ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 512.54

ТЕНЗОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ИНВОЛЮЦИЙ НЕКОТОРЫХ МАТРИЧНЫХ ГРУПП[1]

Я. Н. Нужин

Хорошо известно, что все неприводимые представления групп Шевалле над бесконечными полями и модулярные представления в хороших характеристиках полей определения исчерпываются подпредставлениями тензорных произведений их естественных представлений. В статье рассматриваются такие конкретные два подпредставления и на их основе получаются ответы на два вопроса о числе порождающих инволюций некоторых матричных групп. Для области целостности D характеристики отличной от 2 установлена неприводимость симметрического и внешнего квадратов естественного представления группы $SL_n(D)$ и вычислены их ядра (теорема 1). Обозначим через $n(G)$ (соответственно через $n_c(G)$) минимальное число порождающих (соответственно еще и сопряженных) инволюций группы G, произведение которых равно 1. Задачи о нахождении чисел $n(G)$ и $n_c(G)$ для конечных простых групп записаны автором в Коуровской тетради (вопрос 14.69). Исходя из теоремы 1 и неравенства Л. Л. Скотта доказан следующий результат. Пусть G есть $SL_3(D)$ или $SL_6(D)$, где D — область целостности характеристики отличной от 2. Тогда $n(G) > 5$, и в частности G не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, а если D является кольцом целых чисел или конечным полем (нечетного порядка), то $n(G) = n_c(G) = 6$ (теорема 2).

Ключевые слова: специальная линейная группа над областью целостности, тензорные представления, порождающие множества инволюций.

Ya. N. Nuzhin. Tensor representations and generating sets of involutions of some matrix groups.

It is well known that all irreducible representations of Chevalley groups over infinite fields and modular representations in nice characteristics of fields of definition are exhausted by subrepresentations of tensor products of their natural representations. We consider two specific subrepresentations of this kind and use them to answer two questions on the number of generating involutions of some matrix groups. For an integral domain D of characteristic different from 2, we establish the irreducibility of the symmetric and external squares of the natural representation of the group $SL_n(D)$ and find their kernels (Theorem 1). Denote by $n(G)$ (by $n_c(G)$) the minimum number of generating (and also conjugate, respectively) involutions of G whose product is 1. Problems on finding the numbers $n(G)$ and $n_c(G)$ for finite simple groups are written by the author in the *Kourovka Notebook* (Question 14.69). Based on Theorem 1 and L. L. Scott's inequality, we prove the following result. Let G be $SL_3(D)$ or $SL_6(D)$, where D is an integral domain of characteristic different from 2. Then $n(G) > 5$ and, in particular, G is not generated by three involutions two of which commute; moreover, if D is the ring of integers or a finite field (of odd order), then $n(G) = n_c(G) = 6$ (Theorem 2).

Keywords: special linear group over the integral domain, tensor representations, generating sets of involutions.

MSC: 20G05, 20G15

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-133-141

Введение

Известно, что все неприводимые представления групп Шевалле над бесконечными полями и модулярные представления в хороших характеристиках полей определения исчерпываются подпредставлениями тензорных произведений их естественных представлений [1, §§ 12,13]. Здесь рассматриваются такие конкретные два подпредставления и на их основе получаются ответы на известные вопросы о порождающих множествах инволюций некоторых матричных групп.

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2020-1534/1) и РФФИ (проект 19–01–00566).

Пусть $\varphi\otimes\varphi$ — тензорный квадрат представления φ группы G на векторном пространстве V над полем F. Обозначим через W подпространство в $V\otimes V$, порожденное векторами $v\otimes v$, $v\in V$. Очевидно, оно инвариантно относительно $(\varphi\otimes\varphi)(G)$. Следовательно, имеется индуцированное фактор-представление группы G на $(V\otimes V)/W$. Оно называется *внешним квадратом* представления φ и обозначается через $\varphi\wedge\varphi$. Подпространство U из $V\otimes V$, порожденное векторами $v\otimes w-w\otimes v$, $v,w\in V$, также инвариантно относительно группы $(\varphi\otimes\varphi)(G)$. Поэтому существует индуцированное представление группы G на $(V\otimes V)/U$, называемое *симметрическим квадратом* представления φ и обозначаемое через φ^2. Под областью целостности будем понимать коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля.

Теорема 1. *Пусть φ — естественное неприводимое представление размерности $n\geq 2$ группы $GL_n(F)$ над полем частных F области целостности D характеристики отличной от 2. Тогда симметрический квадрат φ^2 и внешний квадрат $\varphi\wedge\varphi$ являются неприводимыми представлениями и их сужения на подгруппу $SL_n(D)$ также будут неприводимыми, причем $Ker(\varphi^2)=\{1,-1\}$, $Ker(\varphi\wedge\varphi)=\{1,-1\}$ при $n\geq 3$, $Ker(\varphi\wedge\varphi)=SL_n(F)$ при $n=2$.*

Обозначим через $n(G)$ (соответственно через $n_c(G)$) минимальное число порождающих (соответственно еще и сопряженных) инволюций группы G, произведение которых равно 1. Задачи о нахождении чисел $n(G)$ и $n_c(G)$ для конечных простых групп записаны автором в [2, вопрос 14.69], а список групп, для которых они решены, указан в [3]. С использованием неравенства Л. Л. Скотта [4] и теоремы 1 настоящей работы доказывается

Теорема 2. *Пусть G есть $SL_3(D)$ или $SL_6(D)$, где D — область целостности характеристики отличной от 2. Тогда $n(G)>5$, и в частности G не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, а если D является кольцом целых чисел или конечным полем (нечетного порядка), то $n(G)=n_c(G)=6$.*

Отметим, что размерности 3 и 6 были исключительными во многих работах, где устанавливалась порождаемость линейных групп этих размерностей над различными областями целостности набором элементов с некоторыми определенными свойствами. Исключительными — в том смысле, что либо для размерностей 3 и 6 ответ оказывался противоположным ответу для других размерностей, либо они совсем не рассматривались (см., например, [5–9]). В частности, в [7] отмечается, что вопрос о порождаемости группы SL_n над кольцом целых чисел тремя инволюциями, две из которых перестановочны, неизвестен только для $n=6,10$. Равенство $n(SL_3(D))=6$ для конечного поля D нечетного порядка установлено ранее в [9].

1. Тензорные представления

Пусть V и W — векторные пространства над полем F. Тензорное произведение этих пространств обычно обозначается через $V\otimes_F W$, или просто через $V\otimes W$. Векторное пространство $V\otimes W$ состоит из формальных линейных комбинаций с коэффициентами из F упорядоченных пар $v\otimes w$, $v\in V$, $w\in W$. При этом предполагаются выполненными следующие условия:

$$(v_1+v_2)\otimes w=v_1\otimes w+v_2\otimes w,$$

$$v\otimes(w_1+w_2)=v\otimes w_1+v\otimes w_2,$$

$$\lambda(v\otimes w)=\lambda v\otimes w=v\otimes\lambda w,\quad \lambda\in F.$$

Пусть φ и ψ — представления группы G на пространствах V и W соответственно. Тогда получаем представление $\varphi\otimes\psi$ группы G, которое определяется так:

$$(\varphi\otimes\psi)(g)(v\otimes w)=\varphi(g)(v)\otimes\psi(g)(w),\quad g\in G,\quad v\in V,\quad w\in W.$$

Представление $\varphi\otimes\psi$ называется *тензорным произведением* представлений φ и ψ. В частности, можно определить *тензорный квадрат* $\varphi\otimes\varphi$ представления φ. Рассмотрим два представления, тесно связанные с тензорным квадратом $\varphi\otimes\varphi$, где φ — некоторое представление группы G на V.

Обозначим через W подпространство в $V\otimes V$, порожденное векторами $v\otimes v$, $v\in V$. Очевидно, оно инвариантно относительно $(\varphi\otimes\varphi)(G)$. Следовательно, имеется индуцированное фактор-представление группы G на векторном пространстве $(V\otimes V)/W$. Оно называется *внешним квадратом* представления φ и обозначается через $\varphi\wedge\varphi$, причем пространство $(V\otimes V)/W$ аналогичным образом обозначается через $V\wedge V$.

Подпространство U пространства $V\otimes V$, порожденное векторами $v\otimes w-w\otimes v$, $v,w\in V$, также инвариантно относительно группы $(\varphi\otimes\varphi)(G)$. Поэтому существует индуцированное представление группы G на $(V\otimes V)/U$, называемое *симметрическим квадратом* представления φ и обозначаемое через φ^2.

Ядро гомоморфизма ψ пространства $V\otimes V$ на U, задаваемого правилом

$$\psi:\ v\otimes w\to v\otimes w-w\otimes v,$$

в точности совпадает с W. Следовательно, внешний квадрат $\varphi\wedge\varphi$ эквивалентен ограничению представления $\varphi\otimes\varphi$ на пространство U. Можно показать, что если характеристика поля F отлична от 2, то φ^2 эквивалентно ограничению представления $\varphi\otimes\varphi$ на подпространство W. Более того, в этом случае

$$V\otimes V=W\oplus U$$

и, следовательно, $\varphi\otimes\varphi$ разлагается в сумму φ^2 и $\varphi\wedge\varphi$.

Зафиксируем стандартный базис

$$e_1,e_2,\ldots,e_n \tag{1}$$

пространства вектор-столбцом V над полем F, где $e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$. Тогда

$$\{e_i\otimes e_j\mid i,j=1,2,\ldots,n\} \tag{2}$$

— базис пространства $V\otimes V$. Не столь очевидно, что

$$e_i\otimes e_i,\quad e_i\otimes e_j+e_j\otimes e_i,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,\ldots,n, \tag{3}$$

— базис подпространства W. Это следует из включений $v\otimes v\in W$ для всех $v\in V$ и равенства

$$(e_i+e_j)\otimes(e_i+e_j)=e_i\otimes e_i+e_i\otimes e_j+e_j\otimes e_i+e_j\otimes e_j.$$

В качестве базиса подпространства U можно взять следующий набор из $\binom{n}{2}$ векторов

$$e_i\otimes e_j-e_j\otimes e_i,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

Теперь несложно понять, что базисом фактор-пространства $(V\otimes V)/U$ будет набор

$$e_i\otimes e_i+U,\ e_i\otimes e_j+U,\quad i<j,\quad i,j=1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

а базисом фактор-пространства $(V\otimes V)/W$ — набор

$$e_i\otimes e_j+W,\quad i<j,\quad i,j=1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

2. Доказательство теоремы 1

Далее используются обозначения из разд. 1. Группа $GL_n(F)$ и ее подгруппы действуют слева на векторах пространства V со стандартным базисом (1). Положим

$$d_i = diag(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1),$$

где -1 стоит на i-м месте, и определим новую подгруппу

$$G = \langle d_1, SL_n(D) \rangle;$$

здесь $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством M из некоторой группы. Ясно, что все d_i лежат в группе G. Установим, что сужение φ^2 на подгруппу G неприводимо.

Возьмем произвольный ненулевой вектор x из некоторого инвариантного относительно группы $\varphi^2(G)$ подпространства $\overline{V}$ фактор-пространства $(V \otimes V)/U$. Покажем, что $\overline{V} = (V \otimes V)/U$. По определению для некоторых $\alpha_i, \beta_{ij} \in F$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \otimes e_i + \sum_{1 \le i < j \le n} \beta_{ij} e_i \otimes e_j + U. \tag{7}$$

Очевидно, возможны два случая: 1) некоторый из коэффициентов α_i отличен от нуля; 2) все α_i равны нулю.

1) Пусть некоторый из коэффициентов α_i отличен от нуля. Не теряя общности, можно считать, что $\alpha_1 \ne 0$. Тогда

$$x + \varphi^2(d_1)(x) = 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \otimes e_i + \sum_{1 \le i < j \le n} \beta'_{ij} e_i \otimes e_j + U,$$

где все β'_{1j} нулевые. Действуя последовательно элементами $d_2, \dots, d_{n-1}$ подобным образом, получим включение

$$2^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \otimes e_i + U \in \overline{V}.$$

Поскольку характеристика поля F отлична от 2 и $\alpha_1 \ne 0$, то инвариантное подпространство $\overline{V}$ содержит элемент вида

$$y = e_1 \otimes e_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i e_i \otimes e_i + U.$$

Пусть $g = t_{21}(1)$. (Здесь и далее $t_{ij}(u)$ — элементарная трансвекция с параметром $u \in F$ на позиции ij.) Тогда $ge_1 = e_1 + e_2$, а для $i = 2, \dots, n$, очевидно, $ge_i = e_i$. Поэтому

$$(\varphi \otimes \varphi)(g)(e_1 \otimes e_1) = (e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2) = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1.$$

Сейчас, учитывая включение $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \in U$, получаем, что

$$\varphi^2(g)(y) - y = e_2 \otimes e_2 + 2e_1 \otimes e_2 + U \in \overline{V}.$$

Отсюда указанным выше способом с помощью диагонального элемента d_2 выводим включение $e_2 \otimes e_2 + U \in \overline{V}$, а следовательно, и $e_1 \otimes e_2 + U \in \overline{V}$. Так как мономиальная подгруппа группы G действует n-транзитивно на множестве одномерных подпространств, натянутых на векторы базиса (1), то $\overline{V} = (V \otimes V)/U$. (На самом деле, для получения этого равенства достаточна только 2-транзитивность.)

2) Пусть в равенстве (7) все коэффициенты α_i равны нулю. Тогда некоторый его коэффициент β_{ij} отличен от нуля. Не теряя общности, можно считать, что $\beta_{12} \neq 0$. Пусть $g = t_{21}(1)$ и x такой, как в равенстве (7). Тогда

$$\varphi^2(g)(x) = \beta_{12} e_2 \otimes e_2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta'_{ij} e_i \otimes e_j + U,$$

и мы попадаем в уже рассмотренный случай 1), когда в равенстве (7) некоторый коэффициент α_i ненулевой.

Далее G и диагональные элементы d_i такие же, как и выше. Покажем, что сужение $\varphi \wedge \varphi$ на подгруппу G неприводимо.

Пусть $n > 2$. Возьмем произвольный ненулевой вектор x из некоторого инвариантного относительно группы $\varphi \wedge \varphi(G)$ подпространства $\overline{V}$ фактор-пространства $(V \otimes V)/W$. Покажем, что $\overline{V} = (V \otimes V)/W$. По определению для некоторых $\beta_{ij} \in F$

$$x = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} e_i \otimes e_j + W. \tag{8}$$

Пусть некоторый коэффициент β_{ij} из (8) отличен от нуля. Не теряя общности, можно считать, что $\beta_{12} \neq 0$. Тогда

$$x + \varphi \wedge \varphi(d_3)(x) = 2\beta_{12} e_1 \otimes e_2 + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ j \neq 3}} \beta'_{ij} e_i \otimes e_j + W.$$

Действуя последовательно элементами $d_4, \ldots, d_n$ подобным образом, получим включение

$$2^{n-2} \beta_{12} e_1 \otimes e_2 + W \in \overline{V}.$$

Так как мономиальная подгруппа группы G действует n-транзитивно на множестве одномерных подпространств, натянутых на векторы базиса (1), то $\overline{V} = (V \otimes V)/W$.

Если $n = 2$, то пространство $(V \otimes V)/W$ одномерно и, следовательно, группа $\varphi \wedge \varphi(G)$ неприводима и непосредственно показывается, что $Ker(\varphi \wedge \varphi) = SL_2(F)$. Действительно, если матрица $g = (g_{ij})$ лежит в $Ker(\varphi \wedge \varphi)$, то

$$\varphi \wedge \varphi(e_1 \otimes e_2 + W) = (g_{11} e_1 + g_{21} e_2) \otimes (g_{12} e_1 + g_{22} e_2) + W$$

$$= (g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}) e_1 \otimes e_2 + W$$

и, следовательно, $g \in SL_2(F)$. Очевидно, верно и обратное.

Итак, мы установили неприводимость сужений φ^2 и $\varphi \wedge \varphi$ на подгруппу $G = \langle d_1, SL_n(D) \rangle$. Отсюда, очевидно, будет следовать неприводимость подгрупп $\varphi^2(GL_n(F))$ и $\varphi \wedge \varphi(GL_n(F))$. Так как $G = \langle -1, SL_n(D) \rangle$ при нечетном n, то в этом случае получаем и неприводимость подгрупп $\varphi^2(SL_n(D))$ и $\varphi \wedge \varphi(SL_n(D))$. Их неприводимость для четного n можно установить напрямую, без использования группы G, такими же элементарными методами линейной алгебры, действуя образами диагональных произведений $d_i d_j$, трансвекций $t_{ij}(u)$ и мономиальных матриц из $SL_n(D)$, причем для $n = 2$ только образами трансвекций и мономиальных матриц. Подробные выкладки мы опускаем.

Найдем $Ker(\varphi^2)$ при $n \geq 2$ и $Ker(\varphi \wedge \varphi)$ при $n \geq 3$. Ясно, что ± 1 лежит в пересечении $Ker(\varphi^2) \cap Ker(\varphi \wedge \varphi)$. С другой стороны, поскольку ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой, то в силу известного строения нормальных подгрупп в $GL_n(F)$ каждое из ядер $Ker(\varphi^2)$ и $Ker(\varphi \wedge \varphi)$ либо содержится в подгруппе скалярных матриц группы $GL_n(F)$, либо содержит $SL_n(F)$, либо $GL_n(F) = GL_2(3)$ [10] (см. также [11, с. 92, теорема 3]).

Пусть $n \geq 3$. Тогда размерности пространств $(V \otimes V)/U$ и $(V \otimes V)/W$ больше 1. Поэтому в силу коммутативности фактор-группы $GL_n(F)/SL_n(F)$, одномерности неприводимых представлений коммутативных групп и уже доказанной неприводимости представлений φ^2 и $\varphi \wedge \varphi$, ядра гомоморфизмов $Ker(\varphi^2)$ и $Ker(\varphi \wedge \varphi)$ лежат в подгруппе скалярных матриц группы $GL_n(F)$. Если скалярная матрица d лежит в $Ker(\varphi^2)$ или в $Ker(\varphi \wedge \varphi)$, то она оставляет на месте, например, вектор $e_1 \otimes e_2 + U$ и соответственно вектор $e_1 \otimes e_2 + W$. Отсюда $d = \pm 1$.

Осталось вычислить ядро $Ker(\varphi^2)$ при $n = 2$. Отметим, что этот подслучай выделился только в связи с исключением $GL_n(F) = GL_2(3)$, указанным выше. Пусть матрица $g = (g_{ij})$ лежит в $Ker(\varphi^2)$. Тогда g оставляет на месте векторы $e_1 \otimes e_1 + U$, $e_2 \otimes e_2 + U$ и $e_1 \otimes e_2 + U$ и простые вычисления приводят к равенству $g = \pm 1$.

Теорема доказана.

3. Неравенство Л. Л. Скотта и порождающие мультиплеты инволюций

Хорошо известный результат Л. Л. Скотта [4, теорема 1] указывает способ получения отрицательного ответа на вопрос такого типа: *существуют ли для данной группы G порождающие элементы $g_1, g_2 \dots, g_k$ с определенными свойствами, для которых $g_1 g_2 \dots g_k = 1$?* Чаще применяется его следующее следствие.

Лемма 1. *Пусть неприводимая подгруппа G общей линейной группы $GL_n(K)$ над полем K порождается элементами $g_1, g_2, \dots, g_k$ с условием $g_1 g_2 \dots g_k = 1$. Через $d(g_i)$ обозначим коразмерность подпространства неподвижных элементов $V(g_i) = \{v \in V \mid g_i v = v\}$, где V — пространство вектор-столбцов размерности n над K. Тогда*

$$d(g_1) + \cdots + d(g_k) \geq 2n. \tag{9}$$

Группа G называется *совершенной*, если она совпадает со своим коммутантом

$$G' = \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle.$$

Укажем довольно элементарные, но полезные связи специальных порождающих множеств небольшой мощности совершенных групп, которые отмечались автором в обзоре [3].

Лемма 2 [3, лемма 3]. *Пусть группа G порождается инволюцией a и элементом b порядка 3. Тогда для ее подгруппы $H = \langle a,\ a^b,\ a^{b^2} \rangle$ справедливы следующие утверждения:*

1) $|G : H| \leq 3$;

2) $G' \leq H$, *в частности $H = G$, если $G = G'$.*

Лемма 3 [3, лемма 4]. *Пусть $n(G)$ — минимальное число порождающих инволюций, произведение которых равно 1, группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $n(G) = 2$ *тогда и только тогда, когда* $|G| = 2$;

2) $n(G) = 3$ *тогда и только тогда, когда G — четверная группа Клейна*;

3) *если $n(G) = 4$, то в G найдется неединичная циклическая нормальная подгруппа. В частности, если группа G простая, то* $n(G) \geq 5$;

4) *если $\overline{G}$ — гомоморфный образ группы G, то $n(\overline{G}) \leq n(G)$.*

Лемма 4 [3, лемма 5]. *Пусть $n(G)$ такое же, как и в лемме 3. Если группа G порождается тремя инволюциями a, b, c, две из которых перестановочны, то $n(G) \leq 5$, в частности, $n(G) = 5$ в случае простой группы G.*

4. Доказательство теоремы 2

Пусть K — алгебраически замкнутое поле, содержащее D. Другие обозначения такие же, как и выше.

С л у ч а й $SL_3(D)$. Все инволюции из $SL_3(D)$ сопряжены в $GL_3(K)$ с диагональной матрицей

$$a = diag(-1,-1,1).$$

Пусть матрица a действует на базисных векторах e_1, e_2, e_3 следующим образом:

$$a(e_1) = -e_1, \quad a(e_2) = -e_2, \quad a(e_3) = e_3.$$

Тогда в индуцированном представлении на факторпространстве $(V \otimes V)/U$, т. е. в представлении φ^2, элемент $\varphi^2(a)$ переводит векторы $e_1 \otimes e_3 + U$ и $e_2 \otimes e_3 + U$ в противоположные, а остальные 4 базисных вектора оставляет на месте. Поэтому в 6-мерном представлении φ^2 в указанном выше базисе

$$\varphi^2(a) = diag(1,1,1,1,-1,-1).$$

В силу теоремы 1 группа $\varphi^2(SL_3(D))$ неприводима, но $d(\varphi^2(a)) = 2$ и для любого $k \leq 5$ справедливо неравенство

$$k \cdot d(\varphi^2(a)) < 2 \cdot 6 = 12.$$

Поэтому при $n = 6$ и любом $k \leq 5$ неравенство (9) нарушается и по лемме 1 группа $\varphi^2(SL_3(D))$ не может порождаться такими k инволюциями, произведение которых равно 1. Следовательно, $n(SL_3(D)) > 5$ в силу п. 4) леммы 3. Отсюда по лемме 4 группа $SL_3(D)$ не может порождаться тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Порождающие тройки инволюций (без перестановочности двух из них) группы SL_3 над кольцом целых чисел и над произвольным конечным полем указаны в [12] и соответственно в [6; 13; 14]. Следовательно, если D является кольцом целых чисел или конечным полем нечетного порядка, то $n(SL_3(D)) = n_c(SL_3(D)) = 6$. Заметим, что согласно теореме 1 группы $\varphi^2(SL_n(D))$ и $SL_n(D)$ при нечетном n изоморфны, хотя этот факт здесь и не использовался.

С л у ч а й $SL_6(D)$. Любая инволюция из $SL_6(D)$ сопряжена в $GL_6(K)$ с одной из трех инволюций:

$a = diag(-1,-1,1,1,1,1)$,

$b = diag(-1,-1,-1,-1,1,1)$,

$c = diag(-1,-1,-1,-1,-1,-1)$.

Согласно теореме 1 существует 21-мерное неприводимое представление φ^2 группы $SL_6(D)$, при котором $d(\varphi^2(a) = d(\varphi^2(b) = 8$, $d(\varphi^2(c)) = 0$, так как $\varphi^2(c) = 1$, а элементы $\varphi^2(a)$ и $\varphi^2(b)$ переводят в противоположные ровно по восемь базисных векторов $e_i \otimes e_j + U$, $i = 1,2$, $j = 3,4,5,6$, и соответственно $e_i \otimes e_j + U$, $i = 1,2,3,4$, $j = 5,6$, а другие оставляют на месте. Поэтому для любого $k \leq 5$ выполняется неравенство

$$k \cdot 8 < 2 \cdot 21 = 42.$$

Далее так же, как и выше, для $SL_3(D)$ получаем неравенство $n(SL_6(D)) > 5$ и то, что группа $SL_6(D)$ не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Порождаемость инволюцией и элементом порядка 3 группы SL_6 над кольцом целых чисел и над произвольным конечным полем установлена в [15; 16] и соответственно в [17; 18] (см. также [19]). Поэтому в силу леммы 2 получаем равенства $n(SL_6(D)) = n_c(SL_6(D)) = 6$, если D является кольцом целых чисел или конечным полем нечетного порядка, поскольку для таких областей целостности D группа $SL_n(D)$ при $n \geq 3$ совпадает со своим коммутантом.

Теорема доказана.

Автор глубоко признателен рецензенту за указанные опечатки и полезные замечания, которые несомненно способствовали улучшению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. Москва: Мир, 1975. 263 с.
2. Коуровская тетрадь / ред. В. Д. Мазуров Е. И. Хухро; Ин-т математики СО РАН. 17-е изд. Новосибирск, 2010. 136 p.
3. **Нужин Я.Н.** О порождающих множествах инволюций простых конечных групп // Алгебра и логика. 2019. Vol. 58, №3. P. 426–434.
4. **Scott L.L.** Matricies and cohomology // Ann. of Math. 1977. Vol. 105. P. 473–492.
5. **Tamburini M.C., Zucca P.** Generation of certain matrix groups by three involutions, two of which commute // J. Algebra. 1997. Vol. 195, no. 2. P. 650–661.
6. **Нужин Я.Н.** Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. II // Алгебра и логика. 1997. Vol. 36, №4. P. 422–440.
7. **Нужин Я.Н.** О порождаемости группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Владикавказ. мат. журн. 2008. Vol. 10, №1. P. 68–74.
8. **Levchuk D.V., Nuzhin Ya.N.** On generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2008. Vol. 1, no. 2. P. 133–139.
9. **Ward J.M.** Generation of simple groups by conjugate involutions / Queen Mary college, University of London. Thesis of Doctor of Philosophy, 2009. 193 p.
10. **Diedonne J.** Les determinants sur up corps non commutatif // Bull. Soc. Math. France. 1943. Vol. 71. P. 27–45.
11. **Супруненко Д.А.** Группы матриц. Москва: Наука, 1972. 352 с.
12. **Моисеенкова Т.В.** Порождающие мультиплеты инволюций групп $SL_n(\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z})$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Vol. 16, № 3. P. 195–198.
13. **Gillio B.M., Tamburini M.C.** Some class of groups generated by three involutions // Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A. 1985. Vol. 116. P. 191–209.
14. **Нужин Я.Н.** Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 // Алгебра и логика. 1990. Vol. 29, № 2. P. 192–206.
15. **Всемирнов М.А.** Является ли группа SL(6,Z) (2,3)-порожденной? // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2006. Vol. 330. P. 101–130.
16. **Всемирнов М.А.** О (2,3)-порождении матричных групп над кольцом целых чисел // Алгебра и анализ. 2007. Vol 19, № 6. P. 22–58.
17. **Martino L.Di., Vavilov N.** $(2,3)$-generation of $SL(n,q)$. I. Cases $n=5,6,7$ // Comm. Algebra. 1994. Vol. 22. P. 1321–1347.
18. **Tabakov K., Tchakerian K.** $(2,3)$-generation of the groups $PSL_6(q)$ // Serdica Math. J. 2011. Vol. 37. P. 365–370.
19. **Pellegrini M.A.** The $(2,3)$-generation of the special linear groups over finite fields // Bull. Aust. Math. Soc. 2017. Vol. 95, no. 1. P. 48–53.

Поступила 10.05.2020
После доработки 6.07.2020
Принята к публикации 20.07.2020

Нужин Яков Нифантьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: nuzhin2008@rambler.ru

REFERENCES

1. Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups.* Providence: AMS, 2016, 160 p. ISBN: 9781470431051. Translated to Russian under the title *Lektsii o gruppakh Shevalle*, Moscow: Mir Publ., 1975. 263 p.
2. *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory*, 17th ed., eds. V.D. Mazurov and E.I. Khukhro, Inst. Math. SO RAN, Novosibirsk, 2010, 136 p. ISBN: 9785943568916.
3. Nuzhin Ya.N. Generating sets of involutions of finite simple groups. *Algebra Logika*, 2019, vol. 58, no. 3, pp. 426–434 (in Russian). doi: 10.33048/alglog.2019.58.310.
4. Scott L.L. Matricies and cohomology. *Ann. of Math.*, 1977, vol. 105, no. 3, pp. 473–492.

5. Tamburini M.C., Zucca P. Generation of certain matrix groups by three involutions, two of which commute. *J. Algebra*, 1997, vol. 195, no. 2, pp. 650–661. doi: 10.1006/jabr.1997.7055 .
6. Nuzhin Ya.N. Generating triples of involutions of groups of Lie type over a finite field of odd characteristic. II. *Algebra Logic*, 1997, vol. 36, no. 4, pp. 245–256. doi: 10.1007/s10469-997-0066-3 .
7. Nuzhin Ya.N. On the generability of the group $PSL_n(Z)$ by three involutions, two of which commute. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2008, vol. 10, no. 1, pp. 68–74 (in Russian).
8. Levchuk D.V., Nuzhin Ya.N. On generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2008, vol. 1, no. 2, pp. 133–139 (in Russian).
9. Ward J.M. *Generation of simple groups by conjugate involutions*. Queen Mary college, University of London, Thesis of Doctor of Philosophy, 2009, 193 p.
10. Diedonne J. Les determinants sur up corps non commutatif. *Bull. Soc. Math. France*, 1943, vol. 71, pp. 27–45. doi: 10.24033/bsmf.1345 .
11. Suprunenko D.A. *Matrix groups*. Providence: AMS, 1976, 252 p. ISBN: 0821813412 . Original Russian text published in Suprunenko D.A. *Gruppy matrits*. Moscow: Nauka Publ., 1972, 352 p.
12. Moiseenkova T.V. Generating multiplets of involution of the groups $SL_n(\mathbb{Z})$ and $PSL_n(\mathbb{Z})$. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 3, pp. 195–198 (in Russian).
13. Gillio B.M., Tamburini M.C. Some class of groups generated by three involutions. *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, 1985, vol. 116, pp. 191–209 (in Italian).
14. Nuzhin Ya.N. Generating triples of involutions of Chevalley groups over a finite field of characteristic 2. *Algebra and Logic*, 1990, vol. 29, no. 2, pp. 134–143. doi: 10.1007/BF02001358 .
15. Vsemirnov M.A. Is the group $\mathrm{SL}(6,\mathbb{Z})$ $(2,3)$-generated? *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2007, vol. 140, no. 5, pp. 660–675. doi: 10.1007/s10958-007-0006-8 .
16. Vsemirnov M.A. On (2,3)-generation of matrix groups over the ring of integers. *St. Petersburg Math. J.*, 2008, vol. 19, no. 6, pp. 883–910. doi: 10.1090/S1061-0022-08-01026-1 .
17. Di Martino L., Vavilov N. $(2,3)$-generation of $SL(n,q)$. I. Cases $n=5,6,7$. *Comm. Algebra*, 1994, vol. 22, no. 4, pp. 1321–1347. doi: 10.1080/00927879408824908 .
18. Tabakov K., Tchakerian K. $(2,3)$-generation of the groups $PSL_6(q)$. *Serdica Math. J.*, 2011, vol. 37, no. 4, pp. 365–370.
19. Pellegrini M.A. The $(2,3)$-generation of the special linear groups over finite fields. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 2017, vol. 95, no. 1, pp. 48–53. doi: 10.1017/s0004972716000617 .

Received May 10, 2020
Revised July 6, 2020
Accepted July 20, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center, which is financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the project for the establishment and development of regional centers for mathematical research and education (agreement no. 075-02-2020-1534/1), and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00566).

Yakov Nifant'evich Nuzhin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian Federal University, pr. Svobodnyi 79, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: nuzhin2008@rambler.ru .

Cite this article as: Ya. N. Nuzhin. Tensor representations and generating sets of involutions of some matrix groups, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 133–141 .