ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 514.8+515.2

О СВЯЗНЫХ КОМПОНЕНТАХ ФРАКТАЛЬНЫХ КУБОВ[1]

Д. А. Ваулин, Д. А. Дроздов, А. В. Тетенов

В статье показывается существенное отличие фрактальных кубов от фрактальных квадратов. В основе топологической классификации фрактальных квадратов, полученной в 2013 г. К.-С. Лау с соавторами, лежит рассмотрение свойств $\mathbb{Z}^2$-периодического расширения $H = F + \mathbb{Z}^2$ и его дополнения $H^c = \mathbb{R}^2 \setminus H$. Фрактальный квадрат $F \subset \mathbb{R}^2$ содержит отличную от отрезка или точки связную компоненту тогда и только тогда, когда H^c содержит ограниченную связную компоненту. Мы показываем, что существует фрактальный куб F в $\mathbb{R}^3$, для которого множество H^c связно, а множество Q связных компонент K_α куба F обладает следующими свойствами: Q — вполне несвязное самоподобное подмножество гиперпространства $C(\mathbb{R}^3)$, билипшицево изоморфное канторову множеству $C_{1/5}$; все множества $K_\alpha + \mathbb{Z}^3$ связны и попарно не пересекаются; множество значений хаусдорфовых размерностей $\dim_H(K_\alpha)$ совпадает с некоторым промежутком $[a, b]$.

Ключевые слова: фрактальный квадрат, фрактальный куб, суперфрактал, самоподобное множество, гиперпространство, хаусдорфова размерность.

D. A. Vaulin, D. A. Drozdov, A. V. Tetenov. On connected components of fractal cubes.

The paper shows an essential difference between fractal squares and fractal cubes. The topological classification of fractal squares proposed in 2013 by K.-S. Lau et al. was based on analyzing the properties of the $\mathbb{Z}^2$-periodic extension $H = F + \mathbb{Z}^2$ of a fractal square F and of its complement $H^c = \mathbb{R}^2 \setminus H$. A fractal square $F \subset \mathbb{R}^2$ contains a connected component different from a line segment or a point if and only if the set H^c contains a bounded connected component. We show the existence of a fractal cube F in $\mathbb{R}^3$ for which the set $H^c = \mathbb{R}^3 \setminus H$ is connected whereas the set Q of connected components K_α of F possesses the following properties: Q is a totally disconnected self-similar subset of the hyperspace $C(\mathbb{R}^3)$, it is bi-Lipschitz isomorphic to the Cantor set $C_{1/5}$, all the sets $K_\alpha + \mathbb{Z}^3$ are connected and pairwise disjoint, and the Hausdorff dimensions $\dim_H(K_\alpha)$ of the components K_α assume all values from some closed interval $[a, b]$.

Keywords: fractal square, fractal cube, superfractal, self-similar set, hyperspace, Hausdorff dimension.

MSC: 28A80

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-98-107

Введение

Фрактальные квадраты, при всей их простоте, в последние годы стали объектом пристального внимания нескольких исследователей. В 2009 г. Л. Кристеа и Б. Штайнски в работах [3; 4] исследовали фрактальные лабиринты — вид фрактальных квадратов, являющихся дендритами. В 2013 г. К. Лао, Дж. Луо и Х. Рао [7] описали топологическую структуру фрактальных квадратов. Тогда же М. Бонк и С. Меренков [2] получили для них условия квазисимметрической жесткости. В более поздних работах [8; 9] были изучены вопросы липшицевой эквивалентности фрактальных квадратов.

Настоящая статья посвящена топологическим свойствам многомерных аналогов фрактальных квадратов — фрактальным k-мерным кубам. Она продолжает исследования, начатые в [11]. Введем необходимые понятия.

Пусть $n \geq 2$, а $D = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ — некоторое подмножество $\{0, 1, \ldots, n-1\}^k$, которое мы назовем *множеством единиц*. Элементы ξ_i множества D определяют систему $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ сжимающих подобий $S_i(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} + \xi_i)/n$ в $\mathbb{R}^k$. Тогда согласно [6, Theorem(3), p.10] существует

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00420).

единственное непустое компактное множество $F \subset \mathbb{R}^k$, удовлетворяющее уравнению

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F) = \frac{F+D}{n},$$

которое назовем *фрактальным k-кубом* (или фрактальным квадратом, если $k = 2$) *порядка n*. С каждым фрактальным k-кубом F связывают его $\mathbb{Z}^k$-периодическое расширение $H = F + \mathbb{Z}^k$ и дополнение $H^c = \mathbb{R}^k \setminus H$. Мы также обозначим через $P = [0,1]^k$ единичный k-мерный куб, и определим действующий на подмножествах $A \subset \mathbb{R}^k$ оператор Хатчинсона T для задаваемой множеством D системы сжимающих отображений $\mathcal{S}$ равенством

$$T(A) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(A) = \frac{A+D}{n}.$$

Для случая $k = 2$, когда F является фрактальным квадратом, К. Лау, Д. Луо и Х. Рао доказали следующее утверждение.

Теорема 1 [7, теорема 1.1]. *Пусть F — фрактальный квадрат. Тогда либо*

(i) *все компоненты H^c ограничены, и F содержит отличную от точки связную компоненту, которая не является отрезком прямой, либо*

(ii) *все компоненты H^c неограничены, и F либо вполне несвязно, либо все связные компоненты F — либо точки, либо параллельные прямолинейные отрезки.*

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Существует фрактальный куб $F \subset \mathbb{R}^3$ такой, что множество H^c связно, а H есть несчетное объединение неограниченных связных компонент, каждая из которых инвариантна относительно $\mathbb{Z}^3$-сдвигов.*

Теорема 2 показывает существенное отличие фрактальных кубов от фрактальных квадратов: Для фрактального куба F, рассматриваемого в теореме 2, каждая из несчетного семейства связных компонент множества H является $\mathbb{Z}^3$-периодической и поэтому бесконечной во всех направлениях пространства $\mathbb{R}^3$. Никакая из связных компонент $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ фрактального куба F не является ни точкой, ни прямолинейным отрезком, а множество H^c связно и неограничено, поэтому ни одно из условий (i), (ii) теоремы 1 не выполняется.

Разделы 1 и 2 статьи содержат доказательство теоремы 2 и предваряющие его результаты. Мы задаем в разд. 1 множество единиц D, определяющее фрактальный куб F. По построению, это множество разбивается на две части $D = D_0 \sqcup D_1$. Поэтому и порождающий F оператор Хатчинсона записывается в виде $T(A) = T_0(A) \cup T_1(A)$. Тогда F можно рассматривать как суперфрактал [1, Definition 18], порожденный системой $\Sigma = \{\tilde{T}_1, \tilde{T}_2\}$, действующей в гиперпространстве $C(\mathbb{R}^3)$. Пусть I^∞ — индексное пространство, Q — аттрактор системы Σ, а $\sigma : I^\infty \to Q$ — соответствующее индексное отображение. В этих терминах мы получаем в разд. 2 следующее описание множества связных компонент F:

Теорема 3. *Для каждого $\boldsymbol{\alpha} \in I^\infty$ точке $q_{\boldsymbol{\alpha}} = \sigma(\boldsymbol{\alpha})$ аттрактора $Q \subset C(\mathbb{R}^3)$ системы сжимающих отображений $\Sigma = \{\tilde{T}_0, \tilde{T}_1\}$ гиперпространства $C(\mathbb{R}^3)$ соответствует связная компонента $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ фрактального куба F, причем*

$$F = \bigsqcup_{\boldsymbol{\alpha} \in I^\infty} K_{\boldsymbol{\alpha}}$$

Существует билипшицев гомеоморфизм $\psi : C_{1/5} \to Q$ канторова множества $C_{1/5}$ на Q, который индуцирует изоморфизм самоподобных структур на этих множествах.

В разд. 3 мы доказываем теорему 4 о значениях хаусдорфовой размерности компонент $K_{\boldsymbol{\alpha}} \subset F$ и о положительности меры этих компонент в случае когда $\boldsymbol{\alpha}$ — предпериодическая последовательность.

1. Построение множества F

Некоторые обозначения. Мы будем строить множество F как фрактальный куб порядка $n = 5$. В этом случае всякое множество единиц D содержится в $\{0,1,2,3,4\}^3$, для каждого $\xi \in D$ отображение S_ξ задается формулой $S_\xi(\boldsymbol{x}) = (\xi + \boldsymbol{x})/5$, а неподвижной точкой S_ξ является точка $\xi/4$. Оператор Хатчинсона T системы $\mathcal{S} = \{S_\xi, \xi \in D\}$ задается равенством $T(A) = (A + D)/5$. Так как компактные множества $A \subset \mathbb{R}^3$ — элементы гиперпространства $C(\mathbb{R}^3)$, наделенного метрикой Хаусдорфа d_H, равенство $T(A) = (A+D)/5$ задает отображение $\tilde{T} : C(\mathbb{R}^3) \to C(\mathbb{R}^3)$ гиперпространства $C(\mathbb{R}^3)$. Это отображение является сжимающим, и его липшицева константа равна $1/5$. Иногда мы будем проводить формальное различие между действием оператора T на подмножества $A \subset \mathbb{R}^3$ и действием отображения $\tilde{T}$ на элементы $A \in C(\mathbb{R}^3)$ гиперпространства $C(\mathbb{R}^3)$.

Свойства фрактальных кубов, задаваемых D_0 и D_1. Пусть D_0 и D_1 — множества единиц, для которых соответствующие им подмножества $P_0 = (D_0 + P)/5$ и $P_1 = (D_1 + P)/5$ куба P изображены на рис. 1. Эти множества содержат $\#D_0 = 13$ и $\#D_1 = 44$ элементов. Множества единиц D_0 и D_1 определяют операторы Хатчинсона $T_0(A) = (D_0 + A)/5$ и $T_1(A) = (D_1 + A)/5$ и фрактальные кубы K_0 и K_1 соответственно (рис. 2).

1. Заметим, что $P_0 \cap P_1 = \varnothing$, причем наименьшее расстояние $d(P_0, P_1)$ между точками этих множеств равно $1/5$.

2. Множества P_0 и P_1 связны и инвариантны относительно группы симметрий куба P, а их пересечения с гранями W куба P непусты. Обозначим через W_0 грань P, лежащую в плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Тогда $D_0 \cap \mathbb{R}^2$ и $D_1 \cap \mathbb{R}^2$ — множества единиц, задающие фрактальные квадраты $K_0 \cap W_0$ и $K_1 \cap W_0$. Последние в силу симметрии конгруэнтны пересечениям K_0 и K_1 с любой из граней W куба P.

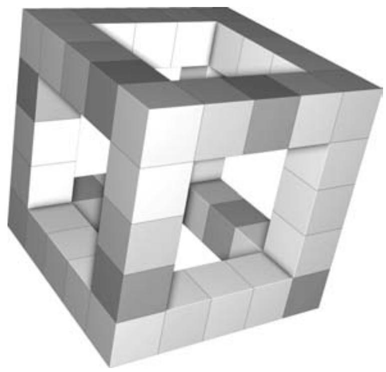



Рис.1: P_0 (слева) и P_1 (справа)

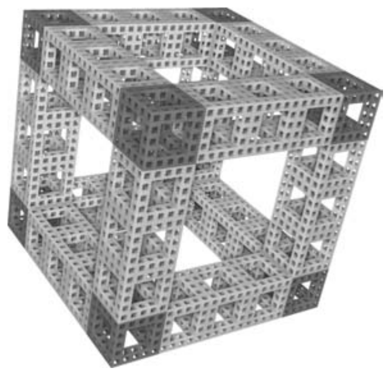



Рис. 2: Фрактальные кубы K_0(слева) и K_1 (справа)

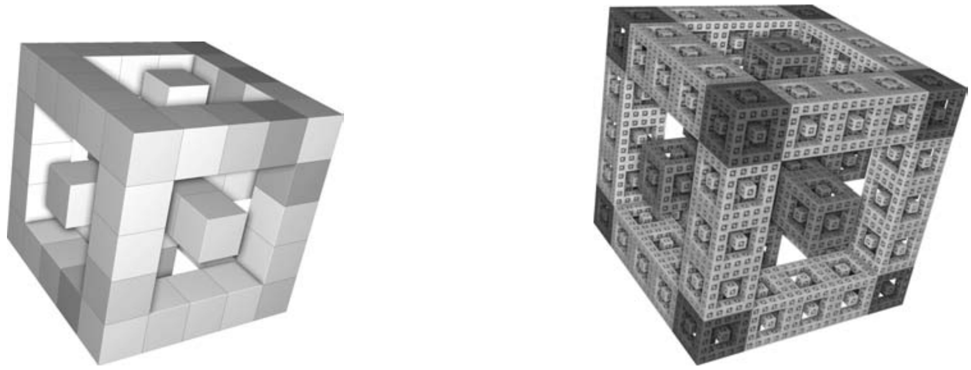


Рис. 3: Множество $T(P)$ (слева) и фрактальный куб F (справа)

3. Пересечение множества P_0 с гранью W_0 куба P — центральный квадрат на этой грани. Так как $D_0 \cap \mathbb{R}^2 = (2,2,0)$, имеем $K_0 \cap W_0 = \{c_0\}$, где $c_0 = (1/2, 1/2, 0)$ — центр грани W_0. Значит в силу симметрии для каждой грани W_i, $K_0 \cap W_i = \{c_i\}$, где c_i — центр грани W_i. Поэтому множества $S_\xi(K_0)$ и $S_\eta(K_0)$ имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда кубы $S_\xi(P)$ и $S_\eta(P)$ имеют общую грань, причем единственной точкой пересечения при этом является центр этой общей грани.

4. Ввиду **3** система сжимающих подобий $\mathcal{S}_{D_0} = \{S_\xi, \xi \in D_0\}$ является системой с одноточечным пересечением. При этом граф пересечений этой системы является деревом. Согласно [10, Theorem 1.7] фрактальный куб K_0 является дендритом. Из строения графа пересечений системы $\mathcal{S}_{D_0}$ следует, что все точки ветвления K_0 имеют порядок 6.

В свою очередь, фрактальный куб K_1 — это $5 \times 5 \times 5$-версия губки Менгера.

Множество D и фрактальный куб F. Определим F как фрактальный куб (рис. 3), множество единиц которого D есть объединение непересекающихся множеств D_0 и D_1. Оператор Хатчинсона T, порождающий фрактальный куб F, задается равенством $T(A) = T_0(A) \cup T_1(A)$. При этом множество $T(P)$ есть объединение непересекающихся связных множеств P_0 и P_1 (см. рис. 3).

2. Свойства множества F

Индексное пространство для F. Поскольку фрактальный куб F задается системой $\mathcal{S} = \{S_\xi, \xi \in D\}$, то для всякого k элементы $\bar\xi = \xi_1 \ldots \xi_k$ множества D^k мы будем называть *мультииндексами длины* k. Множество всех мультииндексов мы обозначим через $D^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D^k$.

Мы будем называть *индексным пространством* системы $\mathcal{S}$ пространство всех бесконечных строк $\{\boldsymbol{\xi} = \xi_1\xi_2\xi_3\ldots; \xi_i \in D\}$, т. е. бесконечное произведение D^∞ конечных дискретных пространств D.

Запись $\bar\xi \sqsubset \bar\eta$ (соотв. $\bar\xi \sqsubset \boldsymbol{\xi}$) означает, что мультииндекс $\bar\xi$ является начальным подсловом в $\bar\eta$ (соотв. в $\boldsymbol{\xi}$). Если не выполняется ни одно из соотношений $\bar\xi \sqsubset \bar\eta$, $\bar\eta \sqsubset \bar\xi$, два мультииндекса называются несравнимыми. Символом $\bar\xi \wedge \bar\eta$ мы обозначаем максимальное общее начальное подслово в $\bar\xi$ и $\bar\eta$. Запись $\bar\xi\bar\eta$ (соотв. $\bar\xi\boldsymbol{\xi}$) означает конкатенацию соответствующих слов или строк. Точно так же, если A, B — множества мультииндексов или строк, то $AB = \{\bar\xi\bar\eta : \bar\xi \in a, \bar\eta \in B\}$. Длина k мультииндекса $\bar\xi = \xi_1 \ldots \xi_k$ обозначается символом $|\bar\xi|$.

Каждый мультииндекс задает отображение $S_{\bar\xi} = S_{\xi_1\ldots\xi_k} = S_{\xi_1} \cdot \ldots \cdot S_{\xi_k}$. Поэтому k-е измельчение системы $\mathcal{S}$ задается равенством $\mathcal{S}^k = \{S_{\bar\xi}, \bar\xi \in D^k\}$, а k-я степень оператора Хатчинсона системы $\mathcal{S}$ задается равенством $T^k(A) = \bigcup_{\bar\xi \in D^k} S_{\bar\xi}(A)$.

Для каждой строки $\boldsymbol{\xi} = \xi_1\xi_2\xi_3 \ldots \in D^\infty$ положим

$$\pi(\boldsymbol{\xi}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{\xi_1\ldots\xi_n}(P) \tag{2.1}$$

Формула (2.1) задает единственную точку в множестве F и тем самым определяет *индексное отображение* $\pi : D^\infty \to F$.

Лемма 1. (i) *Для любого* $\bar\xi \in D^*$ $\pi(\bar\xi D^\infty) = S_{\bar\xi}(F)$;
(ii) *Для* $i = 0, 1$ $\pi(D_i \times D^\infty) = T_i(F)$;
(iii) *Для любой строки* $\boldsymbol{\xi} = \xi_1\xi_2 \ldots . \in D^\infty$ *и любого* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ $\pi(\boldsymbol{\xi}) = \lim\limits_{k\to\infty} S_{\xi_1\ldots\xi_k}(\boldsymbol{x})$.

Доказательство. Из равенства (2.1) следует, что для любых $\bar\xi \in D^*$, $\boldsymbol{\eta} \in D^\infty$, $\pi(\bar\xi\boldsymbol{\eta}) = S_{\bar\xi}(\pi(\boldsymbol{\eta}))$. Так как $\pi(D^\infty) = F$, получаем $\pi(\bar\xi D^\infty) = S_{\bar\xi}(F)$. Аналогично, равенство $\pi(D_i \times D^\infty) = \bigcup_{\xi\in D_i} S_\xi(F)$ дает (ii). Так как для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ и для $\bar\xi = \xi_1 \ldots \xi_k$ расстояние $d(S_{\bar\xi}(\boldsymbol{x}), S_{\bar\xi}(P)) = d(x, P)/5^k$, переходя к пределу при $k \to \infty$, получим (iii). $\square$

Множество Q и его точки $K_{\boldsymbol{\alpha}}$. Учитывая, что оператор T удовлетворяет уравнению $T(A) = T_0(A) \cup T_1(A)$, мы рассмотрим систему сжимающих отображений $\Sigma = \{\tilde T_0, \tilde T_1\}$ гиперпространства $C(\mathbb{R}^3)$. Обозначим ее аттрактор через Q.

Так как $\operatorname{Lip}\tilde T_i = 1/5$, аттрактор Q системы Σ — вполне несвязное компактное подмножество в $C(\mathbb{R}^3)$. Более того, так как из включений $T_i(F) \subset F$ следует включение $\tilde T_0(C(F)) \cup \tilde T_1(C(F)) \subset C(F)$, множество Q содержится в пространстве $C(F)$ всех компактных подмножеств фрактального куба F.

Положим $I = \{0, 1\}$. Каждому мультииндексу $\bar\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_k \in I^k$ соответствует отображение $\tilde T_{\bar\alpha} = \tilde T_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \tilde T_{\alpha_k}$ пространства $C(\mathbb{R}^3)$ в себя, задаваемое равенством $T_{\bar\alpha}(A) = T_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot T_{\alpha_k}(A)$. Положим $P_{\bar\alpha} = T_{\bar\alpha}(P)$.

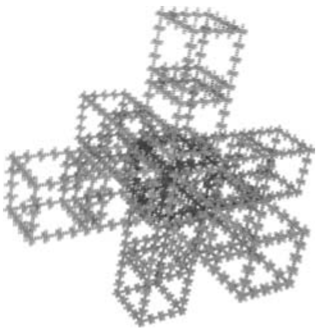
Индексным пространством для системы Σ мы назовем множество I^∞. По теореме Хатчинсона, для каждой бесконечной строки $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\alpha_2 \ldots . \in I^\infty$ и любого $A \in C(\mathbb{R}^3)$ существует предел $K_{\boldsymbol{\alpha}} = \lim\limits_{m\to\infty} T_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(A)$, не зависящий от выбора $A \in C(\mathbb{R}^3)$. Тем самым мы зададим *индексное отображение* $\sigma : I^\infty \to Q$ формулой $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = K_{\boldsymbol{\alpha}}$.

В случае, когда $A = P$ (или $A = F$), множества $T_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(P) = P_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ (соотв. $F_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$) образуют последовательность вложенных компактов, поэтому предел последовательности $P_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ в метрике Хаусдорфа совпадает в их пересечением

$$K_{\boldsymbol{\alpha}} = \lim_{m\to\infty} P_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = \bigcap_{\bar\alpha\sqsubset\boldsymbol{\alpha}} P_{\bar\alpha} = \bigcap_{\bar\alpha\sqsubset\boldsymbol{\alpha}} F_{\bar\alpha}.$$

Если $\boldsymbol{\alpha}$ — периодическая строка с периодом $\bar\alpha$, то множество $K_{\boldsymbol{\alpha}} \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет уравнению $K_{\boldsymbol{\alpha}} = T_{\bar\alpha}(K_{\boldsymbol{\alpha}})$, и в этом случае $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ совпадает с аттрактором $K_{\bar\alpha}$ оператора $T_{\bar\alpha}$ (рис. 4).

Соотношения между пространствами D^∞ и I^∞. Пусть $\varphi : D \to I$ — отображение, тождественно равное 0 на D_0 и равное 1 на D_1. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ зададим отображение



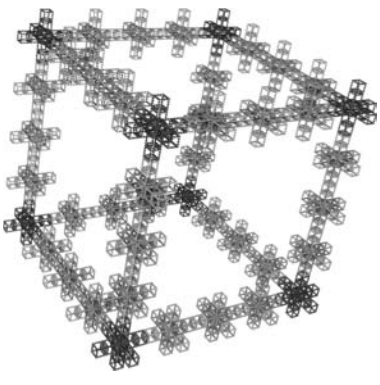


Рис. 4: Компоненты K_{01} и K_{10}

$\varphi_k : D^k \to I^k$ равенством $\varphi_k(\xi_1 \dots \xi_k) = \varphi(\xi_1) \dots \varphi(\xi_k)$. Для каждого мультииндекса $\bar\alpha \in I^k$ положим $D_{\bar\alpha} = D_{\alpha_1} \times \dots \times D_{\alpha_k}$. Тогда для любого $\bar\alpha \in I^k$, $\varphi_k^{-1}(\bar\alpha) = D_{\bar\alpha}$. При этом множество D^k есть дизъюнктное объединение подмножеств $D_{\bar\alpha}$ по всем $\bar\alpha \in I^k$.

Аналогично зададим отображение индексных пространств $\varphi_\infty : D^\infty \to I^\infty$ равенством $\varphi_\infty(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\alpha}$, где $\boldsymbol{\xi} = \xi_1 \dots \xi_k \dots$, а $\boldsymbol{\alpha} = \varphi(\xi_1) \dots \varphi(\xi_k) \dots$. Будучи произведением непрерывных отображений, φ_∞ непрерывно.

Пусть $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\alpha_2 \dots$ и $D_{\boldsymbol{\alpha}} = \varphi_\infty^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$. Пространство $D_{\boldsymbol{\alpha}}$ есть бесконечное произведение компактных пространств $\prod_{i=1}^\infty D_{\alpha_i}$. Поэтому множества $D_{\boldsymbol{\alpha}}$ компактны и $D^\infty = \bigsqcup_{\boldsymbol{\alpha} \in I^\infty} D_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Лемма 2. (i) *Для любого мультииндекса* $\bar\alpha \in I^k, k \in \mathbb{N}$, *множество* $P_{\bar\alpha}$ *связно*;

(ii) *Для любого* $\boldsymbol{\alpha} \in \{0,1\}^\infty$ *множество* $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ *связно*;

(iii) $\pi(D_{\boldsymbol{\alpha}}) = K_{\boldsymbol{\alpha}}$ *и* $F = \bigcup_{\boldsymbol{\alpha} \in I^\infty} K_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Доказательство. (i) Множества P_i, $i \in 0, 1$, обладают следующими свойствами:

(i1) Множества P_i инвариантны относительно симметрий куба P, в частности, пересечения P_i с любыми двумя противоположными гранями куба P конгруэнтны относительно параллельного переноса одной грани в другую;

(i2) любые два куба $(\xi + P)/5, (\eta + P)/5 \subset P_i$ с ребром длины $1/5$ в P_i можно соединить путем, пересекающим только грани кубов из P_i и не пересекающим их ребер.

Если $\xi, \eta \in D_i$ таковы, что кубы $S_\xi(P), S_\eta(P)$ имеют общую грань, то $S_\xi(P_j) \cap S_\eta(P_j)$ имеет непустую внутренность. Поэтому для любых $i, j \in I$ множества $T_i(P_j)$ связны и обладают теми же свойствами (i1) и (i2).

Рассуждая по индукции, мы получаем, что множества $T_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(P_i)$ связны и наследуют свойства (i1), (i2).

(ii) Так как $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ — пересечение убывающей по включению последовательности связных компактных множеств $P_{\alpha_1 \dots, \alpha_m}$, множество $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ также компактно и связно и обладает свойствами (i1), (i2).

(iii) Множество $D_{\boldsymbol{\alpha}}$ есть пересечение убывающей последовательности компактов $D_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \times D^\infty$. Согласно лемме 1 $\pi(D_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \times D^\infty) = F_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$, поэтому $\pi(D_{\boldsymbol{\alpha}}) \subset K_{\boldsymbol{\alpha}}$. Поскольку $F = \pi(D^\infty) = \bigcup_{\boldsymbol{\alpha} \in I^\infty} \pi(D_{\boldsymbol{\alpha}})$, то $F = \bigcup_{\boldsymbol{\alpha} \in I^\infty} K_{\boldsymbol{\alpha}}$. □

Из конструкции множеств D_0, D_1 следует, что хаусдорфово расстояние между множествами $d_H(P_0, P_1) = 2\sqrt{2}/5$, $d_H(P, P_i) \le 2\sqrt{2}/5$, в то время как минимальное расстояние $d(P_0, P_1)$ между точками этих множеств равно $1/5$. Отсюда мы получаем следующие оценки.

Лемма 3. *Пусть* $\bar\alpha, \bar\beta \in I^*$ — *несравнимые мультииндексы. Тогда*

$$P_{\bar\alpha} \cap P_{\bar\beta} = \varnothing, \quad d_H(P_{\bar\alpha}, P_{\bar\beta}) < 3\sqrt{5}/5^{|\bar\alpha \wedge \bar\beta|} \quad \textit{и} \quad d(P_{\bar\alpha}, P_{\bar\beta}) \ge 1/5^{|\bar\alpha \wedge \bar\beta| + 1}.$$

Доказательство. Если $\alpha_1 \ne \beta_1$, то $P_{\bar\alpha} \subset P_{\alpha_1}, P_{\bar\beta} \subset P_{\beta_1}$, следовательно,

$$d_H(P_{\bar\alpha}, P_{\bar\beta}) \le d_H(P_{\bar\alpha}, P_{\alpha_1}) + d_H(P_{\alpha_1}, P_{\beta_1}) + d_H(P_{\bar\beta}, P_{\beta_1}) \le \frac{2\sqrt{2}}{25} + \frac{2\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{25} < \frac{3\sqrt{2}}{5} \qquad (2.2)$$

и $d(P_{\bar\alpha}, P_{\bar\beta}) \ge d(P_{\alpha_1}, P_{\beta_1}) = 1/5$. Заметим, что $d_H(P_{\sigma\bar\alpha}, P_{\sigma\bar\beta}) = d_H(P_{\bar\alpha}, P_{\bar\beta})/5^{|\sigma|}$ и $d(P_{\sigma\bar\alpha}, P_{\sigma\bar\beta}) = d(P_{\bar\alpha}, P_{\bar\beta})/5^{|\sigma|}$, из чего вытекает утверждение леммы. □

Пусть $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \in I^\infty$. Заметим, что $K_{\boldsymbol{\alpha}} = \bigcap_{k=1}^\infty P_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ есть пересечение убывающей последовательности множеств $P_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$. Тогда, переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве (2.2) и в дальнейших рассуждениях леммы 3, получим

Утверждение. *Для любых* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in I^\infty$

$$\frac{1}{5^{|\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}|}+1} \le d_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}, K_{\boldsymbol{\beta}}) < \frac{3\sqrt{5}}{5^{|\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}|+1}},$$

и

$$d(K_{\boldsymbol{\alpha}}, K_{\boldsymbol{\beta}}) \ge \frac{1}{5^{|\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}|+1}}. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 3. По лемме 2 каждое множество $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ связно и компактно. Для каждого k множества $P_{\bar\alpha}, \bar\alpha \in I^k$ образуют конечное покрытие F попарно непересекающимися континуумами. При этом из включения $F_{\bar\alpha} := T_{\bar\alpha}(F) \subset P_{\bar\alpha}$ следует что $F_{\bar\alpha} = F \cap P_{\bar\alpha}$. Поэтому для любых $\bar\alpha \in I^*$, множества $F_{\bar\alpha}$ открыто-замкнуты в F. Поэтому $\{F_{\bar\alpha}, \bar\alpha \sqsubset \boldsymbol{\alpha}\}$ — фундаментальная система открыто-замкнутых окрестностей множества $K_{\boldsymbol{\alpha}}$, и каждое из множеств $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ является связной компонентой F. При этом $F = \bigsqcup \boldsymbol{\alpha} \in I^\infty K_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Пусть $x_{\boldsymbol{\alpha}}, x_{\boldsymbol{\beta}}$ — точки канторова множества $C_{1/5}$ с адресами $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$. они удовлетворяют неравенству

$$3 \cdot 5^{-(|\bar\alpha\wedge\bar\beta|+1)} < d(x_{\boldsymbol{\alpha}}, x_{\boldsymbol{\beta}}) < 5^{-(|\bar\alpha\wedge\bar\beta|)}.$$

В то же время для точек $K_{\boldsymbol{\alpha}}, K_{\boldsymbol{\beta}} \in Q$ выполняется неравенство

$$5^{-(|\bar\alpha\wedge\bar\beta|+1)} < d_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}, K_{\boldsymbol{\beta}}) < 3\sqrt{5} \cdot 5^{-(|\bar\alpha\wedge\bar\beta|+1)}. \tag{2.3}$$

Из неравенства (2.3) получим

$$d(x_{\boldsymbol{\alpha}}, x_{\boldsymbol{\beta}})/5 < d_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}, K_{\boldsymbol{\beta}}) < \sqrt{5} \cdot d(x_{\boldsymbol{\alpha}}, x_{\boldsymbol{\beta}}). \tag{2.4}$$

Пусть $\psi : C_{1/5} \to Q$ задается формулой $\psi(x_{\boldsymbol{\alpha}}) = K_{\boldsymbol{\alpha}}$. Согласно (2.4) ψ — билипшицев гомеоморфизм между $C_{1/5}$ и Q. Если $f_0(x) = x/5$, $f_1(x) = x/5 + 4/5$ — отображения в $\mathbb{R}$, порождающие $C_{1/5}$, то $\psi \cdot f_i = \tilde T_i \circ \psi$. Поэтому гомеоморфизм ψ индуцирует изоморфизм самоподобных структур на $C_{1/5}$ и Q. $\square$

Доказательство теоремы 2. Для любой компоненты $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ расширение $K_{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbb{Z}^3$ связно, поскольку пересечения $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ с любыми двумя противоположными гранями куба P конгруэнтны относительно параллельного переноса одной грани в другую. Поскольку такое расширение получено путем объединения $\mathbb{Z}^3$-сдвигов компоненты $K_{\boldsymbol{\alpha}}$, то $K_{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbb{Z}^3$ инвариантно относительно $\mathbb{Z}^3$-сдвигов. Значит, $H = F + \mathbb{Z}^k$ есть несчетное объединение неограниченных компонент, каждая из которых инвариантна относительно $\mathbb{Z}^3$-сдвигов.

Далее, поскольку $F = \bigcap_{k=1}^\infty T^k(P)$ есть пересечение убывающей по включению последовательности компактов, то множество $P \setminus F = \bigcup_{k=1}^\infty P \setminus T^k(P)$ объединение возрастающей последовательности открытых подмножеств из P, каждое из которых связно. Поэтому $P \setminus F$ связно. С другой стороны, поскольку пересечения $P \setminus F$ с противоположными гранями куба P конгруэнтны, то множество $H^c = P \setminus F + \mathbb{Z}^3$ связно. $\square$

3. Размерности компонент

Пусть $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\alpha_2\ldots \in I^\infty$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ *плотностью единиц* в начальном подслове $\alpha_1\ldots\alpha_k$ мультииндекса $\boldsymbol{\alpha}$ мы назовем число $\lambda_k(\boldsymbol{\alpha}) = k^{-1}\sum_{i=1}^k \alpha_i$. Положим $\overline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}} = \limsup\limits_{k\to\infty} \lambda_k(\boldsymbol{\alpha})$, $\underline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}} = \liminf\limits_{k\to\infty} \lambda_k(\boldsymbol{\alpha})$ и, если $\underline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}}$, мы пишем $\lambda_{\boldsymbol{\alpha}} = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(\boldsymbol{\alpha})$. Если $\boldsymbol{\alpha}$ — предпериодическая строка с длиной периода p, то $\lambda_{\boldsymbol{\alpha}}$ равна плотности единиц в любом подслове $\bar\beta$ длины p из периодической части строки $\boldsymbol{\alpha}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Для любого* $\boldsymbol{\alpha} \in I^\infty$

$$\overline{\dim}_B(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = (1 - \overline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}}) \log_5 13 + \overline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}} \log_5 44,$$

$$\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = \underline{\dim}_B(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = (1 - \underline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}}) \log_5 13 + \underline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}} \log_5 44.$$

Если строка $\boldsymbol{\alpha}$ *— предпериодическая, то* $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ *имеет положительную меру Хаусдорфа в размерности* $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}})$.

Доказательство. Пусть $\bar{\alpha} \sqsubset \boldsymbol{\alpha}, |\bar{\alpha}| = k$ и $\sum_{i=1}^k \alpha_i = m$. Множество $P_{\bar{\alpha}}$ состоит из $\#D_{\bar{\alpha}} = 13^{k-m}44^m$ кубов с ребром $\delta_k = 5^{-k}$, и эти кубы образуют δ_k-покрытие $K_{\boldsymbol{\alpha}}$. Обозначая $a = \log_5 13$ и $b = \log_5 44$, получим $-\ln N_{\delta_k}/\ln \delta_k = (1 - \lambda_k(\boldsymbol{\alpha}))a + \lambda_k(\boldsymbol{\alpha})b$, поэтому

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{-\ln N_{\delta_k}}{\ln \delta_k} = a + (b-a)\underline{\lambda}(\boldsymbol{\alpha}) \quad \text{и} \quad \limsup_{k\to\infty} \frac{-\ln N_{\delta_k}}{\ln \delta_k} = a + (b-a)\overline{\lambda}(\boldsymbol{\alpha}),$$

что и дает формулы для верхней и нижней клеточной размерности.

Для p-периодического $\boldsymbol{\alpha} = \overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \in I^\infty$, $\underline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}}$, и $\overline{\dim}_B(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = \underline{\dim}_B(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = \dim_B(K_{\boldsymbol{\alpha}})$. В силу уравнения $K_{\boldsymbol{\alpha}} = T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}(K_{\boldsymbol{\alpha}})$ множество $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ является аттрактором системы $\{S_{\bar{\xi}}; \bar{\xi} \in D_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\}$, удовлетворяющей условию открытого множества (OSC). Поэтому (см. [5, Theorem 9.3, p. 118]) $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = \dim_B(K_{\boldsymbol{\alpha}})$ и $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ имеет конечную положительную меру в этой размерности.

Последнее верно и для предпериодических $\boldsymbol{\alpha}$. Если $\boldsymbol{\alpha} = \bar{\beta}\boldsymbol{\beta}$, где $\bar{\beta}$ — конечное подслово и $\boldsymbol{\beta}$ — периодическая часть, то $K_{\boldsymbol{\alpha}} = T_{\bar{\beta}}(K_{\boldsymbol{\beta}})$. Тогда $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = \dim_H(K_{\boldsymbol{\beta}})$. Так как $\lambda(\boldsymbol{\beta}) = \lambda(\boldsymbol{\alpha})$, имеем $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = a + (b-a)\lambda(\boldsymbol{\alpha})$.

Теперь докажем, что $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = \underline{\dim}_B(K_{\boldsymbol{\alpha}})$ для любой строки $\boldsymbol{\alpha}$. Пусть $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\alpha_2\ldots$. Для каждого k будем обозначать k-й остаток последовательности как $\boldsymbol{\alpha}_k = \alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots$.

Зададим вероятностную меру $\mu_{\boldsymbol{\alpha}}$ на пространстве $D_{\boldsymbol{\alpha}}$ как произведение равномерных вероятностных мер на сомножителях D_{α_i}. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и $\bar{\xi} \in D_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ справедливо

$$\mu(\bar{\xi}D_{\boldsymbol{\alpha}_k}) = (\#D_{\alpha_1\ldots\alpha_k})^{-1} = 5^{-k(a+\lambda_k(\boldsymbol{\alpha})\cdot(b-a))}.$$

Пусть $\Lambda(t) = 5^{-(a+t(b-a))}$. Функция $\Lambda(t)$ убывает на $[0,1]$, и $\Lambda(0) = 1/13$, а $\Lambda(1) = 1/44$.

Зададим меру $\tilde{\mu}$ с носителем в $K_{\boldsymbol{\alpha}}$, положив для всякого $A \subset P$, $\tilde{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}}(A) = \mu_{\boldsymbol{\alpha}}(\pi^{-1}(A \cap K_{\boldsymbol{\alpha}}))$. Покажем, что для этой меры выполняется принцип распределения масс.

Пусть B — шар, такой что

$$\sqrt{3} \cdot 5^{-n-1} < |B| \le \sqrt{3} \cdot 5^{-n}. \tag{3.1}$$

Тогда B содержится не более, чем в 27 кубах со стороной 5^{-n}. Поэтому для множества $B \cap K_{\boldsymbol{\alpha}}$ его прообраз $\pi^{-1}(B \cap K_{\boldsymbol{\alpha}})$ содержится не более чем в 27 множествах $\xi_1 \ldots \xi_n D_{\boldsymbol{\alpha}_n}$, мера каждого из которых равна $\Lambda(\lambda_n)^n$.

Отсюда следует неравенство $\tilde{\mu}(B) < 27\Lambda(\lambda_n)^n$.

По определению нижней плотности $\underline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}}$, для любого $\nu < \underline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}}$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при $n > N$, $\lambda_n(\boldsymbol{\alpha}) > \nu$. Тогда $\Lambda(\nu) > \Lambda(\lambda_n)$ и поэтому $\tilde{\mu}(B) < 27\Lambda(\nu)^n$.

Из левой части неравенства (3.1) получаем, что $n > \log_5(\sqrt{3}/(5|B|))$. Тогда

$$\tilde{\mu}(B) < 27\Lambda(\nu)^{\log_5(\sqrt{3}/(5|B|))} = L \cdot |B|^{-\log_5 \Lambda(\nu)} = L \cdot |B|^{a+\nu(b-a)},$$

где $L = 27 \cdot (5^{-1}\sqrt{3})^{\log_5 \Lambda(\nu)}$ — положительная постоянная.

Согласно принципу распределения масс [5, Mass distribution Principle 4.2, p.55] $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) \geqslant a + \nu(b-a)$ для любого $\nu < \underline{\lambda}_{\boldsymbol{\alpha}}$. Следовательно, $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) \geqslant a + (b-a)\underline{\lambda}(\boldsymbol{\alpha}) = \underline{\dim}_B(K_{\boldsymbol{\alpha}})$.

Поскольку для любого непустого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ справедливо неравенство $\dim_H(K) \leqslant \underline{\dim}_B(K)$ [5, (3.17), p. 43], мы получаем, что $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = \underline{\dim}_B(K_{\boldsymbol{\alpha}})$. $\square$

З а м е ч а н и е. Для произвольного $\boldsymbol{\alpha} \in I^\infty$ нельзя утверждать ни положительность, ни конечность меры Хаусдорфа множества $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ в его размерности. Если в строке $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\alpha_2\ldots$ индексы $\alpha_i = 0$ при $i = n(n+1)/2$ и $\alpha_i = 1$ в остальных случаях, то $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = b$, причем хаусдорфова мера $H^b(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = 0$. Если же $\alpha_i = 1$ при $i = n(n+1)/2$ и $\alpha_i = 0$ в остальных случаях,то $\dim_H(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = a$, причем хаусдорфова мера $H^a(K_{\boldsymbol{\alpha}}) = \infty$.

Авторы признательны Д. А. Мехонцеву — создателю программного пакета IFSTile, с помощью которого построены все изображения фракталов в данной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Barnsley M.F., Hutchinson J.E., Stenflo Ö.** V-variable fractals: Fractals with partial self similarity // Adv. Math. 2008. Vol. 218, no. 6. P. 2051-2088. doi:10.1016/j.aim.2008.04.011 .
2. **Bonk M., Merenkov S.** Quasisymmetric rigidity of square Sierpinski carpets// Annals Math. 2013. Vol. 177. P. 591—643. doi:10.4007/annals.2013.177.2.5 .
3. **Cristea L.L., Steinsky B.** Curves of infinite length in 4×4-labyrinth fractals // Geom. Dedicata. 2009. Vol. 141. P. 1–17. doi: /10.1007/s10711-008-9340-3 .
4. **Cristea L.L., Steinsky B.**, Curves of infinite length in labyrinth fractals // Proc. Edinb. Math. Soc. II. Ser. 2011. Vol. 54, no. 2. P. 329–344. doi: 10.1017/S0013091509000169 .
5. **Falconer K.J.** Fractal geometry: mathematical foundations and applications. N Y: J. Wiley and Sons, 1990. 288 p. ISBN: 0471922870 .
6. **Hutchinson J.** Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. Vol. 30, no. 5. P. 713–747. doi: 10.1512/iumj.1981.30.30055 .
7. **Lau K.S., Luo J.J., Rao H.** Topological structure of fractal squares // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2013. Vol. 155. P. 73–86. doi: 10.1017/S0305004112000692 .
8. **Luo J.J., Liu J.-C.** On the classification of fractal squares // Fractals. 2016. Vol. 24, no. 1. Art.-no. 1650008. doi: 10.1142/S0218348X16500080 .
9. **Ruan H.J., Wang Y.** Topological invariants and Lipschitz equivalence of fractal squares // J. Math. Anal. Appl. 2017. Vol. 451. P. 327–344. doi: 10.1016/j.jmaa.2017.02.012 .
10. **Tetenov A.V.** Finiteness properties for self-similar sets: [e-resource]. arXiv:2003.04202 [math.MG]. 12 p.
11. **Tetenov A.V., Drozdov D.A.** On the connected components of fractal cubes: [e-resource]. arXiv:2002.02920 [math.MG]. 6 p.

Поступила 6.04.2020
После доработки 20.04.2020
Принята к публикации 11.05.2020

Ваулин Дмитрий Алексеевич
старший преподаватель кафедры математики, физики и информатики
Горно-Алтайского государственного университета
e-mail: d_warrant@mail.ru

Дроздов Дмитрий Алексеевич
магистрант Горно-Алтайского государственного университета
e-mail: dimalek97@yandex.ru

Тетенов Андрей Викторович
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры математики, физики и информатики
Горно-Алтайского государственного университет
г. Горно-Алтайск;
профессор кафедры теории функций
Новосибирский государственный университет
г. Новосибирск
e-mail: atet@mail.ru

REFERENCES

1. Barnsley M.F., Hutchinson J.E., Stenflo Ö. V-variable fractals: Fractals with partial self similarity. *Adv. Math.*, 2008, vol. 218, no. 6, pp. 2051–2088. doi: 10.1016/j.aim.2008.04.011 .
2. Bonk M., Merenkov S. Quasisymmetric rigidity of square Sierpinski carpets. *Annals Math.*, 2013, vol. 177, no. 2, pp. 591–643. doi: 10.4007/annals.2013.177.2.5 .
3. Cristea L.L., Steinsky B. Curves of infinite length in 4×4-labyrinth fractals. *Geom. Dedicata*, 2009, vol. 141, pp. 1–17. doi: 10.1007/s10711-008-9340-3 .
4. Cristea L.L., Steinsky B. Curves of infinite length in labyrinth fractals. *Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser.*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 329–344. doi: 10.1017/S0013091509000169 .
5. Falconer K.J. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications.* N Y: J. Wiley and Sons, 1990, 288 p. ISBN: 0471922870 .
6. Hutchinson J. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 1981, vol. 30, no. 5, pp. 713–747. DOI: 10.1512/iumj.1981.30.30055 .
7. Lau K.S., Luo J.J., Rao H. Topological structure of fractal squares. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 2013, vol. 155, no. 1, pp. 73–86. doi: 10.1017/S0305004112000692 .
8. Luo J.J., Liu J.C. On the classification of fractal squares. *Fractals*, 2016, vol. 24, no. 1, art.-no. 1650008. doi: 10.1142/S0218348X16500080 .
9. Ruan H.J., Wang Y. Topological invariants and Lipschitz equivalence of fractal squares. *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, vol. 451, no. 1, pp. 327–344. doi: 10.1016/j.jmaa.2017.02.012 .
10. Tetenov A.V. Finiteness properties for self-similar sets. *arXiv*:2003.04202 [math.MG].
11. Tetenov A.V., Drozdov D.A. On the connected components of fractal cubes. *arXiv*:2002.02920 [math.MG]. 6 p.

Received April 6, 2020
Revised April 20, 2020
Accepted May 11, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00420).

Dmitrii Alekseevich Vaulin, Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, 649000 Russia,
e-mail: d_warrant@mail.ru .

Dmitry Alekseevich Drozdov, Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, 649000 Russia,
e-mail: dimalek97@yandex.ru .

Andrei Viktorovich Tetenov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, 649000 Russia, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: atet@mail.ru .

Cite this article as: D. A. Vaulin, D. A. Drozdov, A. V. Tetenov. On connected components of fractal cubes. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 98–107 .