi_{a_0}(y)\varphi_a(y))\alpha_0 = \varphi(a_0y_2)\alpha_0$, то $y_1a_0^2y \in \langle a_0y_2, a_0\rangle$, что невозможно. Следовательно, $\varphi(y_1a_0^2y) = \varphi_a(y)\alpha_0^2\varphi_{a_0}(y)$. Из равенства (2.5) вытекает $aya_0^2y \in \langle a, y_1a_0^2y\rangle$. Таким образом, $y_1 = y$ и $\varphi_a(y) = \varphi_{a_0}(y)$. Аналогично доказывается, что $\varphi_b(x) = \varphi_{b_0}(x)$. Лемма доказана.

Для элементов конечного порядка $x \in S_{11}$, $y \in S_{22}$ будем обозначать $\varphi_{a_0}(y)$ через $\varphi(y)$ и $\varphi_{b_0}(x)$ через $\varphi(x)$. Таким образом, в силу лемм 13, 6 и утверждения 3 леммы 5 биекция φ расширяется с множества I_M на весь моноид M; при этом $\varphi(1) = 1'$. Так как $\psi\langle\langle x\rangle\rangle = \langle\langle\varphi(x)\rangle\rangle$ для любого $x \in M$, полученная биекция φ индуцирует 1-решеточный изоморфизм ψ. Из леммы 13 следует, что для любых $a \in I_M \cap S_{11}$, $x \in S_{11}$, $b \in I_M \cap S_{22}$, $y \in S_{22}$ справедливы равенства

$$\varphi(ay) = \varphi(a)\varphi(y), \ \ \varphi(ya) = \varphi(y)\varphi(a), \ \ \varphi(xb) = \varphi(x)\varphi(b), \ \ \varphi(bx) = \varphi(b)\varphi(x). \tag{2.6}$$

Докажем, что φ есть изоморфизм.

Лемма 14. *Ограничения* $\varphi|_A$ *и* $\varphi|_B$ *являются изоморфизмами.*

Доказательство. Убедимся, что $\varphi|_B$ — изоморфизм. Для $\varphi|_A$ доказательство проводится аналогично. Зафиксируем произвольные элементы $b_1, b_2 \in B\backslash\{1\}$. Положим $\beta_i = \varphi(b_i)$ $(i = 1, 2)$. Произведения $a_0b_1\cdot b_2a_0^2$ и $b_2a_0^2\cdot a_0b_1$ являются жесткими, поэтому в силу (2.6) имеем

$$\{\varphi(a_0b_1b_2a_0^2), \varphi(b_2a_0^3b_1)\} = \{\varphi(a_0b_1)\varphi(b_2a_0^2), \varphi(b_2a_0^2)\varphi(a_0b_1)\} = \{\alpha_0\beta_1\beta_2\alpha_0^2, \beta_2\alpha_0^3\beta_1\}. \tag{2.7}$$

Примем $b_3 = \varphi^{-1}(\beta_1\beta_2)$. Предположим, что $\varphi(a_0b_1b_2a_0^2) = \beta_2\alpha_0^3\beta_1$. Тогда согласно (2.7) $\varphi(b_2a_0^3b_1) = \alpha_0\beta_1\beta_2\alpha_0^2 = \varphi(a_0b_3)\varphi(a_0^2)$, и $b_2a_0^3b_1 \in \langle a_0b_3, a_0^2\rangle$, что невозможно.

Следовательно, $\varphi(a_0b_1b_2a_0^2) = \alpha_0\beta_1\beta_2\alpha_0^2 = \alpha_0\varphi(b_3a_0^2)$ и потому $a_0b_1b_2a_0^2 \in \langle a_0, b_3a_0^2\rangle$. Значит, $a_0b_1b_2a_0^2 = a_0b_3a_0^2$, откуда $b_1b_2 = b_3$ и $\varphi(b_1b_2) = \beta_1\beta_2$, т. е. $\varphi|_B$ — изоморфизм. Лемма доказана.

Лемма 15. *Для любых $a \in A$, $b \in B$ справедливы равенства*

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a).$$

Доказательство. Если по крайней мере один из элементов a, b — бесконечного порядка, то требуемое обеспечивается равенствами (2.6).

Пусть a, b — элементы конечного порядка, отличные от 1. Положим $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$, $c = \varphi^{-1}(\alpha\beta)$. Тогда $c \in \langle a, b\rangle$. По лемме 12 в силу равенств (2.6) имеем $\varphi(b_0a \cdot ba_0) = \beta_0\alpha\beta\alpha_0$. Отсюда следует $b_0aba_0 \in \langle b_0, c, a_0\rangle$. Это возможно лишь при

$$c = b^m aba^k \tag{2.8}$$

для некоторых $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Покажем, что $m = 0$ или $b^m = 1$. От противного, если это не так, то зафиксируем наименьшее натуральное число m со свойством $c = b^m aba^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Предположим, что $b^{1+m} \neq b$. Примем $b_1 = b_0^2a_0b$. Очевидно, что $b_1 \in I_M \cap S_{22}$. Пусть $\beta_1 = \varphi(b_1)$. По леммам 12 и 13 имеем $\varphi(b_1a \cdot ba_0) = \beta_1\alpha\beta\alpha_0$, откуда $b_1aba_0 \in \langle b_1, c, a_0\rangle$. В силу выбора элемента b_1 последнее включение невозможно.

Пусть $b^{1+m} = b$. Тогда $b^{2m} = b^m$ и $1 \notin \langle b\rangle$, поскольку $b^m \neq 1$. Далее, $c = b^m aba^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ или $c = b^m ab$. В первом случае, применяя рассуждения предыдущего абзаца с переменой ролей b и a, имее, что $a^{2k} = a^k$ и $1 \notin \langle a\rangle$. Так как $1 \notin \langle a\rangle \cup \langle b\rangle$, приходим к противоречию в силу предложения 1, согласно которому $c \in \{ab, ba\}$, т. е. $b^m aba^k \in \{ab, ba\}$. Пусть $c = b^m ab$. Тогда $c \in I_M \cap S_{22}$ исходя из утверждения 4 леммы 5. По лемме 13 имеем $\varphi(ac) = \alpha\varphi(c) = \alpha^2\beta$. Используя леммы 12, 14 и равенства (2.6), получаем $\varphi(b_0a^2ba_0) = \beta_0\alpha^2\beta\alpha_0 = \beta_0\varphi(ac)\alpha_0$, откуда $b_0a^2ba_0 \in \langle b_0, ab^m ab, a_0\rangle$. Легко понять, что последнее включение невозможно.

Таким образом, в равенстве (2.8) $m = 0$ или $b^m = 1$. Аналогично доказывается, что $k = 0$ или $a^k = 1$. Итак, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Двойственным образом устанавливается, что $\varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$. Лемма доказана.

Завершим теперь доказательство теоремы. Докажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $a_i \in A\backslash\{1\}$, $b_i \in B\backslash\{1\}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ справедливы равенства

$$\varphi(a_1b_1 \ldots a_nb_n) = \varphi(a_1)\varphi(b_1) \ldots \varphi(a_n)\varphi(b_n); \tag{2.9}$$

$$\varphi(a_1b_1 \ldots a_nb_na_{n+1}) = \varphi(a_1)\varphi(b_1) \ldots \varphi(a_n)\varphi(b_n)\varphi(a_{n+1}); \tag{2.10}$$

$$\varphi(b_1a_1 \ldots b_na_n) = \varphi(b_1)\varphi(a_1) \ldots \varphi(b_n)\varphi(a_n); \tag{2.11}$$

$$\varphi(b_1a_1 \ldots b_na_nb_{n+1}) = \varphi(b_1)\varphi(a_1) \ldots \varphi(b_n)\varphi(a_n)\varphi(b_{n+1}). \tag{2.12}$$

Этим теорема будет доказана.

Равенства (2.9) и (2.11) следуют из лемм 12 и 14. Докажем равенство (2.10); (2.12) проверяется аналогично. Положим $\alpha_i = \varphi(a_i)$, $\beta_j = \varphi(b_j)$ $(i = 1, \ldots, n+1,\ j = 1, \ldots, n)$. Согласно леммам 12 и 15 имеем $\varphi(b_0a_1b_1 \ldots a_nb_na_{n+1}) = \varphi(b_0a_1)\varphi(b_1a_2) \ldots \varphi(b_na_{n+1}) = \beta_0\alpha_1\beta_1\alpha_2 \ldots \beta_n\alpha_{n+1}$. Положим $c = \varphi^{-1}(\alpha_1\beta\alpha_2 \ldots \beta_n\alpha_{n+1})$. Тогда $b_0a_1b_1 \ldots a_nb_na_{n+1} \in \langle b_0, c\rangle$ и поэтому $c \in S_{11}$. По лемме 12 в силу (2.6) получаем $\varphi(b_0 \cdot c) = \beta_0\varphi(c) = \beta_0\alpha_1\beta_1\alpha_2 \ldots \beta_n\alpha_{n+1} = \varphi(b_0a_1b_1 \ldots a_nb_na_{n+1})$. Следовательно, $b_0c = b_0a_1b_1 \ldots a_nb_na_{n+1}$ и $c = a_1b_1 \ldots a_nb_na_{n+1}$. Таким образом, равенство (2.10) доказано.

Теорема полностью доказана.

Отметим, что примеров строго 1-решеточно определяющихся моноидов известно не так много. Практически все они упоминаются в настоящей статье. В связи с этим представляется интересным такой вопрос: будет ли строго 1-решеточно определяться бициклический моноид? Его строгая определяемость решеткой подполугрупп установлена в [13, p. 313].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гейн А.Г.** Конечномерные простые алгебры Ли с решеткой подалгебр длины 3 // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 74—78.
2. **Jones P.R.** On semigroups with lower semimodular lattice of subsemigroups // J. Algebra 2010. Vol. 324, no. 9. P. 2089–2111. doi:10.1016/j.jalgebra.2010.07.046 .
3. **Кизнер Ф.И.** Структурные изоморфизмы свободных произведений полугрупп с единицей или нулем // Мат. сб. 1966. Т. 71, № 2. С. 251–256.
4. **Клиффорд А., Престон Г.** Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972. 287 с.
5. **Korobkov S.S.** Lattice definability of certain matrix rings // Sb. Math. 2017. Vol. 208, no. 1. P. 90–102. doi: 10.1070/SM8654 .
6. **Korobkov S.S.** Projections of finite commutative rings with identity // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 3. С. 285—305. doi: 10.1007/s10469-018-9492-7 .
7. **Ovsyannikov A.J.** Epigroups whose subepigroup lattice is lower semimodular // Semigroup Forum. 2013. Vol. 86. P. 155–161. doi: 10.1007/s00233-012-9416-0 .
8. **Pioro K.** The subalgebra lattice of a finite algebra // Central European J. Math. 2014. Vol. 12, no. 7. P. 1052–1108. doi: 10.2478/s11533-013-0390-x .
9. **Садовский Л.Е.** О структурных изоморфизмах свободных произведений групп // Мат. сб. 1947. Т. 63, № 1. С. 63–82.
10. **Шеврин Л.Н., Баранский В.А.** Структурные изоморфизмы полугрупп, разложимых в свободное произведение // Мат. сб. 1966. Т. 71, № 2. С. 236–250.
11. **Shevrin L.N., Ovsyannikov A.J.** Semigroups and their subsemigroup lattices // Semigroup Forum. 1983. Vol. 27. P. 1–154. doi: 10.1007/BF02572737 .
12. **Шеврин Л.Н., Овсянников А.Я.** Полугруппы и их подполугрупповые решетки. Ч.2. Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1990. 246 с.
13. **Shevrin L.N., Ovsyannikov A.J.** Semigroups and their subsemigroup lattices. Kluwer Academic Publishers, 1996. 380 p.
14. **Schmidt R.** Subgroup Lattices of Groups. W. de Gruyter, Berlin, 2011. 587 pp.

Поступила 1.06.2020
После доработки 26.06.2020
Принята к публикации 6.07.2020

Овсянников Александр Яковлевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
г. Екатеринбург
e-mail: Al.Ovsyannikov@urfu.ru

REFERENCES

1. Gein A.G. Finite-dimensional simple Lie algebras with a subalgebra lattice of length 3. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 10, pp. 62–65. doi: 10.3103/S1066369X12100064 .
2. Jones P.R. On semigroups with lower semimodular lattice of subsemigroups. *J. Algebra*, 2010, vol. 324, no. 9, pp. 2089–2111. doi: 10.1016/j.jalgebra.2010.07.046 .
3. Kizner F.I. Lattice isomorphisms of free products of semigroups with either an identity or zero. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1966, vol. 71(113), no. 2, pp. 251–256. (in Russian)
4. Clifford A.H., Preston G.B. *The algebraic theory of semigroups. Vol. 1.* Providence: AMS, 1977, 252 p. ISBN: 0-8218-0271-2 . Translated to Russian under the title *Algebraicheskaya teoriya polugrupp.* Moscow: Mir Publ., 1972, 287 p.
5. Korobkov S.S. Lattice definability of certain matrix rings. *Sb. Math.*, 2017, vol. 208, no. 1, pp. 90–102. doi: 10.1070/SM8654 .
6. Korobkov S.S. Projections of finite commutative rings with identity. *Algebra and Logic*, 2018, vol. 57, no. 3, pp. 186–200. doi: 10.1007/s10469-018-9492-7 .

7. Ovsyannikov A.J. Epigroups whose subepigroup lattice is lower semimodular. *Semigroup Forum*, 2013, vol. 86, pp. 155–161. doi: 10.1007/s00233-012-9416-0 .
8. Pioro K. The subalgebra lattice of a finite algebra. *Central European Journal of Mathematics*, 2014, vol. 12, no. 7, pp. 1052–1108. doi: 10.2478/s11533-013-0390-x .
9. Sadovskii L.E. On structural isomorphisms of free products of groups. *Rec. Math.* [*Mat. Sbornik*] *N.S.*, 1947, vol. 21(63), no. 1, pp. 63–82 (in Russian).
10. Shevrin L.N., Baranskii V.A. Lattice isomorphisms of semigroups decomposable into a free product. *Mat. Sb.* (*N.S.*), 1966, vol. 71(113), no. 2, pp. 236–250 (in Russian).
11. Shevrin L.N., Ovsyannikov A.J. Semigroups and their subsemigroup lattices. *Semigroup Forum*, 1983, vol. 27, pp. 1–154. doi: 10.1007/BF02572737 .
12. Shevrin L.N., Ovsyannikov A.Ya. *Semigroups and their subsemigroup lattices.* Part 2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996, 378 p. ISBN: 0792342216 . Original Russian text published in Shevrin L.N., Ovsyannikov A.Ya. *Polugruppy i ikh podpolugruppovye reshetki. Ch.* 2. Sverdlovsk: Ural. Gos. Univ. Publ., 1990, 246 p.
13. Shevrin L.N., Ovsyannikov A.Ya. *Semigroups and their subsemigroup lattices.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996, 378 p. ISBN: 0792342216 .
14. Schmidt R. *Subgroup Lattices of Groups.* Berlin: W. de Gruyter, 2011, 587 p. ISBN: 9783110868647 .

Received June 1, 2020
Revised June 26, 2020
Accepted July 6, 2020

Alexander Jacovlevich Ovsyannikov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Department of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: Al.Ovsyannikov@urfu.ru .

A. Ya. Ovsyannikov. 1-Lattice isomorphisms of monoids decomposable into a free product, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 142–153 .