ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 517.51

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ КЛАССА НИКОЛЬСКОГО — БЕСОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ[1]

Г. Акишев

В статье рассматриваются пространства периодических функций многих переменных, а именно пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, пространство Никольского – Бесова $S^{\bar{r}}_{p,\tau,\theta}B$, а также изучается наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ тригонометрическими полиномами с номерами гармоник из ступенчатого гиперболического креста. Установлены достаточные условия принадлежности функции $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в пространство $f \in L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случаях $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ и $p = q$, $1 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$. Получены оценки наилучших приближений функций класса Никольского – Бесова $S^{\bar{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ по норме пространства $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ при различных соотношениях между параметрами $p, q, \tau_1, \tau_2, \theta$. При некоторых соотношениях между числами $p, q, \tau_1, \tau_2, \theta$ показана точность этих оценок.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класс Никольского — Бесова, тригонометрический полином, наилучшее приближение, гиперболический крест.

G. Akishev. Estimates for the best approximations of functions from the Nikol'skii–Besov class in the Lorentz space by trigonometric polynomials.

We consider spaces of periodic functions of many variables, specifically, the Lorentz space $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ and the Nikol'skii–Besov space $S^{\bar{r}}_{p,\tau,\theta}B$, and study the best approximation of a function $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ by trigonometric polynomials with the numbers of harmonics from a step hyperbolic cross. Sufficient conditions are established for a function $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ to belong to a space $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ in the cases $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ and $p = q$, $1 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$. Estimates for the best approximations of functions from the Nikol'skii–Besov class $S^{\bar{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ in the norm of the space $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ are derived for different relations between the parameters p, q, τ_1, τ_2, and θ. For some relations between these parameters, it is shown that the estimates are exact.

Keywords: Lorentz space, Nikol'skii–Besov class, trigonometric polynomial, best approximation, hyperbolic cross.

MSC: 42A05, 42A10, 46E30

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-5-27

Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{I}^m = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1;\ j = 1, \ldots, m\}$ — m-мерный куб. В дальнейшем для m-мерного куба наряду с $\mathbb{I}^m$ будем использовать обозначение $[0,1]^m$.

Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$, которые имеют 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left(\frac{\tau}{p}\int\limits_0^1 \big(f^*(t)\big)^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1}dt\right)^{1/\tau}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad 1 \leqslant \tau < \infty,$$

конечна, где $f^*(y)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$, $\overline{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [1, гл. 1, разд. 3, с. 213–216; 2, с. 63]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности Уральского федерального университета, постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

Известно, что $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|^*_{p,\tau} = \left[\frac{\tau}{p}\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^t f^*(y)dy\Big)^{\tau} t^{\tau(\frac{1}{p}-1)-1}dt\right]^{1/\tau} < +\infty, \quad 1<p<\infty, \quad 1\leqslant\tau<\infty$$

и эта норма эквивалентна величине $\|f\|_{p,\tau}$ (см. [1, гл. 1, разд. 3, с. 229, теорема 3.21; 3, гл. 3, разд. 3.4, лемма 3.4.6, с. 94]), т. е.

$$\|f\|^*_{p,\tau} \asymp \|f\|_{p,\tau}. \tag{0.1}$$

Здесь и далее для неотрицательных величин $A(f), B(f)$ запись $A(f) \asymp B(f)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2, значения которых могут зависеть от заданных в условии утверждения параметров (в данном случае p, τ) и не зависеть от функции f, такие что $C_1A(f) \leqslant B(f) \leqslant C_2A(f)$. В порядковом равенстве (0.1) роль $A(f)$ и $B(f)$ играют $\|f\|^*_{p,\tau}$ и $\|f\|_{p,\tau}$ соответственно. Ниже встречаются порядковые равенства для величин, зависящих не от функционального параметра f, а от числового или векторного; например, в (2.1) таким числовым параметром служит n, а в (2.10) — вектор $\overline{s} = (s_1,\ldots,s_m)$. В идейном плане определения таких порядковых равенств аналогичны предыдущему.

В случае $\tau = p$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}$ (см. [4, гл. 1, разд. 1.1, с. 11; 1, гл. 5, разд. 3, с. 216] и [3, гл. 3, разд. 3.4.1, с. 91].

Функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m) = L(\mathbb{T}^m)$ сопоставим ее ряд Фурье

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},2\pi\overline{x}\rangle},$$

где $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\overline{n},2\pi\overline{x}\rangle}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}$ и $\mathbb{Z}^m$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\langle\overline{y},\overline{x}\rangle = \sum_{j=1}^m y_jx_j$.

Положим

$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},2\pi\overline{x}\rangle}.$$

Здесь $\rho(\overline{s}) = \big\{\overline{k} = (k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{Z}^m\colon [2^{s_j-1}] \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j=1,\ldots,m\big\}$; $[a]$ — целая часть числа a; $\overline{s} = (s_1,\ldots,s_m), s_j = 0,1,2,\ldots$.

Напомним, что для заданного $p\in[1,\infty)$ числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}$ принадлежит l_p, если $\big\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\big\|_{l_p} = \big(\sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^m}|a_{\overline{n}}|^p\big)^{1/p} < \infty$.

Далее для вектора $\overline{r} = (r_1,\ldots,r_m)$ и нулевого вектора $\overline{0} = (0,\ldots,0)$ неравенство $\overline{r} > \overline{0}$ означает, что $r_j > 0$ при всех $j = 1,2,\ldots,m$. Пусть $1\leqslant\theta\leqslant\infty$. Рассмотрим пространство всех функций $f\in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, для которых

$$\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}||\delta_{\overline{s}}(f)||^{\theta}_{p,\tau} < \infty,$$

где $\mathbb{Z}^m_+$ — множество элементов $\overline{s} = (s_1,\ldots,s_m)\in\mathbb{Z}^m$ с неотрицательными координатами и $\mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — множество всех функций $f\in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ таких, что $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\overline{x})\,dx_j = 0, \quad j=1,\ldots,m.$ Это пространство обозначается символом $S^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B$ и называется *пространством Никольского — Бесова.* В этом пространстве рассмотрим единичный шар

$$\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B = \big\{f\in\mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)\colon \big\|\big\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}\big\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\big\|_{l_\theta} \leqslant 1\big\}.$$

В случае $\tau = p$ пространство $S^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B$ совпадает с пространством $S^{\overline{r}}_{p,\theta}B$, которое изучали П. И. Лизоркин и С. М. Никольский [5], а также Т. И. Аманов [6].

Для данного вектора $\overline{r}=(r_1,\ldots,r_m)>\overline{0}$ положим $\overline{\gamma}=\dfrac{\overline{r}}{r_1}$ и

$$Q_n^{(\overline{\gamma})}=\bigcup_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle<n}\rho(\overline{s}),\quad T(Q_n^{(\overline{\gamma})})=\Big(T(\overline{x})=\sum_{\overline{k}\in Q_n^{(\overline{\gamma})}}b_{\overline{k}}e^{i\langle\overline{k},\overline{x}\rangle}\Big).$$

Обозначим через $E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{p,\tau}$ наилучшее приближение функции $f\in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{(\overline{\gamma})})$, а через $S_n^{(\overline{\gamma})}(f,\overline{x})=\sum_{\overline{k}\in Q_n^{(\overline{\gamma})}}a_{\overline{k}}(f)e^{i\langle\overline{k},2\pi\overline{x}\rangle}$ — частичную сумму ряда Фурье функции f.

К. И. Бабенко [7] впервые предложил способ приближения функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов. Впоследствии приближение этим методом функций широко известных классов Соболева, Никольского — Бесова исследовали С. А. Теляковский [8], Б. С. Митягин [9], Я. С. Бугров [10], Э. М. Галеев [11; 12], В. Н. Темляков [13; 14] , А. С. Романюк [15; 16], Г-Ю. Шмайсер, В. Зикель [17] и К. А. Бекмаганбетов, Е. Толеугазы [18]. Обзор результатов по этой теме дан в [19–21].

Известно, что для пространств Лоренца имеем включения $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)\subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1<p<q<\infty$, $1\leqslant\tau_1,\tau_2<\infty$, и $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)\subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$, если $1\leqslant\tau_2<\tau_1<\infty$.

Основная цель статьи — найти точный порядок величины

$$E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{q,\tau_2}=\sup_{f\in\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B}E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{q,\tau_2}$$

в различных соотношениях между параметрами p,q,τ_1,τ_2,θ.

Статья состоит из трех разделов. В первом доказаны несколько вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основных результатов. Во втором разделе установлены оценки величины $E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{p,\tau_2}$ в случае $\tau_1=\tau_2$. Его основным результатом являются теоремы 2.1 и 2.2.

В третьем разделе установлены оценки величины $E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\bar{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{q,\tau_2}$ в случае $p<q$. Основные результаты этого раздела — теоремы 3.1, 3.3.

Все постоянные C, встречающиеся в формулах, не зависят от порядков тригонометрических полиномов и наилучших приближений.

1. Вспомогательные утверждения

Теорема 1.1. *Пусть $1<p,\tau<\infty$. Тогда для любой функции $f\in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ выполняется соотношение*

$$\|f\|_{p,\tau}\asymp\Big\|\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}|\delta_{\overline{s}}(f)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эта теорема доказывается аналогично теореме 1.1 из статьи автора 2017 г. (Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца // Тр. Ин-та математики и механиуи УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 3–21) с применением известного соотношения

$$\|f\|_p\asymp\Big\|\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}|\delta_{\overline{s}}(f)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p$$

для любой функции $f\in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1<p<\infty$ (см. [4, гл. 1, разд. 1.5, (13), с. 55]). □

Лемма 1.1. *Пусть $1<p<\infty$ и $1<\tau\leqslant 2$, $\tau<p$. Тогда для произвольной системы функций $\{\varphi_{\overline{j}}\}_{\overline{j}=\overline{1}}^{\overline{n}}\subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство*

$$\Big\|\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau}\leqslant C\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_m=1}^{n_m}\|\varphi_{\overline{j}}\|^{\tau}_{p,\tau}\Big)^{1/\tau},$$

где константа C не зависит от $\varphi_{\overline{j}}$ и n_j, $\overline{1}=(1,\dots,1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что $(f^*)^\theta=(|f|^\theta)^*$ для числа $\theta>0$. Поэтому

$$I=\Big\|\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau}=\Big[\int\limits_0^1\Big(\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^{1/2}\Big)^{*^\tau}(t)t^{\tau/p-1}dt\Big]^{1/\tau}$$

$$=\Big[\int\limits_0^1\Big(\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^{\tau/2}\Big)^*(t)t^{\tau/p-1}dt\Big]^{1/\tau}. \tag{1.1}$$

Теперь, пользуясь неравенством Йенсена (см. [4, гл. 3, разд. 3, с. 125], так как $\tau\leqslant 2$) и учитывая, что функция $f^*\downarrow$ из (1.1), получим

$$I\leqslant\Big[\int\limits_0^1\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^\tau\Big)^*(t)t^{\tau/p-1}dt\Big]^{1/\tau}\leqslant\Big\{\int\limits_0^1\Big[\frac{1}{t}\int\limits_0^t\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^\tau\Big)^*(u)du\Big]t^{\tau/p-1}dt\Big\}^{1/\tau}. \tag{1.2}$$

В силу известной формулы (см., например, [2, с. 64; 23, гл. 2, разд. 2, с. 89])

$$\int\limits_0^t f^*(u)du=\sup_{E\subset\mathbb{I}^m,\mu E=t}\int\limits_E|f(\bar{x})|d\overline{x}, \tag{1.3}$$

где μE — мера Лебега множества E, и свойства интеграла имеем

$$\int\limits_0^t\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^\tau\Big)^*(u)du=\sup_{E\subset\mathbb{I}^m,\mu E=t}\int\limits_E\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}(\overline{x})|^\tau d\overline{x}$$

$$=\sup_{E\subset\mathbb{I}^m,\mu E=t}\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\int\limits_E|\varphi_{\overline{j}}(\overline{x})|^\tau d\overline{x}=\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\sup_{E\subset\mathbb{I}^m,\mu E=t}\int\limits_E|\varphi_{\overline{j}}(\overline{x})|^\tau d\overline{x}$$

$$=\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\int\limits_0^t\big(|\varphi_{\overline{j}}|^\tau\big)^*(u)du. \tag{1.4}$$

Теперь из неравенств (1.2) и (1.4) следует, что

$$I\leqslant\Big\{\int\limits_0^1\Big[\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\frac{1}{t}\int\limits_0^t\big(|\varphi_{\overline{j}}|^\tau\big)^*(u)du\Big]t^{\tau/p-1}dt\Big\}^{1/\tau}$$

$$=\Big\{\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\int\limits_0^1\Big[\frac{1}{t}\int\limits_0^t\big(|\varphi_{\overline{j}}|^\tau\big)^*(u)du\Big]t^{\tau/p-1}dt\Big\}^{1/\tau}. \tag{1.5}$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$\int\limits_0^1\Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\big(|\varphi_{\overline{j}}|^\tau\big)^*(u)du\Big)t^{\tau/p-1}dt=\int\limits_0^1\big(|\varphi_{\overline{j}}|^\tau\big)^*(u)\int\limits_u^1 t^{\tau/p-2}dtdu$$

$$=\frac{p}{p-\tau}\int\limits_0^1\big(|\varphi_{\overline{j}}|^\tau\big)^*(u)u^{\tau/p-1}du \tag{1.6}$$

для $\tau < p$. Из неравенств (1.5) и (1.6) следует, что

$$I \leqslant \Big[\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\int\limits_0^1 \big(|\varphi_{\overline{j}}|^{\tau}\big)^*(u)u^{\tau/p-1}du\Big]^{1/\tau}$$

$$= \Big[\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\int\limits_0^1 \big(\varphi_{\overline{j}}^*(u)\big)^{\tau}u^{\tau/p-1}du\Big]^{1/\tau} \leqslant C\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\|\varphi_{\overline{j}}\|_{p,\tau}^{\tau}\Big)^{1/\tau}.$$

Лемма 1.2. *Пусть $2 < p < \infty$, $2 < \tau < \infty$. Тогда для произвольной системы функций $\{\varphi_{\overline{j}}\}_{\overline{j}=\overline{1}}^{\overline{n}} \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство*

$$\Big\|\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau} \leqslant C\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\|\varphi_{\overline{j}}\|_{p,\tau}^2\Big)^{1/2},$$

где константа C не зависит от $\varphi_{\overline{j}}$ и n_j.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству невозрастающей перестановки функции (см. (1.1))

$$I = \Big\|\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau} = \Big[\int\limits_0^1\Big(\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^{1/2}\Big)^{*^{\tau}}(t)t^{\tau/p-1}dt\Big]^{1/\tau}$$

$$\Big[\int\limits_0^1\Big(\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^*\Big)^{\tau/2}(t)t^{\tau/p-1}dt\Big]^{1/\tau} \leqslant \Big[\int\limits_0^1\Big[\frac{1}{t}\int\limits_0^t\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^*(u)du\Big]^{\frac{\tau}{2}}t^{\frac{\tau}{p}-1}dt\Big]^{1/\tau}. \tag{1.7}$$

Так как по условию леммы $p/2 > 1$ и $\tau/2 > 1$, то пространство $L_{p/2,\tau/2}(\mathbb{T}^m)$ будет нормированным. Поэтому в силу неравенства треугольника и соотношения (0.1) имеем

$$\Big\{\int\limits_0^1\Big[\frac{1}{t}\int\limits_0^t\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^*(u)du\Big]^{\tau/2}t^{\tau/p-1}dt\Big\}^{1/\tau}$$

$$= \Big\{\int\limits_0^1\Big[\frac{1}{t}\int\limits_0^t\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^*(u)du\Big]^{\tau/2}t^{\frac{\tau}{2}\frac{2}{p}-1}dt\Big\}^{\frac{2}{\tau}\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \Big\{\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\Big[\int\limits_0^1\Big[\frac{1}{t}\int\limits_0^t\big(|\varphi_{\overline{j}}|^2\big)^*(u)du\Big]^{\tau/2}t^{\frac{\tau}{2}\frac{2}{p}-1}dt\Big]^{2/\tau}\Big\}^{1/2}$$

$$\leqslant C\Big\{\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\Big[\int\limits_0^1\Big[\big(|\varphi_{\overline{j}}|^2\big)^*(t)\Big\}^{\tau/2}t^{\frac{\tau}{2}\frac{2}{p}-1}dt\Big]^{\frac{2}{\tau}}\Big\}^{1/2}$$

$$= \Big\{\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\Big[\int\limits_0^1\big(\varphi_{\overline{j}}^*(t)\big)^{2\tau/2}t^{\tau/p-1}dt\Big]^{2/\tau}\Big\}^{1/2}$$

$$\leqslant C\Big\{\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\Big[\int\limits_0^1\big(\varphi_{\overline{j}}^*(t)\big)^{\tau}t^{\tau/p-1}dt\Big]^{2/\tau}\Big\}^{1/2} = C\Big\{\sum_{j_1=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\|\varphi_{\overline{j}}\|_{p,\tau}^2\Big\}^{1/2}. \tag{1.8}$$

Теперь из неравенств (1.7), (1.8) следует утверждение леммы 1.2. □

З а м е ч а н и е. Эти леммы в одномерном случае в весовом пространстве Лоренца доказали В. Кокилашвили, Е. Йылдирир [22].

Лемма 1.3. *Пусть $2 < p < \infty$ и $2 < \tau < \infty$. Тогда для произвольной системы функций $\{\varphi_{\overline{j}}\}_{\overline{j}=\overline{1}}^{\overline{n}} \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство*

$$\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\varphi_{\overline{s}}\|_{p,\tau}^{\tau}\Big)^{1/\tau} \leqslant C\Big\|\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}|\varphi_{\overline{s}}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau},$$

где константа C не зависит от $\varphi_{\overline{j}}$ и n_j.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что $(f^*)^\theta = (|f|^\theta)^*$ для числа $\theta > 0$. Поэтому

$$\Big\|\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}|\varphi_{\overline{s}}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau} = \Big[\int\limits_0^1\Big(\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}|\varphi_{\overline{s}}|^2\Big)^{1/2}\Big)^{*^{\tau}}(t)t^{\tau/p-1}dt\Big]^{1/\tau}$$

$$= \Big[\int\limits_0^1\Big(\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}|\varphi_{\overline{s}}|^2\Big)^*\Big)^{\tau/2}(t)t^{\tau/p-1}dt\Big]^{1/\tau}. \tag{1.9}$$

Так как $2 < p < \infty$ и $2 < \tau < \infty$, то в силу ограниченности оператора Харди в пространстве $L_{p/2,\frac{\tau}{2}}(\mathbb{T}^m)$ (см. [1, гл. 5, разд. 3, лемма 3.14, с. 221] и соотношение (0.1)) из (1.9) выводим

$$\Big\|\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau}$$

$$\geqslant C\Big\{\int\limits_0^1\Big[\frac{1}{t}\int\limits_0^t\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}|\varphi_{\overline{j}}|^2\Big)^*(u)du\Big]^{\tau/2}t^{\tau/p-1}dt\Big\}^{1/\tau}. \tag{1.10}$$

Далее, пользуясь равенством (1.4), неравенством Йенсена (так как $2/\tau < 1$), из (1.10) имеем

$$\Big\|\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}|\varphi_{\overline{s}}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau} \geqslant C\Big\{\int\limits_0^1\Big[\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}\frac{1}{t}\int\limits_0^t\big(|\varphi_{\overline{s}}|^2\big)^*(u)du\Big]^{\tau/2}t^{\tau/p-1}dt\Big\}^{1/\tau}$$

$$\geqslant C\Big\{\int\limits_0^1\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}\Big[\frac{1}{t}\int\limits_0^t\big(\varphi_{\overline{s}}^2(u)\big)^*du\Big]^{\tau/2}t^{\tau/p-1}dt\Big\}^{1/\tau}$$

$$\geqslant C\Big[\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}\int\limits_0^1\big(\varphi_{\overline{s}}^*(t)\big)^{2\frac{\tau}{2}}t^{\tau/p-1}dt\Big]^{1/\tau} \geqslant C\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\varphi_{\overline{s}}\|_{p,\tau}^{\tau}\Big)^{1/\tau}.$$

Лемма 1.4. *Пусть $1 < p < \tau \leqslant 2$. Тогда для функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство*

$$\Big\|\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f)\Big\|_{p,\tau} \leqslant C\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau}^{\tau}\Big)^{1/\tau}, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p,\tau < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $1/\tau + 1/\tau' = 1$. Тогда в силу ортогональности $\delta_{\overline{s}}(f,\bar{x})$ получим

$$\int\limits_{\mathbb{I}^m}\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})g(2\pi\overline{x})d\overline{x} = \int\limits_{\mathbb{I}^m}\sum_{s_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})\delta_{\overline{s}}(g,\overline{x})d\bar{x}. \tag{1.11}$$

Далее, применяя неравенства Гельдера для интеграла и суммы, получим

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{I}^m}\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})g(\overline{x})d\overline{x}\Big|\leqslant\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p',\tau'}$$
$$\leqslant\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\tau}_{p,\tau}\Big)^{1/\tau}\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}(g)\|^{\tau'}_{p',\tau'}\Big)^{1/\tau'} \tag{1.12}$$

для любой функции $g\in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m)$.

Теперь, учитывая известное соотношение

$$\|f\|_{p,\tau}\asymp\sup_{\|g\|_{p',\tau'}\leqslant 1}\Big|\int\limits_{\mathbb{I}^m}f(2\pi\overline{x})g(2\pi\overline{x})d\overline{x}\Big|, \tag{1.13}$$

из неравенств (1.11), (1.12) имеем

$$\Big\|\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f)\Big\|_{p,\tau}\leqslant\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}\|^{\tau}_{p,\tau}\Big)^{1/\tau}\sup_{\|g\|_{p',\tau'}\leqslant 1}\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}(g)\|^{\tau'}_{p',\tau'}\Big)^{1/\tau'}. \tag{1.14}$$

Так как $1<p<\tau\leqslant 2$, то $2\leqslant\tau'<p'<\infty$. Поэтому в силу леммы 1.3 выводим

$$\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}(g)\|^{\tau'}_{p',\tau'}\Big)^{1/\tau'}\leqslant C\|g\|_{p',\tau'}.$$

Следовательно, из неравенства (1.14) получим утверждение леммы 1.4. □

З а м е ч а н и е. Леммы 1.1 и 1.4 верны и в случае $\tau=p$, потому что $L_{p,p}(\mathbb{T}^m)=L_p(\mathbb{T}^m)$.

Лемма 1.5. *Пусть $1<p\leqslant 2$ и $1<\tau\leqslant 2$. Тогда для функции $f\in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство*

$$\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^2_{p,\tau}\Big)^{1/2}\leqslant\Big\|\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f)\Big\|_{p,\tau},\quad n_j\in\mathbb{N},\quad j=1,\dots,m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (1.11), (1.13) получим

$$\Big\|\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f)\Big\|_{p,\tau}\geqslant C\sup_{\|g\|_{p',\tau'}\leqslant 1}\int\limits_{\mathbb{I}^m}\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})\delta_{\overline{s}}(g,\overline{x})d\overline{x}. \tag{1.15}$$

Рассмотрим множество

$$G_{p',\tau'}(\varepsilon)=\big\{g\in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m):\|\delta_{\overline{s}}(g)\|_{p',\tau'}\leqslant\varepsilon_{\overline{s}},\ \bar{s}\in\mathbb{Z}^m_0\big\},$$

где $1/p+1/p'=1$, $1/\tau+1/\tau'=1$ и числовая последовательность $\{\varepsilon_{\overline{s}}\}$ удовлетворяет условию

$$\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\varepsilon^2_{\overline{s}}\Big)^{1/2}\leqslant 1.$$

Множество таких последовательностей $\{\varepsilon_{\overline{s}}\}$ обозначим через Λ_2.

Если $1<p<2$ и $1<\tau<2$, то $2<p'<\infty$ и $2<\tau'<\infty$. Поэтому согласно лемме 1.2 имеем

$$\Big\|\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(g)\Big\|_{p',\tau'}\leqslant C\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}(g)\|^2_{p',\tau'}\Big)^{1/2}\leqslant C\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\varepsilon^2_{\overline{s}}\Big)^{1/2}\leqslant C.$$

Если $1 < p < 2$ и $\tau = 2$, то $2 \leqslant p^{'} < \infty$ и $\tau^{'} = 2$. Следовательно, в силу леммы 1.1 неравенство справедливо и при $\tau = 2$.

Таким образом, из неравенства (1.15) получим

$$\Big\|\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f)\Big\|_{p,\tau} \geqslant C\sup_{\{\varepsilon_{\overline{s}}\}\in\Lambda_2}\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\sup_{g\in G_{p^{'},\tau^{'}}(\varepsilon)}\int\limits_{\mathbb{I}^m}\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})\delta_{\overline{s}}(g,\overline{x})d\overline{x}. \tag{1.16}$$

Как в статье В. Н. Темлякова [14, с. 29], можно доказать, что

$$\sup_{g\in G_{p^{'},\tau^{'}}(\varepsilon)}\int\limits_{\mathbb{I}^m}\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})\delta_{\overline{s}}(g,\overline{x})d\overline{x} = \varepsilon_{\overline{s}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau}, \quad \overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m.$$

Поэтому из неравенства (1.16) и учитывая свойства нормы в пространстве l_2, выводим

$$\Big\|\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f)\Big\|_{p,\tau} \geqslant C\sup_{\{\varepsilon_{\bar{s}}\}\in\Lambda_2}\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\varepsilon_{\overline{s}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau} = C\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau}^2\Big)^{1/2}.$$

Лемма 1.6. *Пусть $1 < p \leqslant 2$ и $2 < \tau < \infty$. Тогда для функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ имеет место неравенство*

$$\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau}^{\tau}\Big)^{1/\tau} \leqslant C\Big\|\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f)\Big\|_{p,\tau}, \quad n_j\in\mathbb{N}, \quad j=1,\dots,m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как в доказательстве леммы 1.5, рассмотрим множество

$$G_{p^{'},\tau^{'}}(\varepsilon) = \big\{g\in L_{p^{'},\tau^{'}}(\mathbb{T}^m)\colon \|\delta_{\overline{s}}(g)\|_{p^{'},\tau^{'}} \leqslant \varepsilon_{\bar{s}},\ \overline{s}\in\mathbb{Z}_0^m\big\},$$

где $1/p + 1/p^{'} = 1$, $1/\tau + 1/\tau^{'} = 1$ и числовая последовательность $\{\varepsilon_{\overline{s}}\}$ удовлетворяет условию

$$\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\varepsilon_{\overline{s}}^{\tau^{'}}\Big)^{1/\tau^{'}} \leqslant 1.$$

Множество таких последовательностей $\{\varepsilon_{\overline{s}}\}$ обозначим через $\Lambda_{\tau^{'}}$.

Так как $1 < p \leqslant 2$ и $2 < \tau < \infty$, то $2 \leqslant p^{'} < \infty$ и $1 < \tau^{'} < 2$. Поэтому согласно лемме 1.1 (так как $\tau^{'} < p^{'}$) имеем

$$\Big\|\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(g)\Big\|_{p^{'},\tau^{'}} \leqslant \Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}(g)\|_{p^{'},\tau^{'}}^{\tau^{'}}\Big)^{1/\tau^{'}} \leqslant C\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\varepsilon_{\overline{s}}^{\tau^{'}}\Big)^{1/\tau^{'}} \leqslant C.$$

Следовательно, из неравенства (1.15) получим

$$\Big\|\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f)\Big\|_{p,\tau} \geqslant C\sup_{\{\varepsilon_{\bar{s}}\}\in\Lambda_{\tau^{'}}}\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\sup_{g\in G_{p^{'},\tau^{'}}(\varepsilon)}\int\limits_{\mathbb{I}^m}\delta_{\overline{s}}(f,\bar{x})\delta_{\overline{s}}(g,\overline{x})d\overline{x}.$$

Как в статье В. Н. Темлякова [14, с. 29], можно показать, что

$$\sup_{g\in G_{p^{'},\tau^{'}}(\varepsilon)}\int\limits_{\mathbb{I}^m}\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})\delta_{\overline{s}}(g,\overline{x})d\overline{x} = \varepsilon_{\overline{s}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau}, \quad \bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m.$$

Поэтому из предыдущего неравенства, учитывая свойства нормы пространства l_τ, выводим

$$\Big\|\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f)\Big\|_{p,\tau} \geqslant C\sup_{\{\varepsilon_{\overline{s}}\}\in\Lambda_{\tau^{'}}}\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\varepsilon_{\overline{s}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau} = C\Big(\sum_{s_1=0}^{n_1}\dots\sum_{s_m=0}^{n_m}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau}^{\tau}\Big)^{1/\tau}.$$

З а м е ч а н и е. Для одномерной суммы лемма 1.3 доказана в статье автора 2017 г. (см. ссылку на с. 7).

Теорема 1.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leqslant 2$ *или* $2 < p < \infty$, $2 < \tau < \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ *имеет место неравенство*

$$\|f\|_{p,\tau} \leqslant C\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\overline{s}}\|_{p,\tau}^{\tau_0}\Big)^{1/\tau_0},$$

где $\tau_0 = \min\{\tau, 2\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $2 < p < \infty$, $2 \leqslant \tau < \infty$, то утверждение теоремы следует из леммы 1.2.

Пусть $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leqslant 2$. Тогда в случае $\tau < p$, применяя лемму 1.1, а для $\tau > p$, пользуясь леммой 1.4, получим утверждение теоремы 1.2. $\square$

Теорема 1.3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \tau_2 \leqslant 2$. *Если* $\tau_2 < \tau_1$ *и функция* $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\Big)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)} \|\delta_{\overline{s}}\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} < \infty, \tag{1.17}$$

то $f \in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ *и выполняется неравенство*

$$\|f\|_{p,\tau_2} \leqslant C\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\Big)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)} \|\delta_{\overline{s}}\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}. \tag{1.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ и выполнено условие (1.17). Тогда в силу неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов (см. работу автора 2017 г. в данном журнале) имеем

$$\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\overline{s}}\|_{p,\tau_2}^{\tau_2} \leqslant \sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\Big)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)} \|\delta_{\overline{s}}\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}. \tag{1.19}$$

Так как $1 < \tau_2 \leqslant 2$, то из (1.19) и теоремы 1.2 получим, что функция $f \in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ и выполняется неравенство (1.18). $\square$

2. О порядках приближений функций классов Никольского — Бесова в пространстве Лоренца с одинаковыми сильными параметрами

Положим $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$ и будем считать, что $\gamma_j' = \gamma_j$, $j = 1, \ldots, \nu$, $\nu = 1, \ldots, m$ и $\gamma_{j-1} < \gamma_j' < \gamma_j$, $j = \nu+1, \ldots, m$. При $\nu = m$, последние неравенства превращаются в равенства.

Теорема 2.1. *Пусть* $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m$, $\nu = 1, \ldots, m$, $1 < p < \infty$ *и* $1 < \tau \leqslant 2$ *или* $2 < p < \infty$ *и* $2 \leqslant \tau < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Если* $2 < p < \infty$ *и* $2 \leqslant \tau < \infty$, *то*

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}}B)_{p,\tau} \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

где $a_+ = \max\{0, a\}$.

Если $1 < p < \infty$ *и* $1 < \tau \leqslant 2$, *то*

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}}B)_{p,\tau} \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/\tau-1/\theta)_+}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathbb{S}^{\bar r}_{p,\tau,\theta}B$. Тогда по свойству наилучшего приближения и теореме 1.2 имеем

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(f)_{p,\tau} \leqslant \|f - S_n^{(\overline{\gamma}')}(f)\|_{p,\tau} = \Big\| \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle \geqslant n} \delta_{\overline{s}}(f) \Big\|_{p,\tau} \leqslant \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle \geqslant n} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}^{\tau_0}\Big)^{1/\tau_0}, \tag{2.3}$$

где $\tau_0 = \min\{\tau, 2\}$.

Пусть $2 < \tau < \infty$. Тогда оценка (2.3) имеет следующий вид:

$$E_n^{(\bar\gamma')}(f)_{p,\tau} \leqslant \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle \geqslant n} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}^{2}\Big)^{1/2}. \tag{2.4}$$

Если $2 < \theta < \infty$, то применяя неравенство Гельдера ($\beta = \theta/2$, $1/\beta + 1/\beta' = 1$) и [14, лемма B] из (2.4), получим

$$\begin{aligned} E_n^{(\overline{\gamma}')}(f)_{p,\tau} &\leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r}\rangle\theta} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle \geqslant n} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{r}\rangle 2\beta'}\Big)^{1/(2\beta')} \\ &\leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r}\rangle\theta} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

для функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B$.

Если $\theta = \infty$, то из (2.4) согласно [14, лемма B] выводим

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(f)_{p,\tau} \leqslant C \sup_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r}\rangle} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau} \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle \geqslant n} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{r}\rangle 2}\Big)^{1/2} \leqslant C 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)/2} \sup_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r}\rangle} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}.$$

Если $\theta \leqslant 2$, то, применяя неравенство Йенсена (см. [4, гл. 3 разд. 3, с. 125, лемма 3.3.3]) из (2.4), имеем

$$\begin{aligned} E_n^{(\overline{\gamma}')}(f)_{p,\tau} &\leqslant \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle \geqslant n} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} \\ &\leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r}\rangle\theta} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} \sup_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle \geqslant n} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{r}\rangle} \leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r}\rangle\theta} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} 2^{-nr_1} \end{aligned} \tag{2.6}$$

для функции $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B$. Из неравенств (2.5), (2.6) следует оценка сверху в (2.1).

Пусть $1 < p < \infty$ и $1 < \tau \leqslant 2$. Тогда оценка (2.3) имеет следующий вид:

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(f)_{p,\tau} \leqslant \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \bar\gamma'\rangle \geqslant n} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}^{\tau}\Big)^{1/\tau}. \tag{2.7}$$

Если $\tau < \theta < \infty$, то применяя неравенство Гельдера ($\beta = \theta/\tau$, $1/\beta + 1/\beta' = 1$) и [14, лемма B], из (2.7) получим

$$\begin{aligned} E_n^{(\overline{\gamma}')}(f)_{p,\tau} &\leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r}\rangle\theta} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}'\rangle \geqslant n} 2^{-\langle \overline{s}, \overline{r}\rangle 2\beta'}\Big)^{1/(2\beta')} \\ &\leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r}\rangle\theta} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/\tau-1/\theta)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Если $\theta \leqslant 2$, то, применяя неравенство Йенсена (см. [4, гл. 3 разд. 3, с. 125, лемма 3.3.3]), из (2.7) получим

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(f)_{p,\tau} \leqslant \Big(\sum_{\langle \bar{s},\overline{\gamma}'\rangle \geqslant n} \big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} \leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} 2^{-nr_1} \tag{2.9}$$

для функции $f \in \mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}}B$. Из неравенств (2.8), (2.9) следует оценка сверху в (2.2).

Докажем оценку снизу величины $E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{B}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}})_{p,\tau}$. Оценку достаточно доказать для $\nu = m$. В этом случае $\overline{\gamma} = (1,\ldots,1)$, и вместо $\overline{\gamma}$ будем писать $\overline{1}$.

Пусть $2 < p < \infty$, $2 \leqslant \tau < \infty$ и $2 < \theta < \infty$. Рассмотрим функцию

$$f_0(2\pi\overline{x}) = n^{-(m-1)/\theta} \sum_{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle = n} 2^{-\langle \overline{s},\overline{r}\rangle} \prod_{j=1}^m e^{i2^{s_j-1}2\pi x_j}, \quad \overline{x}\in\mathbb{I}^m, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Так как $|\prod_{j=1}^m e^{i2^{s_j-1}2\pi x_j}| = 1 \quad \forall \overline{x}\in\mathbb{I}^m$, то

$$\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\overline{s}}(f_0)\big\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta} = n^{-(m-1)/\theta}\Big(\sum_{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle = n} \Big\|\prod_{j=1}^m e^{i2^{s_j-1}2\pi x_j}\Big\|_{p,\tau}^{\theta}\Big)^{1/\theta}$$
$$= n^{-(m-1)/\theta}\Big(\sum_{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle = n} 1\Big)^{1/\theta} \leqslant C_0.$$

Следовательно, функция $F_0 = C_0^{-1}f_0 \in \mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}}B$. Поэтому $E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}}B)_{p,\tau} \geqslant E_n^{(\overline{\gamma}')}(F_0)_{p,\tau} = C_0^{-1}\|f_0\|_{p,\tau}$. Так как $2<p<\infty$, то отсюда получим

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}}B)_{p,\tau} \geqslant C\|f_0\|_2 = Cn^{-(m-1)/\theta}\Big(\sum_{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle = n} 2^{-\langle \bar{s},\bar{r}\rangle 2}\Big)^{1/2}$$
$$= Cn^{-(m-1)/\theta}2^{-nr_1}\Big(\sum_{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle = n} 1\Big)^{1/2} \geqslant C2^{-nr_1}n^{-(m-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Этим доказана точность оценки (2.1) в случае $2 < p < \infty$, $2 \leqslant \tau < \infty$ и $2 < \theta < \infty$.

Если $\theta = \infty$, то рассмотрим функцию

$$f_{01}(2\pi\overline{x}) = \sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{-\langle \overline{s},\overline{r}\rangle} \prod_{j=1}^m e^{i2^{s_j-1}2\pi x_j}, \quad \overline{x}\in\mathbb{I}^m, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Тогда

$$\big\|\delta_{\overline{s}}(f_{01})\big\|_{p,\tau} = 2^{-\langle \overline{s},\overline{r}\rangle} \quad \overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m.$$

Следовательно, функция $f_{01} \in \mathbb{S}_{p,\tau,\infty}^{\overline{r}}B$.

Так как $2<p<\infty$, то в силу равенства Парсеваля и [14, лемма B] имеем

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{S}_{p,\tau,\infty}^{\overline{r}}B)_{p,\tau} \geqslant E_n^{(\overline{\gamma}')}(f_{01})_{p,\tau} \geqslant CE_n^{(\overline{\gamma}')}(f_{01})_2 \geqslant C\Big(\sum_{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle = n} 2^{-\langle \bar{s},\bar{r}\rangle 2}\Big)^{1/2} \geqslant C2^{-nr_1}n^{(\nu-1)/2}.$$

Пусть $2 < p < \infty$, $2 \leqslant \tau < \infty$ и $\theta \leqslant 2$ или $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leqslant 2$ и $\theta \leqslant \tau$. Рассмотрим функцию

$$f_1(2\pi\overline{x}) = 2^{-n(r_1+1-1/p)} \sum_{\overline{k}\in\rho(\tilde{\bar{s}})} e^{i\langle \overline{k},2\pi\overline{x}\rangle},$$

где $\tilde{\overline{s}} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ — один из векторов $\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m$, удовлетворяющих условию и такой что $\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n$.

Тогда $\left\| \delta_{\overline{s}}(f_1) \right\|_{p,\tau} = 0$, если $\overline{s} \neq \tilde{\overline{s}}$. Если $\overline{s} = \tilde{\overline{s}}$, то в силу известного соотношения

$$\Big\| \sum_{\overline{k} \in \rho(\overline{s})} e^{i\langle \overline{k}, 2\pi\overline{x} \rangle} \Big\|_{p,\tau} \asymp \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(1-1/p)}, \quad 1 < p, \tau < \infty \tag{2.10}$$

имеем $\left\| \delta_{\tilde{\overline{s}}}(f_1) \right\|_{p,\tau} \asymp 2^{-nr_1}$. Поэтому

$$\Big(\sum_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle \theta} \left\| \delta_{\overline{s}}(f_1) \right\|_{p,\tau}^{\theta} \Big)^{1/\theta} = 2^{\langle \tilde{\overline{s}}, \overline{r} \rangle} \left\| \delta_{\tilde{\overline{s}}}(f_1) \right\|_{p,\tau} \leqslant C_1.$$

Следовательно, функция $F_1 = C_1^{-1} f_1 \in \mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}} B$.

Теперь по определению наилучшего приближения функции и в силу соотношения (2.10) получаем

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}} B)_{p,\tau} \geqslant E_n^{(\overline{\gamma}')}(F_1)_{p,\tau} = C_1^{-1} \|f_1\|_{p,\tau} \geqslant C 2^{-nr_1} \tag{2.11}$$

в случае $2 < p < \infty$, $2 \leqslant \tau < \infty$ и $\theta \leqslant 2$ или $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leqslant 2$ и $\theta \leqslant \tau$.

Пусть $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leqslant 2$ и $\tau < \theta$. Рассмотрим функцию

$$f_2(2\pi\overline{x}) = n^{-(m-1)/\theta} 2^{-n(r_1+1-1/p)} \sum_{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n} \sum_{\overline{k} \in \rho(\overline{s})} e^{i\langle \overline{k}, 2\pi\overline{x} \rangle}.$$

В силу непрерывности функция f_2 принадлежит $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Далее согласно соотношению (2.10) имеем

$$\Big(\sum_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle \theta} \left\| \delta_{\overline{s}}(f_2) \right\|_{p,\tau}^{\theta} \Big)^{1/\theta} = n^{-(m-1)/\theta} 2^{-n(1-1/p)} \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n} \Big\| \sum_{\overline{k} \in \rho(\overline{s})} e^{i\langle \overline{k}, 2\pi\overline{x} \rangle} \Big\|_{p,\tau}^{\theta} \Big)^{1/\theta}$$

$$\leqslant n^{-(m-1)/\theta} 2^{-n(1-1/p)} \Big(\sum_{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(1-1/p)\theta} \Big)^{1/\theta} \leqslant C_2.$$

Следовательно, функция $F_2 = C_2^{-1} f_2 \in \mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}} B$. Теперь по определению наилучшего приближения функции выводим

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}} B)_{p,\tau} \geqslant E_n^{(\overline{\gamma}')}(F_2)_{p,\tau} = C_2^{-1} \|f_2\|_{p,\tau}. \tag{2.12}$$

Согласно следствию 3.1 (см. разд. 3) для ядра Дирихле

$$D_{n,\gamma}(\overline{x}) = \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle = n} \sum_{\overline{k} \in \rho(\overline{s})} e^{i\langle \overline{k}, 2\pi\overline{x} \rangle}$$

справедливо соотношение $\|D_{n,\gamma}\|_{p,\tau} \asymp 2^{n(1-1/p)} n^{(m-1)/\tau}$, $1 < p, \tau < \infty$. Поэтому

$$\|f_2\|_{p,\tau} \geqslant C n^{-(m-1)/\theta} 2^{-n(r_1+1-1/p)} \| \sum_{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n} \sum_{\overline{k} \in \rho(\overline{s})} e^{i\langle \overline{k}, 2\pi\overline{x} \rangle} \|_{p,\tau} \geqslant C 2^{-nr_1} n^{(m-1)(1/\tau - 1/\theta)}.$$

Следовательно из неравенства (2.12) получим

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\overline{r}} B)_{p,\tau} \geqslant C 2^{-nr_1} n^{(m-1)(1/\tau - 1/\theta)} \geqslant C 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/\tau - 1/\theta)}$$

в случае $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leqslant 2$ и $\tau < \theta$.

Докажем оценку снизу в случае $\theta=\infty$. Рассмотрим функцию

$$f_{21}(2\pi\overline{x})=\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_j(r_j+1-1/p)}\sum_{\overline{k}\in\rho(\overline{s})}e^{i\langle\overline{k},2\pi\overline{x}\rangle}.$$

В силу соотношения (2.10) нетрудно убедиться, что

$$\left\|\delta_{\overline{s}}(f_{21})\right\|_{p,\tau}\asymp 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}$$

при $1<p<\infty$, $1<\tau<\infty$. Следовательно, функция $F_{21}=C_{21}f_{21}\in\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\infty}B$ с некоторой постоянной $C_{21}>0$.

Теперь по свойству наилучшего приближения функции и теореме 3.2 имеем

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\infty}B)_{p,\tau}\geqslant E_n^{(\overline{\gamma}')}(F_{21})_{p,\tau}\geqslant C_{21}\|f_{21}-S_n^{\overline{\gamma}'}(f_{21})\|_{p,\tau}$$
$$\geqslant C\Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}'\rangle\geqslant n}\prod_{l=1}^{m}2^{s_l(1/\lambda-1/p)\tau}\|\delta_{\overline{s}}(f_{21})\|^{\tau}_{\lambda}\Big)^{1/\tau},$$

где $\lambda\in(p,\infty)$. Далее, пользуясь соотношением (2.10) и [14, лемма B], отсюда выводим

$$E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\infty}B)_{p,\tau}\geqslant 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)/\tau}.$$

З а м е ч а н и е. В случае $\tau=p$ из теоремы 2.1 следуют [14, теорема 2.3] при $\theta=\infty$ и [15, теорема 1] при $1\leqslant\theta<\infty$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\overline{r}=(r_1,\ldots,r_m)$, $0<r_1=\ldots=r_\nu<r_{\nu+1}\leqslant\ldots\leqslant r_m$, $\nu=1,\ldots,m$, $1<p<\infty$, $1<\tau_2\leqslant 2$ *и* $\tau_2<\tau_1<\infty$, $1\leqslant\theta<\infty$. *Если* $\tau_2<\theta$, *то*

$$E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{p,\tau_2}\leqslant C2^{-nr_1}n^{(m-1)(1/\tau_2-1/\theta)+(1/\tau_2-1/\tau_1)},\quad n\in\mathbb{N}.\tag{2.13}$$

Если $\theta\leqslant\tau_2$, *то*

$$E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{p,\tau_2}\asymp 2^{-nr_1}n^{(1/\tau_2-1/\tau_1)},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f\in\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$. Если $\tau_2<\theta$, то положим $q=\theta/\tau_2>1, 1/q+1/q^{'}=1$. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\Big)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}$$
$$\leqslant\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\left\|\delta_{\overline{s}}(f)\right\|^{\theta}_{p,\tau}\Big)^{1/\theta}\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{-\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\tau_2q^{'}}\Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\Big)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q^{'}}\Big)^{1/(\tau_2q^{'})}.\tag{2.14}$$

Так как $1=\gamma_1=\ldots=\gamma_\nu<\gamma_{\nu+1}\leqslant\ldots\leqslant\gamma_m$, то

$$\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{-\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\tau_2q^{'}}\Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\Big)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q^{'}}\leqslant\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle r_1\tau_2q^{'}}\Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j\gamma_j+1)\Big)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q^{'}}$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle<l+1}2^{-\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle r_1\tau_2q^{'}}\Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j\gamma_j+1)\Big)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q^{'}}$$
$$\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}2^{-lr_1\tau_2q^{'}}(l+m)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q^{'}}\sum_{l\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle<l+1}1\leqslant C\sum_{l=0}^{\infty}2^{-lr_1\tau_2q^{'}}(l+m)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q^{'}}(l+1)^{m-1}.\tag{2.15}$$

Так как ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-lr_1\tau_2 q^{'}}(l+m)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q^{'}}(l+1)^{m-1}$$

сходится, то в силу теоремы 1.3 из неравенств (2.14) и (2.15) следует, что $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B \subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случае $\tau_2 < \theta$.

Если $\theta \leqslant \tau_2$, то применяя неравенство Йенсена (см. [4, гл. 3 разд. 3, с. 125, лемма 3.3.3]) и учитывая (2.4), получим

$$\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\Big)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2} \leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\Big)^{\theta(1/\tau_2-1/\tau_1)}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta}$$
$$\leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta}\sup_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{-\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\Big)^{(1/\tau_2-1/\tau_1)}. \tag{2.16}$$

Теперь в силу теоремы 1.3 из неравенства (2.16) следует, что $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B \subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случае $\theta \leqslant \tau_2$.

Перейдем к доказательству неравенства (2.13). Пусть $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B$. Тогда по свойству наилучшего приближения и теореме 1.3 имеем

$$E^{(\overline{\gamma})}_n(f)_{p,\tau_2} \leqslant \|f - S^{(\overline{\gamma})}_n(f)\|_{p,\tau_2} \leqslant \Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\geqslant n}\Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\Big)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}. \tag{2.17}$$

Если $\tau_2 < \theta$, то положим $q = \theta/\tau_2 > 1, 1/q + 1/q^{'} = 1$. Применяя неравенство Гельдера и повторяя рассуждения доказательств неравенств (2.14) и (2.15), из (2.17) получим

$$E^{(\overline{\gamma})}_n(f)_{p,\tau_2} \leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta}\Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\geqslant n} 2^{-\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\tau_2 q^{'}}\Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\Big)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q^{'}}\Big)^{1/(\tau_2 q^{'})}$$
$$\leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta}\Big(\sum_{l=n}^{\infty} 2^{-lr_1\tau_2 q^{'}}(l+m)^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)q^{'}}(l+1)^{m-1}\Big)^{1/(\tau_1 q^{'})}$$
$$\leqslant C\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{2/\theta} 2^{-nr_1}(n+1)^{(m-1)(1/\tau_2-1/\tau_1)}(n+1)^{1/\tau_2-1/\tau_1}. \tag{2.18}$$

Из неравенства (2.18) следует оценка (2.13).

Если $\theta \leqslant \tau_2$, то, применяя неравенство Йенсена (см. [2, гл. 3 разд. 3, с. 125, лемма 3.3.3]) и учитывая (2.4), получим

$$E^{(\overline{\gamma})}_n(f)_{p,\tau_2} \leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta}\sup_{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\geqslant n} 2^{-\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\Big(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\Big)^{(1/\tau_2-1/\tau_1)}.$$

Отсюда следует, что $E^{(\overline{\gamma})}_n(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{p,\tau_2} \leqslant C2^{-nr_1}n^{(1/\tau_2-1/\tau_1)},\ n \in \mathbb{N}$.

Докажем оценку снизу. Рассмотрим функцию

$$G_{\overline{s}}(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{m}\prod_{k\in\{1,2,..,m\}\setminus\{j\}} e^{i(2^{s_k}-1)2\pi x_k}\sum_{\nu_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1}\frac{\cos 2\pi\nu_j x_j}{\nu_j^{1-1/p}},$$

где $\overline{s} \in \mathbb{Z}^m_+$ такой, что $\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle$.

В недавней статье автора (О точности неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов в обобщенном пространстве Лоренца // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 9–20) показано, что

$$\|G_{\overline{s}}\|_{p,\tau} \asymp \Big(\sum_{j=1}^{m} s_j\Big)^{1/\tau}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 < \tau < \infty. \tag{2.19}$$

Поэтому функция $f_{0,\overline{s}}(\overline{x}) = C2^{-nr_1}n^{-1/\tau_1}G_{\overline{s}}(\overline{x}) \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$.

Далее, по свойству наилучшего приближения и учитывая (2.19), будем иметь

$$E_n^{(\overline{\gamma})}(f_{0,\overline{s}})_{p,\tau_2} = \|f_{0,\overline{s}}\|_{p,\tau_2} = C2^{-nr_1}n^{-1/\tau_1}\|G_{\overline{s}}\|_{p,\tau_2} \geqslant C2^{-nr_1}n^{1/\tau_2-1/\tau_1}.$$

Следовательно, $E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{p,\tau_2} \geqslant C2^{-nr_1}n^{(1/\tau_2-1/\tau_1)}$ в случае $\theta \leqslant \tau_2$.

3. О порядках приближений функций классов Никольского — Бесова в пространстве Лоренца с разными сильными параметрами

Теорема 3.1. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$. Если функция $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\tau_2(1/p-1/q)}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} < \infty, \tag{3.1}$$

то $f \in L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$, и выполняется неравенство

$$\|f\|_{q,\tau_2} \leqslant C\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\tau_2(1/p-1/q)}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Обозначим $M = [\tau_2]+1$, где $[a]$ — целая часть числа a. Рассмотрим частичную сумму ряда Фурье функции $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$

$$S_{\bar{n}}(f,\overline{x}) = \sum_{s_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{s_m=0}^{n_m}\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) = \sum_{\bar{0}\leqslant\bar{s}\leqslant\bar{n}}\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}),$$

где для элементов $\overline{a} = (a_1,\ldots,a_m), \overline{b} = (b_1,\ldots,b_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, запись $\overline{a} \leqslant \overline{b}$ означает, что $a_j \leqslant b_j, \quad j = 1,\ldots,m$. Положим $I_1 = \|S_{\overline{n}}(f)\|_{q,\tau_2}$.

Согласно свойству невозрастающей перестановки функции и нормы справедливо неравенство

$$I_1 \leqslant \Big\|\frac{1}{t}\int_0^t S_{\overline{n}}^*(f,u)du\Big\|_{q,\tau_2}. \tag{3.3}$$

Пользуясь равенством (1.3), получим

$$\frac{1}{t}\int_0^t S_{\overline{n}}^*(f,u)du = \sum_{\bar{0}\leqslant\overline{s}\leqslant\overline{n}}\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\overline{s}}^*(f,u)du. \tag{3.4}$$

Поэтому из неравенства (3.3) следует, что

$$I_1^{\tau_2} \leqslant \Big\|\frac{1}{t}\int_0^t S_{\overline{n}}^*(f,u)du\Big\|_{q,\tau_2}^{\tau_2} = \frac{\tau_2}{q}\int_0^1\Big(\sum_{\bar{0}\leqslant\overline{s}\leqslant\overline{n}}\frac{1}{t}\int_0^t \delta_{\overline{s}}^*(f,u)du\Big)^{(\tau_2/M)M}t^{\tau_2/q-1}dt. \tag{3.5}$$

Так как $\tau_2/M < 1$, то, применяя к сумме неравенство Йенсена ([4, гл. 3 разд. 3, с. 125, лемма 3.3.3]), из (3.5) получим

$$I_1^{\tau_2} \leqslant \frac{\tau_2}{q}\int\limits_0^1 \Big[\sum_{\bar{0}\leqslant\bar{s}\leqslant\bar{n}}\Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \delta^*_{\bar{s}}(f,u)du\Big)^{\tau_2/M}\Big]^M t^{\tau_2/q-1}dt$$

$$= \frac{\tau_2}{q}\sum_{\bar{0}\leqslant\bar{s}(1)\leqslant\bar{n}}\cdots\sum_{\bar{0}\leqslant\bar{s}(M)\leqslant\bar{n}}\int\limits_0^1\prod_{j=1}^M\Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \delta^*_{\bar{s}(j)}(f,u)du\Big)^{\tau_2/M} t^{\tau_2/q-1}dt. \tag{3.6}$$

Положим

$$\Delta_{\bar{s}(j)}(f,t) = \Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \delta^*_{\bar{s}(j)}(f,u)du\Big)^{\tau_2/M}.$$

Тогда, учитывая равенство

$$\prod_{j=1}^M a_{\nu_j} = \Big(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant M} a_{\nu_i}a_{\nu_j}\Big)^{1/(M-1)} \tag{3.7}$$

и применяя неравенство Гельдера с показателями $\theta = M(M-1)/2$, получим

$$I_2 = \int\limits_0^1\prod_{j=1}^M\Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \delta^*_{\bar{s}(j)}(f,u)du\Big)^{\tau_2/M} t^{\tau_2/q-1}dt = \int\limits_0^1\prod_{j=1}^M \Delta_{\bar{s}(j)}(f,t)t^{\tau_2/q-1}dt$$

$$= \int\limits_0^1\Big(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant M}\Delta_{\bar{s}(i)}(f,t)\Delta_{\bar{s}(j)}(f,t)\Big)^{1/(M-1)} t^{\tau_2/q-1}dt$$

$$= \int\limits_0^1\prod_{1\leqslant i<j\leqslant M}\big(\Delta_{\bar{s}(i)}(f,t)\Delta_{\bar{s}(j)}(f,t)\big)^{1/(M-1)}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant M} t^{(\tau_2/q-1)(1/\theta)}dt$$

$$\leqslant \prod_{1\leqslant i<j\leqslant M}\Big(\int\limits_0^1\big(\Delta_{\bar{s}(i)}(f,t)\Delta_{\bar{s}(j)}(f,t)\big)^{M/2} t^{\tau_2/q-1}dt\Big)^{1/\theta}.$$

Поэтому из неравенства (3.6) выводим

$$I_1^{\tau_2} \leqslant \frac{\tau_2}{q}\sum_{\bar{0}\leqslant\bar{s}(1)\leqslant\bar{n}}\cdots\sum_{\bar{0}\leqslant\bar{s}(M)\leqslant\bar{n}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant M}\Big[\int\limits_0^1\big(\Delta_{\bar{s}(i)}(f,t)\Delta_{\bar{s}(j)}(f,t)\big)^{M/2} t^{\tau_2/q-1}dt\Big]^{1/\theta}. \tag{3.8}$$

Положим

$$\rho_{\bar{\mu},\bar{\nu}} = \int\limits_0^1\big(\Delta_{\bar{\mu}}(f,t)\Delta_{\bar{\nu}}(f,t)\big)^{M/2} t^{\tau_2/q-1}dt$$

$$= \int\limits_0^1\Big[\Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \delta^*_{\bar{\mu}}(f,u)du\Big)^{\tau_2/M}\Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \delta^*_{\bar{\nu}}(f,u)du\Big)^{\tau_2/M}\Big]^{M/2} t^{\tau_2/q-1}dt$$

$$= \int\limits_0^1\Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \delta^*_{\bar{\mu}}(f,u)du\Big)^{\tau_2/2}\Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \delta^*_{\bar{\nu}}(f,u)du\Big)^{\tau_2/2} t^{\tau_2/q-1}dt.$$

Теперь, применяя к интегралу в правой части этого равенства неравенство Гельдера с показателями $\alpha = \dfrac{p+q}{p}$, $\alpha' = \dfrac{\alpha}{\alpha-1} = \dfrac{p+q}{q}$, получим

$$\rho_{\bar{\mu},\bar{\nu}} \leqslant \Big[\int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \delta^*_{\bar{\mu}}(f,u)du\Big)^{\tau_2\alpha/2} t^{\tau_2/q-1}dt\Big]^{1/\alpha} \Big[\int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \delta^*_{\bar{\mu}}(f,u)du\Big)^{\tau_2\alpha'/2} t^{\tau_2/q-1}dt\Big]^{1/\alpha'}$$

$$= \Big[\int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \delta^*_{\bar{\mu}}(f,u)du\Big)^{\tau_2\alpha/2} t^{\frac{\tau_2\alpha}{2}\frac{2}{q\alpha}-1}dt\Big]^{\frac{2}{\tau_2\alpha}\frac{\tau_2}{2}}$$

$$\times \Big[\int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \delta^*_{\bar{\mu}}(f,u)du\Big)^{\tau_2\alpha'/2} t^{\frac{\tau_2\alpha'}{2}\frac{2}{q\alpha'}-1}dt\Big]^{\frac{2}{\tau_2\alpha'}\frac{\tau_2}{2}}. \tag{3.9}$$

Так как $p < q$, то $q\alpha/2 > p$ и $q\alpha'/2 > p$. Поэтому, применяя неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца (см. [24, лемма 6]), из (3.9) имеем

$$\rho_{\bar{\mu},\bar{\nu}} \leqslant \|\delta_{\bar{\mu}}(f)\|^{\tau_2/2}_{\frac{q\alpha}{2},\frac{\tau_2\alpha}{2}} \|\delta_{\bar{\nu}}(f)\|^{\tau_2/2}_{\frac{q\alpha'}{2},\frac{\tau_2\alpha'}{2}} \leqslant C\Big(\prod_{j=1}^m 2^{\mu_j(\frac{1}{p}-\frac{2}{q\alpha})}\|\delta_{\bar{\mu}}(f)\|_{p,\tau_1} \prod_{j=1}^m 2^{\nu_j(\frac{1}{p}-\frac{2}{q\alpha'})}\|\delta_{\bar{\nu}}(f)\|_{p,\tau_1}\Big)^{\tau_2/2}. \tag{3.10}$$

Так как

$$\frac{1}{p}-\frac{2}{q\alpha} = \frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}\Big(1-\frac{2}{\alpha}\Big), \quad \frac{1}{p}-\frac{2}{q\alpha'} = \frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}\Big(\frac{2}{\alpha}-1\Big),$$

то неравенство (3.10) можно переписать в следующем виде:

$$\rho_{\bar{\mu},\bar{\nu}} \leqslant C\Big(\prod_{j=1}^m 2^{\mu_j(1/p-1/q)\tau_2}\|\delta_{\bar{\mu}}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1} \prod_{j=1}^m 2^{\nu_j(1/p-1/q)\tau_2}\|\delta_{\bar{\nu}}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/2} \prod_{j=1}^m 2^{-|\mu_j-\nu_j|(1/2-1/\alpha)(\tau_2/q)}. \tag{3.11}$$

Из неравенств (3.8) и (3.11) получим

$$I_1^{\tau_2} \leqslant C \sum_{\bar{0}\leqslant\bar{s}(1)\leqslant\bar{n}} \dots \sum_{\bar{0}\leqslant\bar{s}(M)\leqslant\bar{n}} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant M} \Big[\Big(\prod_{l=1}^m 2^{s_l(i)(1/p-1/q)\tau_2}\|\delta_{\bar{s}(i)}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}$$

$$\times \prod_{l=1}^m 2^{s_l(j)(1/p-1/q)\tau_2}\|\delta_{\bar{s}(j)}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/2} \prod_{l=1}^m 2^{-|s_l(i)-s_l(j)|(1/2-1/\alpha)(\tau_2/q)}\Big]^{1/\theta}. \tag{3.12}$$

Теперь, пользуясь формулой (3.7), будем иметь

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant M} \Big[\Big(\prod_{l=1}^m 2^{s_l(i)(1/p-1/q)\tau_2}\|\delta_{\bar{s}(i)}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1} \prod_{l=1}^m 2^{s_l(j)(1/p-1/q)\tau_2}\|\delta_{\bar{s}(j)}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/2}$$

$$\times \prod_{l=1}^m 2^{-|s_l(i)-s_l(j)|(1/2-1/\alpha)(\tau_2/q)}\Big]^{1/\theta}$$

$$= \prod_{i=1}^M\Big(\prod_{l=1}^m 2^{s_l(i)(1/p-1/q)\tau_2}\|\delta_{\bar{s}(i)}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/M} \prod_{i=1}^M\prod_{l=1}^m 2^{-|s_l(i)-s_l(j)|(1/2-1/\alpha)\frac{1}{2\theta}}.$$

Учитывая это равенство и пользуясь неравенством Гельдера с показателем $M > 1$, из (3.12) получим

$$I_1^{\tau_2} \leqslant C \sum_{\bar 0\leqslant \bar s(1)\leqslant \bar n} \dots \sum_{\bar 0\leqslant \bar s(M)\leqslant \bar n} \prod_{i=1}^{M}\Big(\prod_{l=1}^{m} 2^{s_l(i)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\tau_2}\|\delta_{\bar s(i)}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}\Big)^{1/M} \prod_{i=1}^{M}\prod_{l=1}^{m} 2^{-|s_l(i)-s_l(j)|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{2\theta}}$$

$$\leqslant C\prod_{i=1}^{M}\Big(\sum_{\bar 0\leqslant \bar s(1)\leqslant \bar n} \dots \sum_{\bar 0\leqslant \bar s(M)\leqslant \bar n} \prod_{l=1}^{m} 2^{s_l(i)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\tau_2}\|\delta_{\bar s(i)}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \prod_{i=1}^{M}\prod_{l=1}^{m} 2^{-|s_l(i)-s_l(j)|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})\frac{1}{M-1}}\Big)^{1/M}$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\dots\sum_{k_m=-\infty}^{+\infty}\prod_{l=1}^{m}2^{-|k_l|(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha})}\Big)^{1/(M-1)} \sum_{\bar 0\leqslant \bar s\leqslant \bar n}\prod_{l=1}^{m}2^{s_l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\tau_2}\|\delta_{\bar s}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}.$$

Так как $1/2-1/\alpha>0$, то ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^{-|k|(1/2-1/\alpha)}$ сходится. Поэтому из предыдущего неравенства выводим

$$I_1^{\tau_2} \leqslant C\sum_{\bar 0\leqslant \bar s\leqslant \bar n}\prod_{l=1}^{m}2^{s_l(1/p-1/q)\tau_2}\|\delta_{\bar s}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}$$

для функции $f\in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$. В этом неравенстве, переходя к пределу при $n_j\to\infty$, $j=1,\dots m$, и учитывая условие (3.1), получим утверждения теоремы 3.1. □

Теорема 3.2. *Пусть* $1<q<\lambda<\infty$, $1<\tau<\infty$. *Если функция* $f\in L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$, *то*

$$\|f\|_{q,\tau} \geqslant C\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{l=1}^{m}2^{s_l(1/\lambda-1/q)\tau}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\lambda}^{\tau}\Big)^{1/\tau}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эта теорема доказывается, как в [14, лемма 3.1], с использованием соотношения (1.14) и теоремы 3.1. □

Следствие 3.1. *Пусть* $1<q<\infty$, $1<\tau<\infty$, $1=\gamma_1=\ldots=\gamma_\nu<\gamma_{\nu+1}\leqslant\ldots\gamma_m$, $\overline{\gamma}=(\gamma_1,\dots\gamma_m)$. *Тогда для ядра Дирихле*

$$D_{n,\gamma}(\overline{x})=\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\leqslant n}\sum_{\overline{k}\in\rho(\overline{s})}e^{i\langle\overline{k},2\pi\overline{x}\rangle}$$

выполняется соотношение $\|D_{n,\gamma}\|_{q,\tau}\asymp 2^{n(1-1/q)}n^{(m-1)/\tau}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем число $p_0\in(1,q)$. Тогда при $\tau_1=p=p_0$ и $\tau_2=\tau$ по теореме 3.1 имеем

$$\|D_{n,\gamma}\|_{q,\tau}\leqslant C\Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\leqslant n}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(1/p_0-1/q)\tau}\|\delta_{\overline{s}}(D_{n,\gamma})\|_{p_0}^{\tau}\Big)^{1/\tau}. \tag{3.13}$$

Теперь в силу соотношения (2.10) и рассуждая, как в доказательстве [14, лемма Г], из (3.13) получим

$$\|D_{n,\gamma}\|_{q,\tau}\leqslant C\Big(\sum_{\overline{s}\leqslant\overline{n}}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(1-1/q)\tau}\Big)^{1/\tau}\leqslant C2^{n(1-1/q)}n^{(m-1)/\tau}.$$

Докажем противоположное неравенство. Пользуясь теоремой 3.2, соотношением (2.10) и [14, лемма Г], имеем

$$\|D_{n,\gamma}\|_{q,\tau}\geqslant C\Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\leqslant n}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(1/\lambda-1/q)\tau}\|\delta_{\overline{s}}(D_{n,\gamma})\|_{\lambda}^{\tau}\Big)^{1/\tau}$$

$$C\Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\leqslant n}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(1-1/q)\tau}\Big)^{1/\tau}\geqslant C2^{n(1-1/q)}n^{(m-1)/\tau}.$$ □

Теорема 3.3. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $1/p - 1/q < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m$, $\nu = 1, \ldots, m$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тогда справедливо соотношение*

$$E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{q,\tau_2} \asymp 2^{-n(r_1+1/q-1/p)}n^{(\nu-1)(1/\tau_2-1/\theta)_+}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.14}$$

где $a_+ = \max\{0, a\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\tau_2 < \theta < \infty$, то применяя неравенство Гельдера, а при $\theta \leqslant \tau_2$ применяя неравенство Йенсена, и учитывая, что $1/p - 1/q < r_j,\ j = 1, \ldots m$, нетрудно убедиться, что (см. доказательства неравенств (2.15) и (2.16))

$$\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\prod_{l=1}^m 2^{s_l(1/p-1/q)\tau_2}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2} \leqslant C\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta}.$$

Поэтому в силу теоремы 3.1 имеем $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B \subset L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

Пусть $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta}B$. Тогда по свойству наилучшего приближения и неравенству (3.2) имеем

$$E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{q,\tau_2} \leqslant \|f - S_n^{(\overline{\gamma})}(f)\|_{q,\tau_2} \leqslant \Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\geqslant n}\prod_{l=1}^m 2^{s_l(1/p-1/q)\tau_2}\big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}. \tag{3.15}$$

Если $\tau_2 < \theta$, то положим $\beta = \theta/\tau_2 > 1, 1/\beta + 1/\beta' = 1$ и, применяя неравенство Гельдера и пользуясь [14, леммой B], при $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m'),\ \gamma_j' = (r_j + 1/q - 1/p)/(r_1 + 1/q - 1/p),\ j = 1, \ldots, m$, получим

$$\begin{aligned} E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{q,\tau_2} &\leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta}\Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\geqslant n}2^{-\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\tau_2\beta'}\prod_{l=1}^m 2^{s_l(1/p-1/q)\tau_2\beta'}\Big)^{1/\tau_2\beta'} \\ &\leqslant C\Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta}2^{-n(r_1+1/q-1/p)}(n+1)^{(m-1)(1/\tau_2-1/\theta)}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Если $\theta \leqslant \tau_2$, то, применяя к правой части неравенства (3.15)неравенство Йенсена (см. [4, гл. 3 разд. 3, с. 125, лемма 3.3.3]), имеем

$$E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{q,\tau_2} \leqslant \Big(\sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta}2^{-n(r_1+1/q-1/p)}. \tag{3.17}$$

Из неравенств (3.16) и (3.17) следует оценка

$$E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{q,\tau_1,\theta}B)_{q,\tau_2} \leqslant C2^{-n(r_1+1/q-1/p)}n^{(\nu-1)(1/\tau_2-1/\theta)_+}$$

в случае $1 \leqslant \theta < \infty$.

Если $\theta = \infty$, то, пользуясь [14, лемма B], из (3.15) получим

$$\begin{aligned} E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{q,\tau_1,\theta}B)_{q,\tau_2} &\leqslant C\Big(\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\geqslant n}\prod_{l=1}^m 2^{-s_l(r_1+1/q-1/p)\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}\sup_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\overline{s}}(f)\big\|_{p,\tau_1} \\ &\leqslant C2^{-n(r_1+1/q-1/p)}n^{(\nu-1)/\tau_2} \end{aligned}$$

для функций $f \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{q,\tau_1,\theta}B$. Этим оценка сверху доказана и в случае $\theta = \infty$.

Теперь докажем оценку снизу. Если $\theta \leqslant \tau_2$, то рассмотрим функцию

$$f_1(2\pi\overline{x}) = 2^{-n(r_1+1-1/p)}\sum_{\overline{k}\in\rho(\tilde{\overline{s}})}e^{i\langle\overline{k},2\pi\overline{x}\rangle},$$

где $\tilde{\overline{s}} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ один из векторов, удовлетворяющих условию теоремы, такой что $\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n$. Тогда функция $F_1 = C_1^{-1} f_1 \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta} B$ (см. доказательство теоремы 2.1).

Теперь, пользуясь соотношением (2.10), нетрудно убедиться, что

$$E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta} B)_{q,\tau_2} \geqslant E_n^{(\overline{\gamma})}(F_1)_{q,\tau_2} = C_1^{-1} \|f_1\|_{q,\tau_2} \geqslant C 2^{-n(r_1+1/q-1/p)}.$$

в случае $\theta \leqslant \tau_2$.

Пусть $\tau_2 < \theta$. Рассмотрим функцию

$$f_2(2\pi\overline{x}) = n^{-(m-1)/\theta} 2^{-n(r_1+1-1/p)} \sum_{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n} \sum_{\overline{k} \in \rho(\overline{s})} e^{i\langle \overline{k}, 2\pi\overline{x} \rangle}.$$

Тогда функция $F_2 = C_2^{-1} f_2 \in \mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta} B$. Таким образом,

$$E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta} B)_{q,\tau_2} \geqslant E_n^{(\overline{\gamma})}(F_2)_{q,\tau_2} = C_2^{-1} \|f_2\|_{q,\tau_2}. \tag{3.18}$$

Далее, учитывая оценку нормы ядра Дирихле по гиперболическому кресту (см. следствие 3.1), имеем

$$\|f_2\|_{q,\tau_2} \geqslant C n^{-(m-1)/\theta} 2^{-n(r_1+1-1/p)} \| \sum_{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle = n} \sum_{\overline{k} \in \rho(\overline{s})} e^{i\langle \overline{k}, 2\pi\overline{x} \rangle} \|_{q,\tau_2} \geqslant C 2^{-n(r_1+1/q-1/p)} n^{(m-1)(1/\tau_2 - 1/\theta)}.$$

Следовательно, учитывая, что $\nu < m$, из неравенства (3.18) получим

$$E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta} B)_{q,\tau_2} \geqslant C 2^{-n(r_1+1/q-1/p)} n^{(m-1)(1/\tau_2-1/\theta)} \geqslant C 2^{-n(r_1+1/q-1/p)} n^{(\nu-1)(1/\tau_2-1/\theta)}$$

в случае $\tau_2 < \theta$.

Если $\theta = \infty$, тоб рассматривая функцию f_{21} (см. доказательство теоремы 2.1) и пользуясь теоремой 3.2, получим оценку снизу величины $E_n^{(\overline{\gamma})}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta} B)_{q,\tau_2}$. $\square$

Заключение

Сравним полученные здесь некоторые результаты (а именно, теоремы 2.1, 2.2, 3.3) с известными результатами, имеющими непосредственное отношение к теме исследований данной работы.

1. Из теоремы 2.1 следуют теорема 2.3 из [14] при $\tau = p$ в случае $\theta = \infty$ и теорема 1 из статьи [15] при $\tau = p$, $1 < \tau \leqslant 2$, в случае $1 \leqslant \theta < \infty$; в отличие от указанных теорем из работ [14; 15] в теореме 2.1 порядок величины $E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\theta} B)_{p,\tau}$ зависит от параметра τ пространства Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$.

В теореме 2.2 порядок величины $E_n^{(\overline{\gamma}')}(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta} B)_{p,\tau_2}$ зависит от параметров τ_1, τ_2 пространства Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Это еще одно отличие от оценок в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$.

2. При $\tau_1 = p$ и $\tau_2 = q$ из теоремы 3.3 получим теорему 2.2 из [14] и теорему 2 из статьи [15] в случаях $\theta = \infty$ и $1 \leqslant \theta < \infty$ соответственно.

3. Теоремы 2.1, 2.2, 3.3 могут быть полезными для нахождения порядков наилучшего n-членного приближения тригонометрического поперечника и линейного поперечника класса $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta} B$ пространства Лоренца $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

В работе [18] изучен порядок тригонометрического поперечника класса Никольского—Бесова в анизотропном пространстве Лоренца $L_{\overline{q},\tau}(\mathbb{T}^m)$. Чтобы отличить анизотропное пространство $L_{\overline{q},\tau}(\mathbb{T}^m)$ от рассматриваемого нами пространства Лоренца $L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$, обозначим его через $L^*_{\overline{q},\tau}(\mathbb{T}^m)$ и в случае $q_1 = \ldots q_m = q$ будем писать $L^*_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$ вместо $L^*_{\overline{q},\tau}(\mathbb{T}^m)$.

Известно, что если $q < \tau$, то $L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m) \subset L^*_{\overline{q},\tau}(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_{L^*_{\overline{q},\tau}} \leqslant C\|f\|_{q,\tau}$, где $\|f\|_{L^*_{\overline{q},\tau}}$ — норма пространства $L^*_{\overline{q},\tau}(\mathbb{T}^m)$ (см. [25]).

Поэтому из теоремы 1 статьи [18] для тригонометрического поперечника $d_M(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{L^*_{\overline{q},\tau_2}}$ класса $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B$ в пространстве $L^*_{\overline{q},\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ получим оценку

$$d_M(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{L^*_{\overline{q},\tau_2}} \leqslant CM^{-(r_1-1/p+1/2)}(\log M)^{(\nu-1)(r_1-1/p+1/2)+(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}$$

в случае $1 < p < 2 < q < \dfrac{p}{p-1} = p^{'}$, $p < \tau_1$.

Выбирая натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, из теоремы 3.3 получим

$$E^{\overline{\gamma}}_M(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{q,\tau_2} \asymp M^{-(r_1-1/p+1/q)}(\log M)^{(\nu-1)(r_1-1/p+1/q)+(\nu-1)(1/\tau_2-1/\theta)_+}$$

при $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$.

Теперь, сравнивая последние две оценки видим, что порядок величины $d_M(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{L^*_{\overline{q},\tau_2}}$ лучше, чем порядок $E^{\overline{\gamma}}_M(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau_1,\theta}B)_{q,\tau_2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Москва: Мир, 1974. 333 с.
2. **Коляда В.И.** Перестановки функций и теоремы вложения // Усп. мат. наук. 1989. Т.44, № 4. С. 61–95.
3. **Edmunds D.E., Evans W.D.** Hardy operators, function spaces and embedding. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 328 p.
4. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
5. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.
6. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-ата: Наука, 1976. 224 с.
7. **Бабенко К.И.** О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрические многочленами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 5. С. 982–985.
8. **Теляковский С.А.** Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. 1964. Т. 63, № 3. С. 426-444.
9. **Митягин Б.С.** Приближение функций в пространствах L^p и C на торе // Мат. сб. 1962. Т. 58, № 4. С. 397–414 .
10. **Бугров Я.С.** Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной // Мат. сб. 1964. Т. 64, № 3. С. 410–418.
11. **Галеев Э.М.** Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике $\tilde{L}_p$ // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 4. С. 251–252.
12. **Галеев Э.М.** Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Мат. зам. 1978. Т. 23, № 2. С. 197 –212.
13. **Темляков В.Н.** Приближение периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью // Мат. сб. 1980. Т. 113, № 1. С. 65–80.
14. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 3–112.
15. **Романюк А.С.** Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 10. С. 1398–1408.
16. **Романюк А.С.** Об оценках аппроксимативных характеристик классов Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. 1997. Т. 49. С. 1250–1268.
17. **Schmeisser H.-J., Sickel W.** Spaces of functions of mixed smoothness and approximation from hyperbolic crosses // J. Approx. Th. 2004. Vol. 128. P. 115–150.
18. **Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Y.** On the order of the trigonometric diameter of the anisotropic Nokol'skii–Besov class in the metric anisotropic Lorentz spaces // Anal. Math. 2019. Vol. 45, № 2. P. 237–247.
19. **Тихомиров В.М.** Теория приближений. Современные проблемы математики. Москва, 1987. С. 103–270.

20. **Dinh Dung , Temlyakov V.N., Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation. / ed. S. Tikhonov. Cham: Birkhäuser, 2018. 222 p. (Ser. Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona).
21. **Temlyakov V.** Multivariate approximation. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. 551 p.
22. **Kokilashvili V., Yildirir Y.E.** On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces // J. Func. Spaces Applic. 2010. Vol. 8, no. 1. P. 67–86.
23. **Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.** Интерполяция линейных операторов. Москва: Наука, 1978. 400 с.
24. **Акишев Г.** О порядках M-членных приближений классов функций симметричного пространства // Мат. жур. 2014. Т. 14, № 4. С. 46–71.
25. **Яценко А.А.** Итеративные перестановки функций и пространства Лоренца // Изв. вузов. Математика. 1998. № 5. С. 73–77.

Поступила 09.09.2019
После доработки 20.05.2020
Принята к публикации 25.05.2020

Акишев Габдолла
д-р физ.-мат. наук, профессор
Евразийский Национальный университет имени Л. Н. Гумилева
г. Нур-Султан;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: akishev_g@mail.ru

REFERENCES

1. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9781400883899 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh.* Moscow: Mir Publ., 1974, 333 p.
2. Kolyada V.I. Rearrangements of functions and embedding theorems. *Russian Math. Surveys.* 1989. Vol. 44, no. 5. P. 73–117.
3. Edmunds D.E., Evans W.D. *Hardy operators, function spaces and embedding.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.
4. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems.* Moscow: Nauka, 1977.
5. Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. Spaces of functions of mixed smoothness from the decomposition point of view. *Proc. Stekov Inst. Math.*, 1989. Vol. 187. P. 143–161.
6. Amanov T.I. *Prostranstva differentsiruemykh funktsii s dominiruyushchei smeshannoi proizvodnoi* [Spaces of differentiable functions with dominant mixed derivative], Alma-Ata:Nauka, 1976. 224 p.
7. Babenko K.I. Approximation by trigonometric polynomials in a certain class of periodic functions of several variables. *Soviet Math. Dokl.*, 1960, vol. 1, pp. 672–675.
8. Telyakovskii S.A. Some estimates for trigonometric series with quasiconvex coefficients. *Mat. Sb.*, 1964, vol. 63, no. 3, pp. 426–444 (in Russian).
9. Mityagin B.S. Approximation of functions in the spaces L_p and C on the torus. *Mat. Sb.* 1962, vol. 58, no. 4, pp. 397–414 (in Russian).
10. Bugrov Ya.S. Approximation of function classes with the dominant mixed derivative. *Mat. Sb.* 1964, vol. 64, no. 3, pp. 410–418 (in Russian).
11. Galeev E.M. Approximation of some classes of periodic functions of several variables by Fourier sums in the metric of $\tilde{L}_p$. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 1977, vol. 32, no. 4, pp. 251–252 (in Russian).
12. Galeev E.M. Approximation by of Fourier sums of classes of functions with bounded derivatives. *Mat. Zam.*, vol. 23, no. 2, pp. 197–212 (in Russian).
13. Temlyakov V.N. Approximation of periodic functions of several variables with bounded mixed differences. *Mat. Sb.*, 1980, vol. 113, no. 1, pp. 65–80.
14. Temlyakov V.N. Approximation of functions with bounded mixed derivative. *Tr. Mat. Inst. Steklov.*, 1986, vol. 178, pp. 3–112 (in Russian).
15. Romanyuk A.S. Approximation of the Besov classes of periodic functions of several variables in the space L_q. *Ukrain . Mat. Zh.*, 1991, vol. 43, pp. 1297–1306. doi: 10.1007/BF01061817 .

16. Romanyuk A.S. On estimates of approximation characteristics of the Besov classes of periodic functions of many variables. *Ukrain . Mat. Zh.*, 1997, vol. 499, pp. 1409–1422. doi: 10.1007/BF02487348 .
17. Schmeisser H.-J., Sickel W. Spaces of functions of mixed smoothness and approximation from hyperbolic crosses. *J. Approx. Th.*, 2004, vol. 128, no. 2, pp. 115–150. doi: 10.1016/j.jat.2004.04.007 .
18. Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Y. On the order of the trigonometric diameter of the anisotropic Nokol'skii-Besov class in the metric anisotropic Lorentz spaces. *Anal. Math.*, 2019, vol. 45, no. 2, pp. 237–247. doi: 10.31489/2020M1/17-26 .
19. Tikhomirov V.M., Approximation theory. *Current problems in mathematics. Fundamental directions*, vol. 14, Moscow, 1987, pp. 103–260 (in Russian). [Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1987, 41-02].
20. Dinh Dung , Temlyakov V.N., Ullrich T. *Hyperbolic cross approximation.* Ser. Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona, Cham: Birkhäuser, 2018, 222 p.
21. Temlyakov V. *Multivariate approximation.* Cambridge: Cambridge University Press, 2018, 551 p.
22. Kokilashvili V., Yildirir Y.E. On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces. *Jour. Func. Spaces Applic.*, 2010, vol. 8, no. 1, pp. 67–86.
23. Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. *Interpolation of linear operators.* Ser. Translat. Math. Monographs, vol. 54, Providence, R.I.: American Math. Soc., 1982, 375 p. Original Russian text published in Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. *Interpolyatsiya lineinykh operatorov*, Moscow: Nauka Publ., 1978, 400 p.
24. Akishev G. On the orders M-terms approximations of classes of functions of the symmetrical space. *Mat. Zh.*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 44–71 (in Russian).
25. Yatsenko A.A. Iterative rearrangements of functions, and Lorentz spaces. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1998, vol. 42, no. 4, pp. 71–75.

Received September 9, 2019
Revised May 20, 2020
Accepted May 25, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Gabdolla Akishev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur–Sultan, 100008 Republic Kazakhstan; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: akishev_g@mail.ru .

Cite this article as: G. Akishev. Estimates for the best approximations of functions from the Nikol's-kii–Besov class in the Lorentz space by trigonometric polynomials, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 5–27 .