ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 519.176

ДВУДОЛЬНО-ПОРОГОВЫЕ ГРАФЫ

В. А. Баранский, Т. А. Сеньчонок

Тройка (x, v, y) различных вершин графа $G = (V, E)$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$ называется *повышающей*, если $\deg(x) \leq \deg(y)$, и *понижающей*, если $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$. Преобразование φ графа G такое, что $\varphi(G) = G - xv + vy$, называется *вращением ребра* в графе G *вокруг вершины* v, отвечающим тройке (x, v, y). Вращение ребра в графе G, отвечающее тройке (x, v, y), называется *повышающим*, если тройка (x, v, y) повышающая, и *понижающим*, если тройка (x, v, y) понижающая. Вращение φ ребра в графе G является повышающим тогда и только тогда, когда обратное к нему вращение ребра в графе $\varphi(G)$ является понижающим. Двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ будем называть *двудольно-пороговым графом*, если он не имеет повышающих троек таких, что $x, y \in V_1$, $v \in V_2$ или $x, y \in V_2$, $v \in V_1$. В работе найдены различные свойства, характеризующие двудольно-пороговые графы. В частности, каждый такой граф (V_1, E, V_2) является подграфом порогового графа $(K(V_1), E, V_2)$, где $K(V_1)$ — полный граф на множестве вершин V_1. Отметим, что граф является пороговым тогда и только тогда, когда он не имеет повышающих троек вершин. Любой двудольный граф может быть получен из двудольно-порогового графа с помощью понижающих вращений ребер. С помощью полученных результатов и критерия Кохнерта графичности разбиения мы приводим новое достаточно простое доказательство известной теоремы Гейла и Райзера о представлении двух разбиений степенными разбиениями долей двудольного графа.

Ключевые слова: разбиение, пороговый граф, двудольный граф, диаграмма Ферре.

V. A. Baransky, T. A. Senchonok. Bipartite threshold graphs.

A triple of distinct vertices (x, v, y) in a graph $G = (V, E)$ such that $xv \in E$ and $vy \notin E$ is called *lifting* if $\deg(x) \leq \deg(y)$ and *lowering* if $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$. A transformation φ of a graph G that replaces G with $\varphi(G) = G - xv + vy$ is called an *edge rotation* corresponding to a triple of vertices (x, v, y). For a lifting (lowering) triple (x, v, y), the corresponding edge rotation is called *lifting* (*lowering*). An edge rotation in a graph G is lifting if and only if its inverse in the graph $\varphi(G)$ is lowering. A bipartite graph $H = (V_1, E, V_2)$ is called a *bipartite threshold graph* if it has no lifting triples such that $x, y \in V_1$ and $v \in V_2$ or $x, y \in V_2$ and $v \in V_1$. The aim of paper is to give some characteristic properties of bipartite threshold graphs. In particular, every such graph (V_1, E, V_2) is embedded in the threshold graph $(K(V_1), E, V_2)$, where $K(V_1)$ is the complete graph on the vertex set V_1. Note that a graph is a threshold graph if and only if it has no lifting triples of vertices. Every bipartite graph can be obtained from a bipartite threshold graph by means of lowering edge rotations. Using the obtained results and Kohnert's criterion for a partition to be graphical, we give a new simple proof of the well-known Gale–Ryser theorem on the representation of two partitions by degree partitions of the parts in a bipartite graph.

Keywords: integer partition, threshold graph, bipartite graph, Ferrer's diagram.

MSC: 05C35

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-56-67

1. Введение

Далее под графом мы будем всегда понимать обыкновенный граф, т. е. граф без петель и кратных ребер, и будем использовать терминологию, принятую в [1].

Под *разбиением* (см. [2]) мы будем понимать последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ целых неотрицательных чисел, которая является невозрастающей и содержит конечное число ненулевых компонент. Через $\mathrm{sum}(\lambda)$ будем обозначать сумму всех компонент разбиения λ и называть ее *весом* разбиения λ. *Длиной* $l(\lambda)$ разбиения λ будем называть число его ненулевых компонент. Для удобства разбиение λ иногда будем записывать в виде $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$, где $t \geq l(\lambda)$, т. е. будем опускать нули, начиная с некоторой нулевой компоненты.

Через NPL будем обозначать множество всех разбиений, а через $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, — множество всех разбиений λ таких, что $\mathrm{sum}(\lambda) = m$. *Отношение доминирования* $\geq$ на множестве NPL и на множествах вида $NPL(m)$ задается следующим образом. Выполняется $\lambda \leq \mu$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 & \leq & \mu_1, \\ \lambda_1+\lambda_2 & \leq & \mu_1+\mu_2, \\ & \dots & \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_t & \leq & \mu_1+\mu_2+\dots+\mu_t, \\ & \dots & \end{array}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, т. е. префиксные суммы разбиения λ не превосходят соответствующих префиксных сумм разбиения μ.

Теория разбиений имеет давнюю историю и является одним из активно развивающихся направлений комбинаторики. Продолжаются исследования по перечислению графических разбиений. Во введении к работе [3] приведен полезный обзор статей по проблеме перечисления графических разбиений. Изучаются реализации графических разбиений и совершенствуются алгоритмы построения всех реализаций (см., например, [4]). Во введении к работе [5] приведен обзор статей, посвященных обобщениям разбиений, обобщенным решеткам разбиений и дискретным динамическим системам.

В данной работе мы будем исследовать двудольные графы и отвечающие им пары разбиений. Приведем необходимые определения и обозначения.

Определим элементарные преобразования разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ [6; 7]. Эти преобразования будут двух типов.

Пусть для натуральных чисел i, j таких, что $1 \leq i < j \leq l(\lambda) + 1 = t$, выполняются следующие неравенства:

1) $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$;
2) $\lambda_{j-1} \geq \lambda_j + 1$;
3) $\lambda_i \geq 2 + \lambda_j$.

Будем говорить, что разбиение $\eta = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_t)$ получено из разбиения λ с помощью *элементарного преобразования первого типа* (или *перекидывания блока*). Отметим, что разбиение η отличается от разбиения λ только на двух компонентах с номерами i и j. Условия 1) и 2) обеспечивают тот факт, что после применения элементарного преобразования снова получается разбиение. Отметим, что элементарные преобразования первого типа сохраняют вес разбиения.

Пусть для натурального числа i такого, что $1 \leq i \leq l(\lambda)$, выполняется условие $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$. Будем говорить, что разбиение $\eta = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots)$ получено из разбиения λ с помощью *элементарного преобразования второго типа* (или *удаления блока*). Ясно, что элементарные преобразования второго типа уменьшают вес разбиения на 1.

В [7] показано, что в NPL выполняется $\lambda \leq \mu$ тогда и только тогда, когда разбиение λ можно получить из разбиения μ с помощью последовательного применения конечного числа элементарных преобразований.

Для натурального числа n конечную невозрастающую последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ целых неотрицательных чисел будем называть *n-последовательностью.* Такая n-последовательность называется *графической*, если существует обыкновенный граф G на n вершинах, для которого $\deg(v_1) = \lambda_1, \dots, \deg(v_n) = \lambda_n$, где $v_1, \dots, v_n$ — последовательность всех его вершин; граф G называют *реализацией* n-последовательности λ и говорят, что λ *реализуется* графом G.

Разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ называется *графическим*, если графической является последовательность $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, где $l = l(\lambda)$. Нетрудно заметить, что разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ является графическим тогда и только тогда, когда графической будет любая n-последовательность $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, для которой $n \geq l(\lambda)$.

Разбиения принято изображать в виде диаграмм Ферре, состоящих из конечного набора квадратных блоков одинакового размера, составляющих “ступенчатую” фигуру (см., например, рис. 1). На рис. 1 представлена диаграмма Ферре разбиения $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ длины 8 и веса 26.

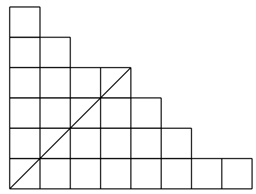

Рис. 1

Для произвольного разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ определим его *ранг Дерфи* $r(\lambda)$ (или просто *ранг*), полагая $r(\lambda) = \max\{i | \lambda_i \geq i\}$. Ранг $r = r(\lambda)$ разбиения λ равен числу блоков на главной диагонали его диаграммы Ферре (см. рис. 1). Максимальный квадрат, составленный из блоков диаграммы Ферре и симметричный относительно главной диагонали диаграммы Ферре, называют *квадратом Дерфи* разбиения λ (на рис. 1 указана диагональ квадрата Дерфи, здесь $r = 4$).

Головой $\mathrm{hd}(\lambda)$ разбиения λ называется разбиение, полученное уменьшением первых r компонент разбиения λ на одно и то же число $r - 1$ и обнулением всех компонент с номерами $r + 1, r + 2, \dots$. Отметим, что верхняя строка квадрата Дерфи всегда входит в диаграмму Ферре головы $\mathrm{hd}(\lambda)$ в качестве первой строки.

Хвостом $\mathrm{tl}(\lambda)$ разбиения λ называется разбиение, для которого диаграмма Ферре получается из диаграммы Ферре разбиения λ удалением первых $r = r(\lambda)$ столбцов и последующим считыванием компонент по строкам, т. е. заменой строк последовательно на столбцы при продвижении снизу вверх.

На рис. 1 для разбиения $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ имеем $r = r(\lambda) = 4$, $\mathrm{hd}(\lambda) = (3, 2, 1, 1)$ и $\mathrm{tl}(\lambda) = (4, 2, 1)$.

Отметим, что всегда $l(\mathrm{hd}(\lambda)) = r(\lambda)$, $l(\lambda) - r$ равно величине первой компоненты хвоста $\mathrm{tl}(\lambda)$ и $l(\mathrm{tl}(\lambda)) = \lambda_{r+1}$. Разбиение $\mathrm{hd}(\lambda)$ “считывается” по столбцам, “урезанным” на число $r - 1$, слева направо, а разбиение $\mathrm{tl}(\lambda)$ “считываются” по строкам, “урезанным” на число r, снизу вверх.

Пусть G — произвольный граф, $v_1, \dots, v_n$ — множество всех его вершин и $\deg(v_1) = \lambda_1 \geq \deg(v_2) = \lambda_2 \geq \dots \geq \deg(v_n) = \lambda_n$. Разбиение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots)$ будем называть *графическим разбиением, отвечающим графу* G, и будем обозначать его через $\mathrm{gpt}(G)$. Граф G называют *реализацией* графического разбиения λ.

Добавление к графу или удаление из него изолированных вершин не меняет отвечающего ему разбиения, т. е. реализации графических разбиений можно исследовать с точностью до изолированных вершин. В силу леммы о рукопожатиях графическое разбиение имеет четный вес, который равен удвоенному числу ребер в каждой из его реализаций.

В [8] указан критерий графичности разбиения, который мы приведем в терминологии, предложенной в ранее опубликованной нами работе (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 1–10).

Разбиение λ *четного веса является графическим тогда и только тогда, когда* $\mathrm{hd}(\lambda) \leq \mathrm{tl}(\lambda)$.

На рис. 1 для разбиения $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ выполняется $\mathrm{hd}(\lambda) = (3, 2, 1, 1) \leq \mathrm{tl}(\lambda) = (4, 2, 1)$, так как здесь $\mathrm{hd}(\lambda)$ можно получить из $\mathrm{tl}(\lambda)$ с помощью одного элементарного преобразования первого типа, состоящего в перекидывании блока из первой компоненты в четвертую. Следовательно, разбиение $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ является графическим.

Несложно установить, что указанный критерий Кохнерта графичности разбиения эквивалентен известному критерию Эрдеша — Галлаи [9] графичности n-последовательности. Прямое доказательство критерия Кохнерта, опирающееся на наши предшествующие результаты и не использующее [9], приведено в [10].

Пусть (x, v, y) — тройка различных вершин графа $G = (V, E)$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$. Такую тройку назовем

1) повышающей, если $\deg(x) \leq \deg(y)$;

2) понижающей, если $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$;

3) сохраняющей, если $\deg(x) = 1 + \deg(y)$.

Рассмотрим преобразование φ графа G такое, что $\varphi(G) = G - xv + vy$, т. е. из G сначала удаляется ребро xv, а затем добавляется ребро vy (см. рис. 2):

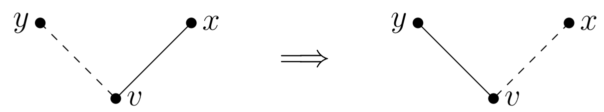

Рис. 2

Преобразование φ называется *вращением ребра* (в графе G *вокруг вершины* v), отвечающим тройке (x, v, y). Вращение ребра в графе $\varphi(G)$, отвечающее тройке (y, v, x) называется *обратным вращением* ребра для вращения φ.

Вращение ребра в графе G, отвечающее тройке (x, v, y), называется

1) *повышающим*, если тройка (x, v, y) повышающая;

2) *понижающим*, если тройка (x, v, y) понижающая;

3) *сохраняющим*, если тройка (x, v, y) сохраняющая.

Отметим, что случаи, когда $\deg(x) = 1$ или $\deg(y) = 0$, будем рассматривать как допустимые, т. е. после вращения ребра может возникнуть изолированная вершина или вращение ребра произойдет в графе G с добавлением новой изолированной вершины.

Из определений следует, что вращение ребра в графе является повышающим тогда и только тогда, когда обратное к нему вращение является понижающим.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_n)$ — графическое разбиение, $1 \leq i < j \leq n$, и разбиение $\eta = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_j + 1, \ldots, \lambda_n)$ получено из него с помощью одного элементарного преобразования первого типа. Покажем, что разбиение η также является графическим. Действительно, пусть $G = (V, E)$ — реализация разбиения λ, $\deg(x) = \lambda_i$ и $\deg(y) = \lambda_j$, где $x, y \in V$. Поскольку $\lambda_i > \lambda_j$, существует вершина $v \in V$ такая, что $xv \in E$, и $vy \notin E$. Пусть φ — понижающее вращение ребра, отвечающее тройке (x, v, y) в графе G. Тогда $\eta = \mathrm{gpt}(\varphi(G))$. Следовательно, разбиение η также является графическим.

Хорошо известно, что множество $NPL(2m)$ является решеткой относительно отношения доминирования (см., например, [7]). Поэтому в силу доказанного множество всех графических разбиений фиксированного веса $2m$, где m — натуральное число, образует порядковый идеал в решетке $NPL(2m), \leq$. Максимальные элементы этого порядкового идеала называют *максимальными графическими разбиениями* (веса $2m$).

Через (V_1, E, V_2) мы будем обозначать граф, имеющий две непересекающиеся непустые доли V_1, V_2 и множество ребер E, причем каждое ребро соединяет некоторую вершину из V_1 с некоторой вершиной из V_2. Такой граф, как обычно, будем называть *двудольным*, если E не пусто. Конечно, мы считаем, что $(V_1, E, V_2) = (V_2, E, V_1)$. Пусть G_1 и G_2 — два графа с множествами вершин V_1 и V_2, соответственно. Тогда через (G_1, E, G_2) будем обозначать объединение графов G_1 и G_2, дополненное множеством ребер E.

Граф G называется *пороговым* (см., например, [11]), если его множество вершин представимо в виде дизъюнктного объединения клики V_1 и антиклики V_2 (т. е. $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, V_1 порождает полный подграф $K(V_1)$ и V_2 — нулевой подграф $O(V_2)$ в G), а множество окрестностей в G вершин из V_2 образует цепь подмножеств множества V_1 относительно теоретико-множественного включения. Отметим, что случаи $V_1 = \varnothing$ или $V_2 = \varnothing$ допускаются, т. е. полные и нулевые графы являются пороговыми. Для порогового графа G множество всех ребер представимо в виде дизъюнктного объединения множества всех ребер полного подграфа $K(V_1)$ и множества E всех его ребер, соединяющих вершины из V_1 с вершинами из V_2. Таким образом, пороговый граф можно представить в виде $G = (K(V_1), E, O(V_2))$. Мы будем писать просто $G = (K(V_1), E, V_2)$. Граф $H = (V_1, E, V_2)$ будем называть *сэндвич-подграфом* порогового графа $G = (K(V_1), E, V_2)$. В тривиальных случаях, когда $V_1 = \varnothing$, или $V_2 = \varnothing$, или V_2 состоит из изолированных вершин, сэндвич-подграф H является пустым подграфом в G.

Из определения порогового графа следует, что добавление или удаление изолированных вершин не меняет свойство графа быть пороговым. Другие равносильные определения пороговых графов и их многочисленные свойства можно найти в монографии [11].

В ранее опубликованной нами и упомянутой выше статье было доказано, что

Граф является пороговым тогда и только тогда, когда он не содержит повышающих троек вершин.

С использованием этой теоремы также было доказано, что для произвольного разбиения λ четного веса следующие условия эквивалентны:

1) λ является максимальным графическим разбиением;

2) $\lambda = \mathrm{gpt}(G)$ для некоторого порогового графа G;

3) $\mathrm{hd}(\lambda) = \mathrm{tl}(\lambda)$.

Там же отмечено, что любое максимальное графическое разбиение имеет единственную реализацию с точностью до изоморфизма и изолированных вершин.

Пусть $G = (K(V_1), E, V_2)$ — пороговый граф и $H = (V_1, E, V_2)$ — его сэндвич-подграф. Тогда граф G не содержит повышающих троек вершин, и для любых $x, y \in V_1$ выполняются равенства $\deg_H(x) + t - 1 = \deg_G(x)$ и $\deg_H(y) + t - 1 = \deg_G(y)$, где $t = |V_1|$. Поэтому сэндвич-подграф $H = (V_1, E, V_2)$ не имеет повышающих троек вершин (x, v, y) вида

1) $x, y \in V_1$ и $v \in V_2$,

2) $x, y \in V_2$ и $v \in V_1$.

В произвольном двудольном графе (V_1, E, V_2) повышающие тройки вершин вида 1) будем называть *повышающими тройками первой доли* или, кратко, *повышающими V_1-тройками*, а вида 2) — *повышающими тройками второй доли* или, кратко, *повышающими V_2-тройками.*

Произвольный двудольный граф будем называть *двудольно-пороговым графом*, если он не имеет повышающих троек как первой, так и второй доли. Из данного определения и ранее указанного свойства пороговых графов следует, что сэндвич-подграф любого порогового графа является двудольно-пороговым графом.

Цель работы состоит в доказательстве теоремы 1 о различных характеризациях двудольно-пороговых графов, которые мы ввели как аналоги пороговых графов для класса двудольных графов. Кроме того, используя теорему 1, мы получаем новое достаточно простое и естественное доказательство известной теоремы Гейла — Райзера о двудольной реализации пары разбиений, а также в теореме 3 показываем, каким образом произвольный двудольный граф может быть получен естественным образом из двудольно-пороговых графов.

2. Доказательство основного результата

Рассмотрим теперь произвольный двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$. Через $N(v)$ будем обозначать окрестность любой его вершины v.

Лемма 1. *Если граф $H = (V_1, E, V_2)$ не имеет повышающих V_2-троек, то семейство окрестностей вершин из V_2 образует цепь подмножеств множества V_1 относительно теоретико-множественного включения.*

Доказательство. Достаточно установить, что для любых вершин $x, y \in V_2$ условие $\deg_H(x) \le \deg_H(y)$ эквивалентно условию $N(x) \subseteq N(y)$.

Из условия $N(x) \subseteq N(y)$ тривиально следует, что $\deg_H(x) \le \deg_H(y)$.

Обратно, предположим, что $\deg_H(x) \le \deg_H(y)$ для некоторых $x, y \in V_2$, и, от противного, предположим, что $N(x) \nsubseteq N(y)$. Тогда существует вершина $v \in V_1$ такая, что $v \in N(x)$ и $v \notin N(y)$. Поэтому в H имеется повышающая V_2-тройка (x, v, y). Пришли к противоречию. $\square$

Будем говорить, что граф $H = (V_1, E, V_2)$ содержит *двудольный* 4*-псевдоцикл* x_1, x_2, x_3, x_4, x_1, если $x_1, x_3 \in V_2$; $x_2, x_4 \in V_1$; $x_1x_2 \in E$; $x_2x_3 \notin E$; $x_3x_4 \in E$; $x_4x_1 \notin E$:

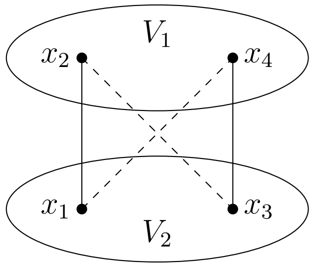

Рис. 3

Лемма 2. *Граф $H = (V_1, E, V_2)$ имеет повышающую V_1-тройку тогда и только тогда, когда он имеет двудольный 4-псевдоцикл.*

Доказательство. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 — это двудольный 4-псевдоцикл. Если $\deg_H(x_2) \le \deg_H(x_4)$, то (x_2, x_1, x_4) — повышающая V_1-тройка. Если же $\deg_H(x_4) \le \deg_H(x_2)$, то (x_4, x_3, x_2) — повышающая V_1-тройка.

Обратно, пусть (x_2, x_1, x_4) — повышающая V_1-тройка. Тогда $\deg_H(x_2) \le \deg_H(x_4)$. Если для любого ребра вида $ux_4 \in E$, где $u \in V_2$, выполняется $ux_2 \in E$, то, учитывая ребро x_1x_2, получаем $\deg_H(x_2) > \deg_H(x_4)$, что невозможно. Поэтому существует такая вершина $x_3 \in V_2$, что $x_3x_4 \in E$ и $x_3x_2 \notin E$. Теперь ясно, что x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 — двудольный 4-псевдоцикл. □

Пусть $H = (V_1, E, V_2)$ — ненулевой двудольный граф без изолированных вершин, $|V_1| = t$ и $|V_2| = s$. Упорядочим вершины в V_1 и V_2 таким образом, что (см. рис. 4)

$$V_1 = \{v_1, \dots, v_t\} \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \deg_H v_1 \ge \alpha_2 = \deg_H v_2 \ge \dots \ge \alpha_t = \deg_H v_t > 0;$$

$$V_2 = \{u_s, \dots, u_1\} \quad \text{и} \quad 0 < \beta_s = \deg_H u_s \le \beta_s - 1 = \deg_H u_s - 1 \le \dots \le \beta_1 = \deg_H u_1:$$

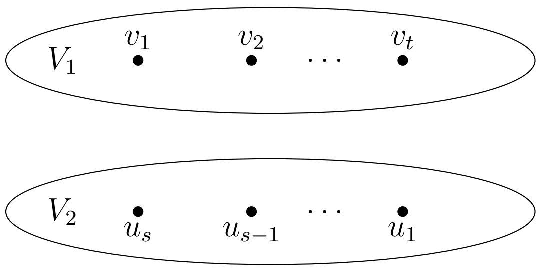

Рис. 4

Разбиения $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_s)$ обозначим, соответственно, через $\mathrm{dpt}_H(V_1)$ и $\mathrm{dpt}_H(V_2)$. Это *степенные разбиения долей* графа H, составленные из степеней вершин долей V_1 и V_2, соответственно, в неубывающем порядке и дополненные бесконечными последовательностями из нулей (степенные разбиения долей двудольных графов с изолированными вершинами определим аналогичным образом и будем использовать для них такие же обозначения).

Вложим теперь граф H в граф $\widehat{H} = (K(V_1), E, V_2)$, добавляя к H всевозможные ребра, соединяющие пары различных вершин из V_1. В графе $\widehat{H}$ множество V_1 является кликой, а V_2 — антикликой (т. е. множество вершин графа $\widehat{H}$ распадается в дизъюнктное объединение клики и антиклики, такие графы называют *расщепляемыми*). В силу условий $\alpha_t + t - 1 \ge t$ и $t \ge \beta_1$ для графического разбиения $\lambda = \mathrm{gpt}(\widehat{H})$ получаем

$$\lambda = (\alpha_1 + t - 1, \alpha_2 + t - 1, \dots, \alpha_t + t - 1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s).$$

Отсюда следует, что $r(\lambda) = t$,

$$\mathrm{hd}(\lambda) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = \mathrm{dpt}_H(V_1) \text{ и } \mathrm{tl}(\lambda)^* = (\beta_1, \ldots, \beta_s) = \mathrm{dpt}_H(V_2).$$

Лемма 3. *Пусть* $H = (V_1, E, V_2)$ *— двудольный граф. Тогда* $\mathrm{sum}(\mathrm{dpt}_H(V_1)) = \mathrm{sum}(\mathrm{dpt}_H(V_2))$ *и* $\mathrm{dpt}_H(V_1) \leq \mathrm{dpt}_H(V_2)^*$, $\mathrm{dpt}_H(V_2) \leq \mathrm{dpt}_H(V_1)^*$.

Доказательство. Очевидно, $\mathrm{sum}(\mathrm{dpt}_H(V_1)) = m = \mathrm{sum}(\mathrm{dpt}_H(V_2))$, где m — число ребер графа H.

Без ограничения общности будем считать, что H не имеет изолированных вершин. Упорядочим вершины множеств V_1 и V_2 таким образом, как указано перед леммой, и вложим H в расщепляемый граф $\widehat{H} = (K(V_1), E, V_2)$. Для графического разбиения $\lambda = \mathrm{gpt}(\widehat{H})$ в силу критерия Кохнерта имеем $\mathrm{hd}(\lambda) \leq \mathrm{tl}(\lambda)$. Отсюда следует $\mathrm{dpt}_H(V_1) \leq \mathrm{dpt}_H(V_2)^*$. Второе неравенство $\mathrm{dpt}_H(V_2) \leq \mathrm{dpt}_H(V_1)^*$ верно потому, что переход к сопряженным разбиениям является антиавтоморфизмом решетки разбиений $NPL(m)$. □

Лемма 4. *Расщепляемый граф* $\widehat{H} = (K(V_1), E, V_2)$ *является пороговым тогда и только тогда, когда* $\mathrm{dpt}_H(V_2) = \mathrm{dpt}_H(V_1)^*$.

Доказательство. Если граф $\widehat{H}$ является пороговым, то $\mathrm{hd}(\lambda) = \mathrm{tl}(\lambda)$ и, следовательно, $\mathrm{dpt}_H(V_2) = \mathrm{tl}(\lambda)^* = \mathrm{hd}(\lambda)^* = \mathrm{dpt}_H(V_1)^*$.

Обратно, пусть $\mathrm{dpt}_H(V_2) = \mathrm{dpt}_H(V_1)^*$. Тогда $\mathrm{tl}(\lambda)^* = \mathrm{dpt}_H(V_2) = \mathrm{dpt}_H(V_1)^* = \mathrm{hd}(\lambda)^*$, откуда получаем $\mathrm{tl}(\lambda) = \mathrm{hd}(\lambda)$. Следовательно, граф $\widehat{H}$ является пороговым. □

Следующая теорема дает различные характеризации двудольно-пороговых графов.

Теорема 1. *Пусть* $H = (V_1, E, V_2)$ *— двудольный граф. Тогда следующие условия эквивалентны.*

1) *H является сэндвич-подграфом порогового графа* $G = (K(V_1), E, V_2)$;

2) *H является сэндвич-подграфом порогового графа* $G = (K(V_2), E, V_1)$;

3) *в H окрестности вершин каждой из долей V_1 и V_2 образуют цепи относительно теоретико-множественного включения*;

4) *в H окрестности вершин доли V_1 образуют цепь относительно теоретико-множественного включения*;

5) *в H окрестности вершин доли V_2 образуют цепь относительно теоретико-множественного включения*;

6) *H является двудольно-пороговым графом, т. е. не содержит повышающих V_1-троек и повышающих V_2-троек*;

7) *H не содержит повышающих V_1-троек*;

8) *H не содержит повышающих V_2-троек*;

9) $\mathrm{dpt}_H(V_2) = \mathrm{dpt}_H(V_1)^*$;

10) $\mathrm{dpt}_H(V_1) = \mathrm{dpt}_H(V_2)^*$;

11) *H не имеет двудольных 4-псевдоциклов.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что при удалении из каждой доли V_1 и V_2 графа H конечного множества изолированных вершин свойства 1)–11) сохраняются. Эти свойства сохраняются и при добавлении изолированных вершин. Поэтому без ограничения общности можно считать, что H не содержит изолированных вершин.

Поскольку наличие двудольного 4-псевдоцикла в графе $H = (V_1, E, V_2)$ не зависит от нумерации его долей V_1 и V_2, в силу леммы 2 условие 7) эквивалентно условию 11), которое в свою очередь в силу леммы 2 эквивалентно условию 8). Отсюда следует, что условия 6), 7), 8) и 11) попарно эквивалентны.

Если выполняется условие 8), то в силу леммы 1 выполняется условие 5). Тогда граф $G = (K(V_1), E, V_2)$ является пороговым по определению порогового графа, поэтому выполняется условие 1). Обратно, если выполняется условие 1), то, как отмечено во введении, пороговый граф $G = (K(V_1), E, V_2)$ не содержит повышающих троек, поэтому выполняется условие 8). Следовательно, условия 8), 5) и 1) попарно эквивалентны.

Аналогично, условия 7), 4) и 2) попарно эквивалентны. Поэтому девять условий 1)–8) и 11) попарно эквивалентны. В силу леммы 4 условие 1) эквивалентно условию 9), а условие 2) — условию 10). Таким образом, все одиннадцать условий теоремы попарно эквивалентны.

Теорема доказана.

П р и м е р. Рассмотрим двудольный граф H без изолированных вершин:

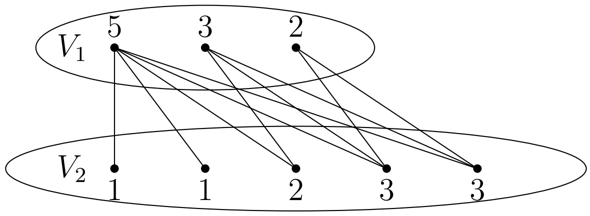

Рис. 5

Легко видеть, что для этого графа выполняется условие вложенности окрестностей. Здесь $\mathrm{dpt}_H(V_1) = (5, 3, 2)$, $\mathrm{dpt}_H(V_2) = (3, 3, 2, 1, 1)$ и $\mathrm{dpt}_H(V_2) = \mathrm{dpt}_H(V_1)^*$. Конечно, верно и условие $\mathrm{dpt}_H(V_1) = \mathrm{dpt}_H(V_2)^*$:

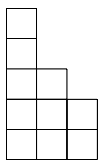

Рис. 6. Диаграмма Ферре разбиения $\mathrm{dpt}_H(V_1)$

Нетрудно установить, что для любого двудольного графа $H = (V_1, E, V_2)$ без изолированных вершин все пороговые графы, содержащие его в качестве реберно порожденного подграфа, устроены следующим образом: $G = (K(V_1 \cup U_1), E, V_2 \cup U_2)$ для некоторых конечных множеств U_1 и U_2 таких, что множества V_1, U_1, V_2, U_2 попарно не пересекаются. Множество U_1 “расширяет” клику, а множество U_2 — антиклику.

Отметим, что любой двудольный граф последовательными вращениями ребер, каждое из которых отвечает повышающей тройке первой или второй доли, приводится к двудольно-пороговому графу, поскольку при каждом таком вращении в решетке разбиений строго увеличивается степенное разбиение преобразуемой доли, и можно совершить лишь конечное число таких вращений, так как решетка $NPL(m)$ конечна, где m — число ребер исходного двудольного графа. В силу теоремы 1 любой двудольный граф последовательными вращениями ребер, каждое из которых отвечает повышающей тройке только первой доли, также приводится к двудольно-пороговому графу. Конечно, аналогичное утверждение верно и для повышающих троек второй доли.

3. Применение теоремы 1

Покажем теперь как с помощью теоремы 1 можно получить новое достаточно простое доказательство известного критерия Гейла и Райзера о представлении двух разбиений степенными разбиениями долей двудольного графа. Сначала приведем вспомогательные утверждения.

Лемма 5. *Пусть $H = (V_1, E, V_2)$ — двудольный граф и $\mathrm{dpt}_H(V_1) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_t)$, где $1 \le i < j \le t$, где $|V_1| = t$. Упорядочим вершины в V_1 таким образом, что $V_1 = \{u_1, \ldots, u_t\}$ и $\lambda_1 = \deg_H u_1 \ge \lambda_2 = \deg_H u_2 \ge \cdots \ge \lambda_t = \deg_H u_t$.*

Пусть разбиение $\mu = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_j + 1, \ldots, \lambda_t)$ *получено из разбиения* λ *с помощью одного элементарного преобразования первого типа. Тогда существует граф* $H_1 = (V_1, E_1, V_2)$, *который можно получить из графа* H *с помощью одного понижающего* V_1*-вращения ребра, отвечающего тройке* (u_i, v, u_j) *для некоторой вершины* $v \in V_2$, *и для которого выполняются равенства* $\mathrm{dpt}_{H_1}(V_1) = \mu$ *и* $\mathrm{dpt}_{H_1}(V_2) = \mathrm{dpt}_H(V_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если каждая вершина из V_2, смежная вершине u_i, является смежной и вершине u_j, то $\lambda_i = \deg_H u_i \leq \deg_H u_j = \lambda_j$, что противоречит условию $\lambda_i \geq 2 + \lambda_j$. Поэтому существует вершина $v \in V_2$, задающая понижающую V_1-тройку (u_i, v, u_j). Искомый граф H_1 получается из графа H с помощью соответствующего ей понижающего V_1-вращения ребра. □

Лемма 6. *Пусть* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ — *разбиение, где* $l(\beta) = s$. *Тогда для любого* $k \geq \beta_1$ *существует такой двудольный граф* $G = (V_1, E', V_2)$, *что* $|V_1| = k$, $\mathrm{dpt}_G(V_1) = \beta^*$ *и* $\mathrm{dpt}_G(V_2) = \beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем два непересекающихся множества V_1 и V_2 таких, что $|V_1| = k$ и $|V_2| = s$, где $k \geq \beta_1$, $V_1 = \{u_1, \ldots, u_k\}$ и $V_2 = \{v_1, \ldots, v_s\}$. На множестве $V_1 \cup V_2$ определим двудольный граф $G = (V_1, E', V_2)$, полагая $N(v_i) = \{u_1, \ldots, u_{\beta_i}\}$ для любого $i = 1, \ldots, s$. Тогда $\mathrm{dpt}_H(V_2) = \beta$ и система окрестностей вершин множества V_2 образует цепь подмножеств из V_1 относительно теоретико-множественного включения. В силу теоремы 1 граф H является двудольно-пороговым и $\mathrm{dpt}_G(V_1) = \mathrm{dpt}_G(V_2)^* = \beta^*$. □

Заметим, что двудольно-пороговый граф, для которого разбиения β^* и β являются степенными разбиениями двух его долей, единственен с точностью до изоморфизма и изолированных вершин. Любой такой граф изоморфен некоторому из графов, построенных методом, указанным в доказательстве леммы. Чтобы показать этого, нужно воспользоваться тем, что система окрестностей вершин второй доли двудольно-порогового графа образует цепь подмножеств в первой доле относительно теоретико-множественного включения, и соответствующим образом упорядочить вершины первой доли.

Для произвольного разбиения β через $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ будем обозначать двудольно-пороговый граф $H = (V_1, E, V_2)$ без изолированных вершин такой, что $\mathrm{dpt}_G(V_1) = \beta^*$ и $\mathrm{dpt}_G(V_2) = \beta$.

Лемма 7. *Пусть* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ *и* $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$ — *два разбиения такие, что* $\mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta)$ *и* $\alpha \leq \beta^*$. *Тогда существует такой двудольный граф* $H = (V_1, E, V_2)$, *что* $\mathrm{dpt}_H(V_1) = \alpha$ *и* $\mathrm{dpt}_H(V_2) = \beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий $\alpha \leq \beta^*$ и $\mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta)$ существует [7] такая последовательность разбиений $\beta^* = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(t)} = \alpha$, что для любого $i = 1, \ldots, t$ каждое разбиение вида $\lambda^{(i)}$ получается из разбиения $\lambda^{(i-1)}$ с помощью одного элементарного преобразования первого типа. При выполнении элементарных преобразований первого типа длина разбиения не может уменьшиться, и, следовательно, $\alpha \leq \beta^*$ влечет $l(\alpha) \geq l(\beta^*) = \beta_1$.

Теперь применим лемму 6 при $k = l(\alpha)$ и k раз применим лемму 5 (при выполнении V_1-вращений ребер множество E' преобразуется в множество E). □

Из лемм 3 и 7 вытекает теорема Гейла — Райзера в следующей формулировке.

Теорема 2 (Гейл — Райзер). *Пусть* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ *и* $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$ — *два разбиения. Двудольный граф* $H = (V_1, E, V_2)$ *такой, что* $\mathrm{dpt}_H(V_1) = \alpha$ *и* $\mathrm{dpt}_H(V_2) = \beta$, *существует тогда и только тогда, когда* $\mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta)$ *и* $\alpha \leq \beta^*$.

Пусть λ и μ — два разбиения одинакового веса такие, что $\lambda \leq \mu$. Через $\mathrm{height}(\mu, \lambda)$ будем обозначать *высоту* разбиения μ над разбиением λ [10], т. е. длину кратчайшей последовательности элементарных преобразований первого типа, переводящей μ в λ. В силу [12, теорема 1] выполняется

$$\mathrm{height}(\mu, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_i |\mu_i - \lambda_i|,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ — два разбиения такие, что $\mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta)$ и $\alpha \leq \beta^*$. Через $BG(\alpha, \beta)$ обозначим класс всех двудольных графов $H = (V_1, E, V_2)$ таких, что $\mathrm{dpt}_H(V_1) = \alpha$ и $\mathrm{dpt}_H(V_2) = \beta$.

Будем предполагать далее, что $H = (V_1, E, V_2)$ — некоторый двудольный граф без изолированных вершин такой, что $\mathrm{dpt}_H(V_1) = \alpha$, $\mathrm{dpt}_H(V_2) = \beta$.

С учетом теоремы 1 граф H можно преобразовать в двудольно-пороговый граф $G_1 = (V_1, E_1, V_2)$ с помощью последовательных вращений ребер, отвечающих только повышающим тройкам первой доли V_1. Поскольку при таких вращениях степени вершин доли V_2 не изменяются, выполняется равенство $\mathrm{dpt}_{G_1}(V_2) = \beta$. Тогда в силу теоремы 1 имеем $\mathrm{dpt}_{G_1}(V_1) = \beta^*$, т. е. $G_1 = \mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$.

Таким образом, граф $H = (V_1, E, V_2)$ приводится повышающими V_1-вращениями ребер к единственному с точностью до изоморфизма и изолированных вершин двудольно-пороговому графу, а именно к $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$.

Так как любой последовательности понижающих V_1-вращений ребер отвечает последовательность элементарных преобразований первого типа степенного разбиения доли V_1 и, очевидно, наоборот (см. лемму 5), можно вычислить наименьшее возможное число понижающих V_1-вращений ребер, переводящих граф $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ в граф из семейства $BG(\alpha, \beta)$ двудольных графов. В силу [12, теорема 1] оно равно высоте разбиения β^* над разбиением α, т. е.

$$\frac{1}{2} \sum |\beta_i^* - \alpha_i|,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ и $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots)$ (ср. с теоремой Гейла — Райзнера).

Аналогично, граф H можно преобразовать в двудольно-пороговый граф $G_2 = \mathrm{btg}(\alpha, \alpha^*)$ с помощью последовательных вращений ребер, отвечающих только повышающим тройкам второй доли V_2. Заметим, что по теореме Гейла — Райзера имеем $\beta \leq \alpha^*$. Ясно, что высота разбиения α^* над разбиением β равна высоте разбиения β^* над разбиением α, поскольку переход к сопряженным разбиениям является антиавтоморфизмом решетки $NPL(m)$, где $m = |E|$. Отсюда следует, что наименьшее возможное число понижающих V_2-вращений ребер, переводящих $\mathrm{btg}(\alpha, \alpha^*)$ в граф из семейства $BG(\alpha, \beta)$, равно наименьшему возможному числу понижающих V_1-вращений ребер, переводящих $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ в граф из семейства $BG(\alpha, \beta)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ *и* $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ *— два разбиения такие, что* $\mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta)$ *и* $\alpha \leq \beta^*$.

1) *Любой граф* $H = (V_1, E, V_2)$ *без изолированных вершин из семейства графов* $BG(\alpha, \beta)$ *с помощью конечной последовательности повышающих* V_1*-вращений ребер приводится к единственному двудольно-пороговому графу с точностью до изоморфизма и изолированных вершин, который изоморфен* $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ *и получается из графа* $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ *с помощью конечной последовательности понижающих* V_1*-вращений ребер.*

2) *Наименьшее возможное число понижающих* V_1*-вращений ребер в конечной последовательности, переводящей граф* $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ *в граф из семейства* $BG(\alpha, \beta)$*, равно высоте разбиения* β^* *над разбиением* α*, т. е.*

$$\mathrm{height}(\beta^*, \alpha) = \frac{1}{2} \sum_i |\beta_i^* - \alpha_i|, \quad \text{где} \quad \beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots).$$

Аналогичное утверждение справедливо также для семейства $BG(\alpha, \beta)$ и двудольно-порогового графа $\mathrm{btg}(\alpha, \alpha^*)$, причем $\mathrm{height}(\beta^*, \alpha) = \mathrm{height}(\alpha^*, \beta)$.

Заметим, что нетрудно привести пример разбиений α и β таких, что $\mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta)$ и $\alpha \leq \beta^*$, и пример графа из $BG(\alpha, \beta)$, для которых любая последовательность повышающих V_1-вращений ребер, приводящая его к двудольно-пороговому виду, имеет длину, строго большую числа $\mathrm{height}(\beta^*, \alpha)$.

Ранее нами было показано, что любой граф может быть получен из некоторого порогового графа с помощью конечной последовательности понижающих вращений ребер. Как видим, для класса двудольных графов ситуация совершенно аналогичная, любой двудольный граф может быть получен из некоторого “тесно связанного с ним” двудольно-порогового графа с помощью конечной последовательности понижающих вращений ребер одной из его долей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Лань, 2010. 368 с.
2. **Andrews G.E.** The theory of partitions. Cambridge: Cambridge University Press, 1976. 255 p.
3. **Ivanyi A., Lucz L., Gombos G., Matuszka T.** Parallel enumeration of degree sequences of simple graphs // Acta Univ. Sapientiae, Informatica. 2012. Vol. 4, № 2. P. 260–288.
4. **Tripathi A., Venugopalan S., West D.B.** A short constructive proof of the Erdos–Gallai characterization of graphic lists // Discrete Math. 2010. Vol. 310, № 4. P. 833–834. doi: 10.1016/j.disc.2009.09.023.
5. **Bisi C., Ciaselotti G., Oliverio P.A.** A natural extension of the Young partition lattice // Advances in Geometry. 2015. Vol. 15, № 3. P. 263–280. doi: 10.1515/advgeom-2015-0017.
6. **Baransky V.A., Koroleva T.A.** The lattice of partitions of a positive integer // Dokl. Math. 2008. Vol. 77, № 1. P. 72–75.
7. **Baransky V.A., Koroleva T.A., Senchonok T.A.** On the partition lattice of all integers // Sib. Elect. Math. Reports. 2016. Vol. 13. P. 744–753. doi: 10.17377/semi.2016.13.060.
8. **Kohnert A.** Dominance order and graphical partitions // Elec. J. Comb. 2004. Vol. 11, № 4. P. 1–17. doi: 10.37236/1845.
9. **Erdös P., Gallai T.** Graphs with given degree of vertices // Math. Lapok. 1960. Vol. 11. P. 264–274.
10. **Baransky V.A., Senchonok T.A.** On maximal graphical partitions that a the nearest to a given graphical partition // Sib. Elect. Math. Reports. 2020. Vol. 17. P. 338–363. doi: 10.33048/semi.2020.17.022.
11. **Mahadev N.V.R., Peled U.N.** Threshold graphs and related topics. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1995. Vol. 56. 542 p. (Ser. Annals of Discr. Math.)
12. **Baransky V.A., Senchonok T.A.** On the shortest sequences of elementary transformations in the partition lattice // Sib. Elect. Math. Reports. 2018. Vol. 15. P. 844–852. doi: 10.17377/semi.2018.15.072.

Поступила 15.03.2020
После доработки 8.05.2020
Принята к публикации 18.05.2020

Баранский Виталий Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru

Сеньчонок Татьяна Александровна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru

REFERENCES

1. Asanov M.O., Baransky V.A., Rasin V.V. *Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy* [Discrete Mathematics: graphs, matroids, algorithms]. SPb: Lan’, 2010, 368 p. ISBN: 978-5-8114-1068-2.
2. Andrews G.E. *The theory of partitions.* Cambridge: Cambridge University Press, 1976, 255 p. ISBN: 9781107093683.

3. Ivanyi A., Lucz L., Gombos G., Matuszka T. Parallel enumeration of degree sequences of simple graphs. *Acta Univ. Sapientiae, Informatica*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 260–288.
4. Tripathi A., Venugopalan S., West D.B. A short constructive proof of the Erdös–Gallai characterization of graphic lists. *Discrete Mathematics*, 2010, vol. 310, no. 4, pp. 843–844. doi: 10.1016/j.disc.2009.09.023 .
5. Bisi C., Ciaselotti G., Oliverio P.A. A natural extension of the Young partition lattice. *Advances in Geometry*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 263–280. doi: 10.1515/advgeom-2015-0017 .
6. Baransky V.A., Koroleva T.A. The lattice of partitions of a positive integer. *Doklady Math.*, 2008, vol. 77, no. 1, pp. 72–75. doi: 10.1007/s11472-008-1018-z .
7. Baransky V.A., Koroleva T.A., Senchonok T.A. On the partition lattice of all integers. *Sib. Elect. Math. Reports*, 2016, vol. 13, pp. 744–753. doi: 10.17377/semi.2016.13.060 .
8. Kohnert A. Dominance order and graphical partitions. *Elec. J. Comb.*, 2004, vol. 11, no. 4, pp. 1–17. doi: 10.37236/1845 .
9. Erdös P., Gallai T. Graphs with given degree of vertices. *Math. Lapok*, 1960, vol. 11, no. 4, pp. 264–274 (in Hungarian).
10. Baransky V.A., Senchonok T.A. On maximal graphical partitions that are the nearest to a given graphical partition. *Sib. Elect. Math. Reports*, 2020, vol. 17, pp. 338–363. doi 10.33048/semi.2020.17.022 .
11. Mahadev N.V.R., Peled U.N. *Threshold Graphs and Related Topics.* Ser. Annals of Discr. Math., vol. 56, Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1995, 542 p. doi: 10.1016/s0167-5060(13)71063-x .
12. Baransky V.A., Senchonok T.A. On the shortest sequences of elementary transformations in the partition lattice. *Sib. Elect. Math. Reports*, 2018, vol. 15, pp. 844–852 (in Russian). doi 10.17377/semi.2018.15.072 .

Received March 15, 2019
Revised May 8, 2020
Accepted May 18, 2020

Vitaly Anatol'evich Baransky, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru .

Tatiana Aleksandrovna Senchonok, Cand. Phys.-Math. Sci., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru .

Cite this article as: V. A. Baransky, T. A. Senchonok. Bipartite threshold graphs. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 56-67 .