ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 521.554.32

О СВОЙСТВАХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП, НЕБОЛЬШИХ ОТНОСИТЕЛЬНО ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ И РЕГУЛЯРНОГО УНИПОТЕНТНОГО ЭЛЕМЕНТА ИЗ ПОДСИСТЕМНОЙ ПОДГРУППЫ[1]

Т. С. Бусел, И. Д. Супруненко

В работе изучаются свойства неприводимых представлений специальной линейной и симплектической групп, небольших относительно характеристики поля и регулярных унипотентных элементов непростого порядка из подсистемных подгрупп типов A_l и C_l соответственно с определенными условиями на l. Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$, $G = A_r(K)$ или $C_r(K)$, $l < r - 1$ при $G = A_r(K)$ и $l < r$ при $G = C_r(K)$, $H \subset G$ — подсистемная подгруппа с двумя простыми компонентами H_1 и H_2 типов A_l и A_{l-r-1} или C_l и C_{r-l} соответственно, x — регулярный унипотентный элемент из H_1. Предположим, что $l + 1 = ap^s + b$ при $G = A_r(K)$ и $2l = ap^s + b$ при $G = C_r(K)$, где $a < p$, $p \le b \le p^s$, $s > 1$. Назовем неприводимое представление φ группы G (p, x)-специальным, если все веса ограничения представления φ на хорошую A_1-подгруппу, содержащую x^{p^s}, меньше p (здесь множество весов группы типа A_1 канонически отождествляется с множеством целых чисел). Обозначим символом $d_\rho(z)$ минимальный многочлен образа элемента z в представлении ρ и назовем композиционный фактор ψ ограничения представления φ на H большим относительно элемента $z \in H$, если $d_\psi(z) = d_\varphi(z)$. Основные результаты статьи — теоремы 1 и 2.

Теорема 1. Пусть φ — (p, x)-специальное представление группы G. Тогда ограничение φ на H не имеет композиционных факторов, больших относительно x и нетривиальных для H_2.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 число блоков Жордана максимальной размерности у элемента $\varphi(x)$ не превосходит некоторого числа, которое зависит только от p, b и коэффициентов старшего веса и не зависит от ранга группы.

В статье показано, почему изучаемый здесь случай целесообразно рассматривать отдельно. Так, для p-ограниченных представлений соответствующих групп с большими относительно характеристики старшими весами справедливы утверждения, противоположные теоремам 1 и 2. Результаты о блочной структуре образов унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп могут быть использованы для решения задач распознавания представлений и линейных групп по наличию матриц определенного вида.

Ключевые слова: унипотентные элементы, размерности блоков Жордана, специальная линейная группа, симплектическая группа.

T. S. Busel, I. D. Suprunenko. On the properties of irreducible representations of special linear and symplectic groups that are not large with respect to the field characteristic and regular unipotent elements from subsystem subgroups.

We study the properties of irreducible representations of special linear and symplectic groups that are not large with respect to the ground field characteristic and regular unipotent elements of nonprime order from subsystem subgroups of types A_l and C_l, respectively, with certain conditions on l. Assume that K is an algebraically closed field of characteristic $p > 2$, $G = A_r(K)$ or $C_r(K)$, $l < r - 1$ for $G = A_r(K)$ and $l < r$ for $G = C_r(K)$, $H \subset G$ is a subsystem subgroup with two simple components H_1 and H_2 of types A_l and A_{l-r-1} or C_l and C_{r-l}, respectively, and x is a regular unipotent element from H_1. Suppose that $l + 1 = ap^s + b$ for $G = A_r(K)$ and $2l = ap^s + b$ for $G = C_r(K)$ where $a < p$, $p \le b \le p^s$, and $s > 1$. An irreducible representation φ of G is said to be (p, x)-special if all the weights of the restriction of φ to a nice A_1-subgroup containing x^{p^s} are less than p (here the set of weights of a group of type A_1 is canonically identified with the set of integers). Denote by $d_\rho(z)$ the minimal polynomial of the image of an element z in a representation ρ and call the composition factor ψ of the restriction of φ to H large for $z \in H$ if $d_\psi(z) = d_\varphi(z)$. The main results of the paper are Theorems 1 and 2.

Theorem 1. Let φ be a (p, x)-special representation of G. Then the restriction of φ to H has no composition factors that are large for x and nontrivial for H_2.

Theorem 2. Under the assumptions of Theorem 1, the number of maximum size Jordan blocks of the element $\varphi(x)$ does not exceed a certain integer which depends only upon p, b, and the coefficients at the highest weight and does not depend on the group rank.

[1]Работа поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект № Ф19-024).

We explain why the case studied here should be considered separately. For instance, for p-restricted representations of the corresponding groups with large highest weights with respect to the characteristic, assertions opposite to Theorems 1 and 2 are valid. The results on the block structure of the images of unipotent elements in representations of algebraic groups can be used for solving recognition problems for representations and linear groups based of the presence of certain special matrices.

Keywords: unipotent elements, Jordan block sizes, special linear group, symplectic group.

MSC: 20G05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-88-97

1. Введение

Пусть x — элемент порядка p^{s+1} из простой алгебраической группы G классического типа над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p > 2$, $s \geq 0$. Положим $y = x^{p^s}$. Пусть A — хорошая A_1-подгруппа (см. [10, теорема 1]), содержащая y. Назовем неприводимое представление φ группы G (p,x)-*специальным*, если все веса ограничения $\varphi|A$ меньше p (здесь множество весов группы типа A_1 канонически отождествляется с множеством целых чисел).

В работе изучаются свойства неприводимых представлений специальной линейной и симплектической групп, являющихся (p,x)-специальными для регулярных унипотентных элементов x непростого порядка из подсистемных подгрупп типов A_l и C_l соответственно с определенными условиями на l. Всюду в дальнейшем $p > 2$, $G = A_r(K)$ или $C_r(K)$, $|z|$ — порядок элемента z, $l < r-1$ при $G = A_r(K)$ и $l < r$ при $G = C_r(K)$, $H \subset G$ — подсистемная подгруппа с двумя простыми компонентами H_1 и H_2 типов A_l и A_{l-r-1} или C_l и C_{r-l} соответственно.

Положим $n = l+1$ при $G = A_r(K)$ и $n = 2l$ при $G = C_r(K)$. Предположим, что $n = ap^s + b$, где $0 < a < p$, $p \leq b \leq p^s$, $s > 1$. Из доказанной в разд. 2 леммы 3 следует, что неприводимое представление группы G является (p,x)-специальным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) старший вес представления имеет вид

$$\begin{cases} a_1\omega_1 + \ldots + a_{p-1}\omega_{p-1} + a_{r-p+2}\omega_{r-p+2} + \ldots + a_r\omega_r & \text{при } G = A_r(K), \\ a_1\omega_1 + \ldots + a_{p-1}\omega_{p-1} & \text{при } G = C_r(K); \end{cases}$$

2) $a(a_1 + 2a_2 + \ldots + (p-1)a_{p-1} + (p-1)a_{r-p+2} + \ldots + a_r) < p$ при $G = A_r(K)$,
$a(a_1 + 2a_2 + \ldots + (p-1)a_{p-1}) < p$ при $G = C_r(K)$.

Обозначим символом $d_\rho(u)$ минимальный многочлен образа элемента u в представлении ρ. Назовем композиционный фактор ψ ограничения представления φ на H *большим относительно элемента* $u \in H$, если $d_\psi(u) = d_\varphi(u)$. Основные результаты статьи — теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть x — регулярный унипотентный элемент группы H_1, φ — (p,x)-специальное представление группы G. Тогда ограничение φ на H не имеет композиционных факторов, больших относительно x и нетривиальных для H_2.*

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *число блоков Жордана максимальной размерности у элемента $\varphi(x)$ не превосходит некоторого числа, которое зависит только от p, b и коэффициентов старшего веса и не зависит от ранга группы.*

Результаты о блочной структуре образов унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп могут быть использованы для решения задач распознавания представлений и линейных групп по наличию матриц определенного вида. В положительной характеристике получить такую информацию значительно труднее, чем в нулевой, особенно для унипотентных элементов непростого порядка. Авторам известна лишь одна работа, где определена нормальная форма Жордана для образов таких элементов произвольного порядка и семейства неприводимых представлений, размерности которых не ограничены в совокупности. Это статья М. Корхонена [9], содержащая решение этой задачи для образов унипотентных элементов в неприводимых модулях для классических алгебраических групп в нечетной характеристике, являющихся композиционными факторами тензорного произведения стандартного модуля и дуального к нему либо внешнего или симметрического квадрата стандартного модуля. В общем случае, когда размерности рассматриваемых представлений неизвестны, можно стремиться выделить классы “редких” элементов, наличие которых в образе представления может быть эффективно использовано для его распознавания. Так, А. Е. Залесский и Д. Тестерман [15] классифицировали неприводимые представления исключительных алгебраических групп, образы которых содержат унипотентные элементы с одним нетривиальным блоком Жордана, что завершает классификацию таких представлений для всех простых алгебраических групп в нечетной характеристике. Для поиска таких “редких” элементов важно систематическое изучение свойств образов различных унипотентных элементов в неприводимых представлениях простых алгебраических групп. При этом оказывается полезным анализ композиционных факторов ограничений этих представлений на подсистемные подгруппы.

Когда-то А. Е. Залесский привлек внимание второго автора к изучению ограничений представлений простых алгебраических групп на непростые подсистемные подгруппы. В [14] доказано, что ограничения нетривиальных представлений простой алгебраической группы на подсистемные подгруппы с двумя простыми компонентами почти всегда имеют композиционные факторы, нетривиальные для обеих компонент; все исключения указаны явно. Эти результаты были усилены в [13]. Изучение ограничений неприводимых представлений простых алгебраических групп на подсистемные подгруппы с двумя простыми компонентами часто позволяет получить информацию, которую было бы затруднительно иметь, рассматривая лишь ограничения на простые подсистемные подгруппы. При некоторых ограничениях на l в [13, теоремы 1.3 и 1.6] доказано, что если φ — p-ограниченное представление группы G со старшим весом

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i, \quad \sum_{i=1}^{r} a_i \geq p,$$

$$\omega \neq a_1\omega_1 + a_r\omega_r \ \text{ с } \ a_1 + a_r = p,\ (p-1)\omega_1 + \omega_2 \text{ или } \ \omega_{r-1} + (p-1)\omega_r \text{ при } G = A_r(K)$$
$$\text{и } \ \omega \neq (p-1)\omega_1 + \omega_2 \text{ при } G = C_r(K),$$

то ограничение $\varphi|H$ имеет композиционный фактор, большой для всех унипотентных элементов из H_1 и нетривиальный относительно H_2. В силу [12, теорема 1.1] для таких представлений $d_\varphi(z) = |z|$ для любого унипотентного элемента z. В качестве следствия из упомянутых выше результатов получены нижние оценки числа блоков Жордана размерности $|z|$ для всех элементов z, порядок которых равен порядку регулярного унипотентного элемента из подгруппы H_1 для подходящего l [13, следствия 1.8 и 1.9]. Эти оценки зависят от ранга r исходной группы и порядка элемента. Там же указаны обширные классы неприводимых представлений φ групп $A_r(K)$ и $C_r(K)$, у которых сумма коэффициентов старшего веса меньше p и $\varphi|H$ имеет композиционный фактор, большой для всех элементов порядка p из H_1 и нетривиальный для H_2 [13, теоремы 1.5 и 1.7].

Есть основания полагать, что при $G = A_r(K)$ ограничение $\varphi|H$ имеет композиционный фактор, большой для регулярного унипотентного элемента x из H_1 и нетривиальный для H_2, если $ap^s \leq l < (a+1)p^s$, $1 < a < p$, и максимальный вес ограничения $\varphi|A$ не меньше $p+a$, и что такой фактор существует для обширного класса представлений φ, небольших относительно x, если $p^s \leq l \leq p^s + p - 2$, $s > 1$. Если такой фактор существует, то $\varphi(x)$ имеет не менее $r - l$ блоков Жордана максимальной размерности. Поиску указанных факторов будет посвящена последующая работа второго автора.

Таким образом, поведение элемента x в случае, когда φ — (p, x)-специальное представление, а ранг l не слишком мал, отличается от других ситуаций. Этот случай естественно рассматривать отдельно.

2. Предварительные сведения

Далее ω_i и α_i, $1 \leq i \leq r$, — фундаментальные веса и простые корни группы G, ε_i с $1 \leq i \leq r+1$ при $G = A_r(K)$ и $1 \leq i \leq r$ при $G = C_r(K)$ — веса стандартного G-модуля, определенные в [2, §13]. Символы ω_i и α_i используются не только для группы G, но и для других полупростых алгебраических групп; из контекста всегда ясно, о какой группе идет речь. Нумерация простых корней соответствует [1]. Напомним, что неприводимое представление полупростой алгебраической группы в характеристике p называется *p-ограниченным*, если все коэффициенты его старшего веса меньше p.

Ниже $\Lambda(\Gamma)$ — множество весов полупростой алгебраической группы Γ, $\omega(\varphi)$ — старший вес представления φ, $\mathfrak{X}_\beta$ и $x_\beta(t)$ — корневая подгруппа и корневой элемент в G, ассоциированные с корнем β и элементом $t \in K$, $G(\beta_1, \dots, \beta_k) \subset G$ — подгруппа в G, порожденная корневыми подгруппами $\mathfrak{X}_{\pm\beta_1}, \dots, \mathfrak{X}_{\pm\beta_k}$. Положим $\mathfrak{X}_{\pm i} = \mathfrak{X}_{\pm\alpha_i}$, $G(i_1, \dots, i_k) = G(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$. Используется также обозначение $G(i_1, \dots, i_k, \beta)$ для группы $G(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, \beta)$. Подгруппу, порожденную всеми корневыми подгруппами, ассоциированными с корнями из некоторой подсистемы системы корней группы G, будем называть *подсистемной подгруппой.*

Далее $\dim M$ ($\dim \varphi$) — размерность G-модуля M (представления φ), $\Lambda(M)$ ($\Lambda(\varphi)$) — множества весов модуля M (представления φ), M_λ — весовое подпространство веса λ в модуле M. Символ $\langle g_1, g_2, \dots, g_k\rangle$ или $\langle V_1, V_2, \dots V_k\rangle$ обозначает подгруппу, порожденную элементами g_1, g_2,..., g_k, или линейную оболочку подпространств V_1, V_2,..., V_k фиксированного векторного пространства.

Всюду ниже $x \in H_1$ — регулярный унипотентный элемент, $y = x^{p^s}$.

Предполагается, что корни и веса группы G рассматриваются относительно фиксированного максимального тора T. Если $S \subset G$ — такая подгруппа, что $T \cap S$ — максимальный тор в S, то $\lambda|S$ — это ограничение веса $\lambda \in \Lambda(G)$ с T на $T \cap S$. Ясно, что можно рассматривать ограничения $\lambda|S$ для подсистемных подгрупп S.

Предложение 1 ([7, предложение 2.11(b)]; см. также [6, теорема I; 11, предложение]). *Пусть $S = G(i_1, \dots, i_k) \subseteq G$, M — неприводимый G-модуль со старшим весом ω, $v \in M$ — ненулевой вектор старшего веса. Тогда подпространство $KSv \subseteq M$ является неприводимым S-модулем со старшим весом $\omega|S$ и прямым слагаемым S-модуля M.*

О п р е д е л е н и е. Связная замкнутая подгруппа A типа A_1 в простой алгебраической группе Γ над K называется хорошей A_1-подгруппой, если образы всех корней при гомоморфизме $\sigma : \Lambda(\Gamma) \to \Lambda(A)$, индуцированном ограничением весов с максимального тора T группы Γ на максимальный тор $T_A = T \cap A$ в A, меньше $2p - 1$.

Предложение 2 [10, предложение 2.2]. *Если Γ — простая алгебраическая группа классического типа над K, то для любого элемента $z \in \Gamma$ порядка p существует хорошая A_1-подгруппа A, содержащая z, и все такие подгруппы сопряжены; при этом можно выбрать систему простых корней так, что $\sigma(\alpha_i) \in \{0, 1, 2\}$ и совпадает с i-й меткой на помеченной диаграмме Дынкина элемента z (здесь σ — гомоморфизм из определения).*

Лемма 1. 1) *В стандартном G-модуле элемент y имеет b блоков Жордана размерности $a + 1$ и $p^s - b$ блоков размерности a, а остальные блоки тривиальны.*

2) *Пусть ρ — неприводимое представление полупростой алгебраической группы Γ над полем K, $h \in \Gamma$ — элемент порядка p^{s+1}, $h_1 = h^{p^s}$. Тогда*

$$p^s\left(d_\rho(h_1) - 1\right) < d_\rho(h) \leq p^s d_\rho(h_1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Известно, что в стандартном G-модуле элемент x имеет один блок размерности $n = ap^s + b$ и блоки размерности 1. Далее используем предложение 2.5.b из работы [12].

2) Эта часть предложения 2.5.a из [12]. □

Используя [8, следствие 3.6], легко видеть, что группа H_1 содержит элементы z и u, которые в стандартном G-модуле и в стандартном H_1-модуле имеют p и $p-1$ блоков Жордана размерности 2 соответственно, а остальные блоки тривиальны. Если $f \in \{y,z,u\}$, то далее A_f — хорошая A_1-подгруппа в G, содержащая f, $\sigma_f : \Lambda(G) \to \Lambda(A_f)$ — гомоморфизм, удовлетворяющий условиям предложения 2. Так как все такие подгруппы для фиксированного элемента сопряжены, можно считать, что $A_f \subset H_1$. Ясно, что A_f является хорошей A_1-подгруппой для f и в H_1.

Лемма 2.

$$\begin{aligned}
&\textit{При}\ \ G = A_r(K) && \sigma_y(\varepsilon_1) = \ldots = \sigma_y(\varepsilon_b) = -\sigma_y(\varepsilon_{r-b+2}) = \ldots = -\sigma_y(\varepsilon_{r+1}) = a,\\
& && |\sigma_y(\varepsilon_j)| < a \ \ \textit{при}\ \ b+1 \le j \le r-b+1;\\
& && \sigma_z(\varepsilon_1) = \ldots = \sigma_z(\varepsilon_p) = -\sigma_z(\varepsilon_{r-p+2}) = \ldots = -\sigma_z(\varepsilon_{r+1}) = 1,\\
& && \sigma_z(\varepsilon_j) = 0 \ \ \textit{при}\ \ p+1 \le j \le r-p+1;\\
& && \sigma_u(\varepsilon_1) = \ldots = \sigma_u(\varepsilon_{p-1}) = -\sigma_u(\varepsilon_{r-p+3}) = \ldots = -\sigma_u(\varepsilon_{r+1}) = 1,\\
& && \sigma_u(\varepsilon_j) = 0 \ \ \textit{при}\ \ p \le j \le r-p+2.\\
&\textit{При}\ G = C_r(K) && \sigma_y(\varepsilon_1) = \ldots = \sigma_y(\varepsilon_b) = a,\\
& && 0 \le \sigma_y(\varepsilon_j) < a \ \ \textit{при}\ \ j \ge b+1;\\
& && \sigma_z(\varepsilon_1) = \ldots = \sigma_z(\varepsilon_p) = 1,\\
& && \sigma_z(\varepsilon_j) = 0 \ \ \textit{при}\ \ j \ge p+1;\\
& && \sigma_u(\varepsilon_1) = \ldots = \sigma_u(\varepsilon_{p-1}) = 1,\\
& && \sigma_u(\varepsilon_j) = 0 \ \ \textit{при}\ \ j \ge p.
\end{aligned}$$

Для неприводимого представления φ группы G

$$\sigma_f(\omega(\varphi)) = \max_{\mu \in \Lambda(\varphi)} \{\sigma_f(\mu)\} \ \ \textit{при}\ \ f \in \{y,z,u\}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \{y,z,u\}$. Обозначим символом $N(f)$ набор из всех весов ограничения стандартного G-модуля на A_f с учетом кратностей. Таким образом, набор $N(f)$ состоит из $r+1$ чисел при $G = A_r(K)$ и $2r$ чисел при $G = C_r(K)$. В наборе $N(y)$ каждое из чисел a, $a-2, \ldots, 2-a$, $-a$ встречается b раз, каждое из чисел $a-1$, $a-3, \ldots, 3-a$, $1-a$ — $p^s - b$ раз, остальные числа — нули. Набор

$$\begin{aligned}
N(z) &= \{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{p\ \text{раз}}, 0,0,\ldots,0, \underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{p\ \text{раз}}\},\\
N(u) &= \{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{p-1\ \text{раз}}, 0,0,\ldots,0, \underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{p-1\ \text{раз}}\}.
\end{aligned}$$

В силу [4, предложение 2.12] набор $(\sigma_f(\varepsilon_1), \sigma_f(\varepsilon_2), \ldots, \sigma_f(\varepsilon_r), \sigma_f(\varepsilon_{r+1}))$ совпадает с $N(f)$ при $G = A_r(K)$, а набор $(\sigma_f(\varepsilon_1), \sigma_f(-\varepsilon_1), \ldots, \sigma_f(\varepsilon_r), \sigma_f(-\varepsilon_r))$ — при $G = C_r(K)$ (в обоих случаях с учетом кратностей). Так как $\sigma_f(\alpha_i) \ge 0$, то $\sigma_f(\varepsilon_i) \ge \sigma_f(\varepsilon_{i+1})$ при $G = A_r(K)$, $1 \le i \le r$, и $\sigma_f(\varepsilon_1) \ge \sigma_f(\varepsilon_2) \ge \ldots \ge \sigma_f(\varepsilon_r) \ge 0$ при $G = C_r(K)$. Отсюда следует утверждение леммы. □

Для элемента g порядка p из группы G, H_1 или H_2 и неприводимого представления ρ соответствующей группы обозначим символом $m_g(\rho)$ максимальный вес ограничения представления ρ на хорошую A_1-подгруппу, содержащую g. В силу предложения 2 $m_g(\rho)$ не зависит от выбора такой подгруппы. Далее предполагаем, что φ — p-ограниченное представление группы G и $m_y(\varphi) < p$.

Лемма 3. *Вес*

$$\omega(\varphi)=\begin{cases}a_1\omega_1+\ldots+a_{p-1}\omega_{p-1}+a_{r-p+2}\omega_{r-p+2}+\ldots+a_r\omega_r & \text{при } G=A_r(K),\\ a_1\omega_1+\ldots+a_{p-1}\omega_{p-1} & \text{при } G=C_r(K);\end{cases}$$

$$m_y(\varphi)=\begin{cases}a(a_1+2a_2+\ldots+(p-1)a_{p-1}+(p-1)a_{r-p+2}+\ldots+a_r) & \text{при } G=A_r(K),\\ a(a_1+2a_2+\ldots+(p-1)a_{p-1}) & \text{при } G=C_r(K);\end{cases}$$

$$m_z(\varphi)=m_u(\varphi)=\begin{cases}a_1+2a_2+\ldots+(p-1)a_{p-1}+(p-1)a_{r-p+2}+\ldots+a_r & \text{при } G=A_r(K),\\ a_1+2a_2+\ldots+(p-1)a_{p-1} & \text{при } G=C_r(K).\end{cases}$$

Доказательство. Так как $b\geq p$, то из леммы 2 следует, что $\sigma_y(\omega_j)\geq p$ при $p\leq j\leq r-p+1$ для $G=A_r(K)$ и $j\geq p$ для $G=C_r(K)$. Поэтому

$$\omega(\varphi)=\begin{cases}a_1\omega_1+\ldots+a_{p-1}\omega_{p-1}+a_{r-p+2}\omega_{r-p+2}+\ldots+a_r\omega_r & \text{при } G=A_r(K),\\ a_1\omega_1+\ldots+a_{p-1}\omega_{p-1} & \text{при } G=C_r(K).\end{cases}$$

Применяя эту лемму еще раз, получаем искомые формулы для $m_f(\varphi)$ при $f\in\{y,z,u\}$. □

Лемма 4. *Пусть ρ — неприводимое представление группы H_1 и $m_y(\rho)<p$. Тогда*

$$\omega(\rho)=\begin{cases}c_1\omega_1+\ldots+c_{p-1}\omega_{p-1}+c_{l-p+2}\omega_{l-p+2}+\ldots+c_l\omega_l & \text{при } G=A_l(K),\\ c_1\omega_1+\ldots+c_{p-1}\omega_{p-1} & \text{при } G=C_l(K);\end{cases}$$

$$m_y(\rho)=\begin{cases}a(c_1+2c_2+\ldots+(p-1)c_{p-1}+(p-1)c_{l-p+2}+\ldots+c_l) & \text{при } G=A_l(K),\\ a(c_1+2c_2\ldots+(p-1)c_{p-1}) & \text{при } G=C_l(K);\end{cases}$$

$$m_z(\rho)=m_u(\rho)=\begin{cases}c_1+2c_2+\ldots+(p-1)c_{p-1}+(p-1)c_{l-p+2}+\ldots+c_l & \text{при } G=A_l(K),\\ c_1+2c_2+\ldots+(p-1)c_{p-1} & \text{при } G=C_l(K).\end{cases}$$

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 3, только наборы $N(f)$ в этом случае содержат меньше нулей. □

3. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Известно, что все подгруппы H, удовлетворяющие условиям теоремы, сопряжены, поэтому достаточно доказать ее для какой-либо одной такой подгруппы.

Выберем подгруппы H_1 и H_2 следующим образом.

Пусть $G=A_r(K)$. Положим

$$I=\begin{cases}\{1,2,\ldots,k,r-k+2,r-k+3,\ldots,r+1\} & \text{при } n=2k,\\ \{1,2,\ldots,k,k+1,r-k+2,r-k+3,\ldots,r+1\} & \text{при } n=2k+1;\end{cases}$$

$$J=\{1,2,\ldots,r+1\}\setminus I;$$

$$R_1=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j | i,j\in I,\ i\neq j\},$$

$$R_2=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j | i,j\in J,\ i\neq j\}.$$

Обозначим символами H_1 и H_2 подгруппы, порожденные всеми подгруппами $\mathfrak{X}_\beta$ при $\beta\in R_1$ и R_2 соответственно. При $G=C_r(K)$ положим $H_1=G(1,2,\ldots,l-1,2\varepsilon_l)$, $H_2=G(l+1,\ldots,r)$. Легко видеть, что H_1 и H_2 — подсистемные подгруппы; $H_1\cong A_l(K)$, $H_2\cong A_{r-l-1}(K)$ при $G=A_r(K)$ и $H_1\cong C_l(K)$, $H_2\cong C_{r-l}(K)$ при $G=C_r(K)$.

Известно, что каждое неприводимое представление ρ группы H записывается в виде $\rho_1 \otimes \rho_2$, где ρ_i — неприводимое представление группы H_i.

Пусть $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$ — композиционный фактор ограничения $\varphi|H$ и $\omega(\psi_2) \neq 0$. Покажем, что $m_y(\psi_1) < m_y(\varphi)$. Предположим противное. Так как множество $\Lambda(\psi_1)$ состоит из ограничений весов из некоторого подмножества в $\Lambda(\varphi)$ с максимального тора группы G на максимальный тор группы H_1, то число $m_y(\psi_1)$ не может превосходить $m_y(\varphi)$. Поэтому $m_y(\psi_1) = m_y(\varphi)$.

Так как $m_y(\psi_1) < p$, то в силу леммы 4

$$\omega(\psi_1) = \begin{cases} c_1\omega_1 + \ldots + c_{p-1}\omega_{p-1} + c_{l-p+2}\omega_{l-p+2} + \ldots + c_l\omega_l & \text{при } G = A_r(K); \\ c_1\omega_1 + \ldots + c_{p-1}\omega_{p-1} & \text{при } G = C_r(K). \end{cases}$$

Из лемм 3 и 4 вытекает, что

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + \ldots + (p-1)a_{p-1} + (p-1)a_{r-p+2} + \ldots + a_r \\ = c_1 + 2c_2 + \ldots + (p-1)c_{p-1} + (p-1)c_{l-p+2} + \ldots + c_l \quad \text{при } G = A_r(K), \end{aligned}$$

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + (p-1)a_{p-1} = c_1 + 2c_2 + \ldots + (p-1)c_{p-1} \quad \text{при } G = C_r(K).$$

Еще раз используя лемму 4, получаем, что

$$m_z(\varphi) = m_z(\psi_1) = m_u(\psi_1). \tag{3.1}$$

Построим элемент $w \in H$, сопряженный с z. Положим

$$f = \begin{cases} k+1 & \text{при } G = A_r(K),\ n = 2k; \\ k+2 & \text{при } G = A_r(K),\ n = 2k+1; \\ l+1 & \text{при } G = C_r(K). \end{cases}$$

Пусть $t \in K$. Положим при $G = A_r(K)$

$$w_1(t) = x_1(t)\ldots x_{p-1}(t), \quad w_2(t) = x_f(t), \quad w_1^-(t) = x_{-1}(t)\ldots x_{-(p-1)}(t), \quad w_2^-(t) = x_{-f}(t)$$

и при $G = C_r(K)$

$$w_1(t) = x_{2\varepsilon_1}(t)\ldots x_{2\varepsilon_{p-1}}(t), \ \ w_2(t) = x_{2\varepsilon_f}(t), \ \ w_1^-(t) = x_{-2\varepsilon_1}(t)\ldots x_{-2\varepsilon_{p-1}}(t), \ \ w_2^-(t) = x_{-2\varepsilon_f}(t).$$

В обоих случаях пусть

$$w(t) = w_1(t)w_2(t), \quad w^-(t) = w_1^-(t)w_2^-(t),$$

$$S_1 = \langle w_1(t), w_1^-(t) | t \in K\rangle, \quad S_2 = \langle w_2(t), w_2^-(t) | t \in K\rangle, \quad S = \langle w(t), w^-(t) | t \in K\rangle.$$

Из наших условий для n следует, что $k > p$ при $n = 2k$ или $n = 2k+1$. Теперь ясно, что $S_1 \subset H_1$, $S_2 \subset H_2$ и $S \subset H$. Нетрудно заметить, что при $t \neq 0$ элемент $w_1(t)$ можно рассматривать в качестве элемента u, а элемент $w(t)$ сопряжен с элементом z; при этом подгруппы S_1 и S являются хорошими A_1-подгруппами для $w_1(t)$ и $w(t)$ соответственно.

Из построения подгрупп S, S_1 и S_2 следует, что существуют максимальные торы $T_1 \subset S_1$, $T_2 \subset S_2$, $T_S \subset S$ такие, что каждый элемент тора $h \in T_S$ однозначно представляется в виде произведения h_1h_2, где $h_i \in T_i$. Так как $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$, то каждое собственное значение элемента $\psi(h)$ есть произведение некоторых собственных значений элементов $\psi_1(h)$ и $\psi_2(h)$.

Определим параметр $m_w(\psi)$ так же, как $m_y(\varphi)$. Легко видеть, что $m_w(\psi) = m_{w_1}(\psi_1) + m_{w_2}(\psi_2)$. Так как представление ψ_2 нетривиально, то $m_w(\psi) > m_{w_1}(\psi_1)$. В силу леммы 4 $m_{w_1}(\psi_1) = m_z(\psi_1)$. Но тогда ввиду формулы (3.1) $m_{w_1}(\psi_1) = m_z(\varphi)$. Так как ψ — композиционный фактор ограничения $\varphi|H$, число $m_w(\varphi) \geq m_w(\psi)$. Поскольку элементы w и z сопряжены, приходим к противоречию. Следовательно, $m_y(\psi_1) < m_y(\varphi)$.

В силу результатов о минимальных многочленах образов элементов порядка p в неприводимых представлениях простых алгебраических групп в характеристике p [4, теорема 1.1, предложение 1.3 и алгоритм 1.4]

$$d_\varphi(y) = \min\{p, m_y(\varphi)+1\}, \quad d_{\psi_1}(y) = \min\{p, m_y(\psi_1)+1\}. \tag{3.2}$$

Так как $m_y(\varphi) < p$, отсюда вытекает, что $d_{\psi_1}(y) < d_\varphi(y)$. Ввиду п. 2) леммы 1 $d_\varphi(x) > p^s\,(d_\varphi(y)-1)$ и $d_{\psi_1}(x) \le p^s d_{\psi_1}(y) \le p^s\,(d_\varphi(y)-1)$. Значит, $d_\varphi(x) > d_{\psi_1}(x)$ для любого композиционного фактора $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$ ограничения $\varphi|H$ с $\omega(\psi_2) \neq 0$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Так как $m_y(\varphi) < p$, то в силу формулы (3.2) $d_\varphi(y) = m_y(\varphi)+1$. Из [5] следует полная приводимость ограничения $\varphi|A_y$. Положим $\omega = \omega(\varphi)$, $\sigma = \sigma_y$. Пусть M — G-модуль, в котором реализуется φ, и $v \in M$ — ненулевой вектор старшего веса. Из известного описания p-ограниченных неприводимых модулей группы $A_1(K)$ (см., например, [3, §12]) легко следует, что в таком модуле со старшим весом a нетривиальный унипотентный элемент этой группы действует как блок Жордана размерности $a+1$. Отсюда и из полной приводимости ограничения $M|A_y$ вытекает, что число блоков Жордана максимальной размерности у элемента $\varphi(y)$ равно размерности весового подпространства веса $m_y(\varphi)$ в модуле $M|A_y$. Обозначим это подпространство символом U. Легко видеть, что $U = \langle M_\lambda | \sigma(\lambda) = m_y(\varphi),\ \lambda \in \Lambda(M)\rangle$. Из леммы 2 следует, что

$$\sigma(\alpha_j) = 0 \text{ при } 1 \le j \le b-1 \text{ и при } r+2-b \le j \le r \ \ \sigma(\alpha_b) > 0,\ \ \sigma(\alpha_{r+1-b}) > 0 \text{ при } G = A_r(K)$$

и

$$\sigma(\alpha_j) = 0 \text{ при } 1 \le j \le b-1,\ \ \sigma(\alpha_b) > 0 \text{ при } G = C_r(K).$$

Теперь ясно, что $\sigma(\lambda) < m_y(\varphi)$ при $\lambda = \omega - \sum_{i=1}^r s_i\alpha_i$, если $s_b \neq 0$ или $G = A_r(K)$ и $s_{r+1-b} \neq 0$. Из предложения 1 и леммы 3 вытекает, что $\mu \notin \Lambda(M)$, если

$$\mu = \begin{cases} \omega - \sum\limits_{i=1}^{b-1} s_i\alpha_i - \sum\limits_{i=b+1}^{r-b} s_i\alpha_i - \sum\limits_{i=r+2-b}^{r} s_i\alpha_i, & \sum\limits_{i=b+1}^{r-b} s_i \neq 0 \text{ при } G = A_r(K),\\ \omega - \sum\limits_{i=1}^{b-1} s_i\alpha_i - \sum\limits_{i=b+1}^{r} s_i\alpha_i, & \sum\limits_{i=b+1}^{r} s_i \neq 0 \text{ при } G = C_r(K). \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $\lambda \in \Lambda(M)$ число $\sigma(\lambda) = m_y(\varphi)$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda = \omega - \sum_{i=1}^{b-1} s_i\alpha_i - \sum_{i=r+2-b}^{r} s_i\alpha_i \text{ при } G = A_r(K)$$

и

$$\lambda = \omega - \sum_{i=1}^{b-1} s_i\alpha_i \text{ при } G = C_r(K).$$

Положим $\Gamma = G(1,2,\dots,b-1,r+2-b,\dots,r)$ при $G = A_r(K)$ и $\Gamma = G(1,2,\dots,b-1)$ при $G = C_r(K)$. Тогда $\Gamma \cong A_{b-1}(K) \times A_{b-1}(K)$ при $G = A_r(K)$ и $\Gamma = A_{b-1}(K)$ при $G = C_r(K)$. Ясно, что $U = K\Gamma v$. В силу предложения 1 $K\Gamma v$ — неприводимый Γ-модуль со старшим весом $\omega|\Gamma$. Его размерность D зависит только от b, p и ненулевых коэффициентов веса ω и не зависит от r. Итак, установлено, что $\varphi(y)$ имеет D блоков максимальной размерности. Рассматривая блоки Жордана максимальной размерности элемента $\varphi(x)$ как элементы группы $SL_f(K)$ при подходящем f и применяя п. 2) леммы 1, получаем, что $\varphi(x)$ имеет не более D блоков Жордана максимальной размерности.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Известно, что размерность нетривиального H_2-модуля не меньше $r-l$ при $G=A_r(K)$ и не меньше $2(r-l)$ при $G=C_r(K)$. Поэтому из теоремы 2 следует, что для некоторого веса ω, удовлетворяющего условиям теоремы 1, при достаточно большом r ограничение $\varphi|H$ не имеет композиционных факторов, больших относительно x и нетривиальных для H_2. Однако теорема 2 не позволяет оценить, насколько должен быть велик ранг, чтобы гарантировать отсутствие таких факторов. Поэтому она не может заменить теорему 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли, гл. IV-VI. М.: Мир, 1972. 334 с.
2. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли, гл. VII-VIII. М.: Мир, 1978. 342 с.
3. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 263 с.
4. **Супруненко И.Д.**Минимальные полиномы элементов порядка p в неприводимых представлениях групп Шевалле над полями характеристики p // Тр. Ин-та математики СО РАН. Вопросы алгебры и логики. Новосибирск, 1996. Т. 30. С. 126–163.
5. **Andersen H.H., Jorgensen J., Landrock P.** The projective indecomposable modules of $SL(2,p^n)$ // Proc. London Math. Soc. 1983. Vol. 46. P. 38–52. doi: 10.1112/plms/s3-46.1.38 .
6. **Jantzen J.C.** Darstellungen halbeinfacher algebraicher Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen // Bonner math. Schr. 1973. Vol. 67.
7. **Jantzen J.C.** Representations of algebraic groups. Second ed. 2003. 576 p. (Math. Surveys and Monographs; vol. 107).
8. **Liebeck M.W., Seitz G.M.** Unipotent and nilpotent classes in simple algebraic groups and Lie algebras. Providence: American Math. Soc., 2012. 380p. (Math. Surveys and Monographs; 180). doi: 10.1090/surv/180 .
9. **Korhonen M.** Jordan blocks of unipotent elements in some irreducible representations of classical groups in good characteristic // Proc. Amer. Math. Soc. 2019. Vol. 147. P. 4205–4219. doi: 10.1090/proc/14570 .
10. **Seitz G.M.** Unipotent elements, tilting modules, and saturation // Invent. Math. 2000. Vol. 141, no. 3. P. 467–502. doi: 10.1007/s002220000073 .
11. **Smith S.** Irreducible modules and parabolic subgroups // J. Algebra. 1982. Vol. 75. P. 286–289. doi: 10.1016/0021-8693(82)90076-x .
12. **Suprunenko I.D.** The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic // Memoirs Amer. Math. Soc.. 2009. Vol. 200, no. 939. 154 p. doi: 10.1090/memo/0939 .
13. **Suprunenko I.D.** Special composition factors in restrictions of representations of special linear and symplectic groups to subsystem subgroups with two simple components // Труды Института математики. 2018. Т. 26, № 1. С. 115–133.
14. **Suprunenko I.D., Zalesskii A.E.** On restricting representations of simple algebraic groups to semisimple subgroups with two simple components // Труды Института математики. 2005. Т. 13, № 2. С. 109–115.
15. **Testerman D., Zalesski A.E.** Irreducible representations of simple algebraic groups in which a unipotent element is represented by a matrix with a single non-trivial Jordan block // J. Group Theory. 2018. Vol. 21. P. 1–20. doi: 10.1515/jgth-2017-0019 .

Поступила 10.04.2020
После доработки 8.05.2020
Принята к публикации 18.05.2020

Бусел Татьяна Сергеевна
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск
e-mail: tbusel@gmail.com

Супруненко Ирина Дмитриевна
д-р. физ.-мат. наук, главный науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск
e-mail: suprunenko@im.bas-net.by

REFERENCES

1. Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie (Chapt. IV–VI).* Paris: Hermann, 1968, 282 p. doi: 10.1007/978-3-540-34491-9 . Translated to Russian under the title *Gruppy i algebry Li (glavy IV–VI).* Moscow: Mir Publ., 1976, 332 p.
2. Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie, Chaps. VII–VIII.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006, 265 p. doi: 10.1007/978-3-540-33977-9 . Translated to Russian under the title *Gruppy i algebry Li, glavy VII–VIII.* Moscow: Mir Publ., 1978, 342 p.
3. Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups.* Providence: AMS, 2016, 175 p. ISBN: 9781470431051 . Translated to Russian under the title *Lektsii o gruppakh Shevalle.* Moscow: Mir Publ., 1975, 263 p.
4. Suprunenko I.D. Minimal polynomials of elements of order p in irreducible representations of Chevalley groups over fields of characteristic p. *Siberian Advances in Mathematics*, 1996, vol. 6, no. 4, pp. 97–150. doi: 10.1090/conm/131.1/1175791 .
5. Andersen H.H., Jorgensen J., Landrock P. The projective indecomposable modules of $SL(2, p^n)$. *Proc. London Math. Soc.*, 1983, vol. 46, pp. 38–52. doi: 10.1112/plms/s3-46.1.38 .
6. Jantzen J.C. *Darstellungen halbeinfacher algebraicher Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen.* Bonner math. Schr., vol. 67. Bonn: Mathematische Institut der Universität, 1973, 124 p.
7. Jantzen J.C. *Representations of algebraic groups.* Second ed. Math. Surveys and Monographs, vol. 107, 2003, 576 p. ISBN: 978-0-8218-4377-2 .
8. Liebeck M.W., Seitz G.M. *Unipotent and nilpotent classes in simple algebraic groups and Lie algebras.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 180, Providence: AMS, 2012, 380 p. doi: 10.1090/surv/180 .
9. Korhonen M. Jordan blocks of unipotent elements in some irreducible representations of classical groups in good characteristic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2019, vol. 147, pp. 4205–4219. doi: 10.1090/proc/14570 .
10. Seitz G.M. Unipotent elements, tilting modules, and saturation. *Invent. Math.*, 2000, vol. 141, no. 3, pp. 467–502. doi: 10.1007/s002220000073 .
11. Smith S. Irreducible modules and parabolic subgroups. *J. Algebra*, 1982, vol. 75, no. 1, pp. 286–289. doi: 10.1016/0021-8693(82)90076-x .
12. Suprunenko I.D. The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 2009, vol. 200, no. 939, 154 p. doi: 10.1090/memo/0939 .
13. Suprunenko I.D. Special composition factors in restrictions of representations of special linear and symplectic groups to subsystem subgroups with two simple components. *Trudy Insituta Matematiki*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 115–133.
14. Suprunenko I.D., Zalesskii A.E. On restricting representations of simple algebraic groups to semisimple subgroups with two simple components. *Trudy Insituta Matematiki*, 2005, vol. 13, no. 2, pp. 109–115.
15. Testerman D., Zalesski A.E. Irreducible representations of simple algebraic groups in which a unipotent element is represented by a matrix with a single non-trivial Jordan block. *J. Group Theory*, 2018, vol. 21, no. 1, pp. 1–20. doi: 10.1515/jgth-2017-0019 .

Received April 10, 2020
Revised May 8, 2020
Accepted May 18, 2020

Funding Agency: This research was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. F19-024).

Tatyana Sergeevna Busel, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072, Republic of Belarus, e-mail: tbusel@gmail.com

Irina Dmitrievna Suprunenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072, Republic of Belarus,
e-mail: suprunenko@im.bas-net.by

Cite this article as: T. S. Busel, I. D. Suprunenko. On the properties of irreducible representations of special linear and symplectic groups that are not large with respect to the field characteristic and regular unipotent elements from subsystem subgroups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 88–97 .