ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 517.518.86

НАИЛУЧШЕЕ L^2-ПРОДОЛЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ С ЕДИНИЧНОЙ ЕВКЛИДОВОЙ СФЕРЫ НА КОНЦЕНТРИЧЕСКУЮ СФЕРУ[1]

В. В. Арестов, А. А. Селезнев

В данной работе рассматривается задача о продолжении алгебраических многочленов с единичной сферы евклидова пространства размерности $m \geq 2$ на концентрическую сферу радиуса $r \neq 1$ с наименьшим значением L^2-нормы. Найдено продолжение произвольного многочлена. Как следствие, получено наилучшее продолжение класса многочленов заданной степени $n \geq 1$, норма которых в пространстве L^2 на единичной сфере не превосходит 1. Показано, что величина наилучшего продолжения равна r^n при $r > 1$ и r^{n-1} при $0 < r < 1$. Описан наилучший метод продолжения. А. В. Парфененков в 2009 г. получил подобный результат в равномерной норме на плоскости ($m = 2$).

Ключевые слова: многочлен, евклидова сфера, L^2-норма, наилучшее продолжение.

V. V. Arestov, A. A. Seleznev. Best L^2-extension of algebraic polynomials from the unit Euclidean sphere to a concentric sphere.

We consider the problem of extending algebraic polynomials from the unit sphere of a Euclidean space of dimension $m \geq 2$ to a concentric sphere of radius $r \neq 1$ with the smallest value of the L^2-norm. An extension of an arbitrary polynomial is found. As a result, we obtain the best extension of a class of polynomials of given degree $n \geq 1$ whose norms in the space L^2 on the unit sphere do not exceed 1. We show that the best extension equals r^n for $r > 1$ and r^{n-1} for $0 < r < 1$. We describe the best extension method. A.V. Parfenenkov obtained in 2009 a similar result in the uniform norm on the plane ($m = 2$).

Keywords: polynomial, Euclidean sphere, L^2-norm, best extension.

MSC: 41A63, 41A99, 26C05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-47-55

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Основной результат

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, есть евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_m)$, наделенное нормой $|x| = |x|_m = \big(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\big)^{1/2}$; $\mathbb{B}_r = \mathbb{B}_r^m = \{x \in \mathbb{R}^m \colon |x| \leq r\}$, $\mathbb{S}_r = \mathbb{S}_r^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \colon |x| = r\}$ — соответственно, шар и сфера радиуса $r > 0$ с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$; $\mathbb{Z}_+^m$ — множество точек $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ с целыми нетрицательными координатами, называемых *мультииндексами*. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ и точки $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ полагаем $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}$.

Через $L^2(\mathbb{S}_r)$ обозначим пространство комплекснозначных измеримых интегрируемых с квадратом на $\mathbb{S}_r$ функций с L^2-нормой

$$\|f\| = \|f\|_{L^2(\mathbb{S}_r)} = \left(\frac{1}{|\mathbb{S}_r|} \int\limits_{\mathbb{S}_r} |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2};$$

[1]Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013). Исследования первого автора поддержаны также РФФИ (проект 18-01-00336).

здесь $|\mathbb{S}_r|$ — площадь сферы $\mathbb{S}_r$; $L^2(\mathbb{S}_r)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(f,g)=\frac{1}{|\mathbb{S}_r|}\int\limits_{\mathbb{S}_r} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad f,\, g\in L^2(\mathbb{S}_r). \tag{1.1}$$

Пусть, далее, $\mathscr{P}_n=\mathscr{P}_n^m$ для целого неотрицательного n есть множество алгебраических многочленов

$$P_n(x)=P_n(x_1,\dots,x_m)=\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in\mathbb{Z}_+^m,\\ \alpha_1+\dots+\alpha_m\le n}} c_\alpha x^\alpha \tag{1.2}$$

от m действительных переменных $x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ степени (не выше) n с комплексными коэффициентами $\{c_\alpha\}$. Слагаемое x^α в (1.2) называют *мономом*, а сумму $\alpha_1+\dots+\alpha_m$ — *степенью* этого монома. Наибольшая степень монома с ненулевым коэффициентом называется *точной степенью* многочлена P_n. Символом $\mathscr{B}_n$ обозначим множество многочленов из $\mathscr{P}_n$, нормы которых в пространстве $L^2(\mathbb{S})$ на единичной сфере $\mathbb{S}=\mathbb{S}_1$ ограничены единицей, т. е.

$$\mathscr{B}_n=\{P_n\in\mathscr{P}_n\colon \|P_n\|_{L^2(\mathbb{S})}\le 1\}.$$

Многочлену $P_n\in\mathscr{P}_n$ сопоставим ассоциированный с ним класс

$$\mathscr{Q}_n(P_n)=\{Q_n\in\mathscr{P}_n\colon Q_n(x)=P_n(x) \text{ для } x\in\mathbb{S}\} \tag{1.3}$$

многочленов $Q_n\in\mathscr{P}_n$, совпадающих с P_n на единичной сфере $\mathbb{S}$. Для многочлена $P_n\in\mathscr{P}_n$ наименьшее значение

$$u_n(P_n;r)=\inf\{\|Q_n\|_{L^2(\mathbb{S}_r)}\colon Q_n\in\mathscr{Q}_n(P_n)\}$$

$L^2(\mathbb{S}_r)$-норм многочленов из ассоциированного класса на сфере радиуса r можно интерпретировать как величину наилучшего L^2-продолжения многочлена P_n с единичной сферы $\mathbb{S}$ на сферу $\mathbb{S}_r$. В таком случае величину

$$\theta_n^m(r)=\sup\{u_n(P_n;r)\colon P_n\in\mathscr{B}_n\}=\sup\{u_n(P_n;r)\colon P_n\in\mathscr{P}_n,\ \|P_n\|_{L^2(\mathbb{S})}\le 1\} \tag{1.4}$$

естественно считать величиной наилучшего L^2-продолжения множества многочленов $\mathscr{B}_n$ с $\mathbb{S}$ на $\mathbb{S}_r$. Рассматриваемая в данной статье задача заключается в нахождении точного значения величины наилучшего продолжения $\theta_n^m(r)$ и наилучшего метода продолжения; назовем ее задачей (1.4).

А. В. Парфененков (см. [1, 2009 г.]) решил задачу, подобную (1.4), в равномерной норме на плоскости ($m=2$) при любом $r>0$.

Ниже будет дано решение задачи (1.4) для произвольной размерности $m\ge 2$ при всех $r>0,\ r\ne 1$; в случае $r=1$ задача (1.4) тривиальная: $\theta_n^m(1)=1$.

Обозначим через $\mathscr{H}_n=\mathscr{H}_n^m$ множество гармонических (в $\mathbb{R}^m$) многочленов $H_n\in\mathscr{P}_n^m$. Наконец, пусть $\mathscr{G}_n=\mathscr{G}_n^m$ — множество однородных гармонических многочленов $G_n\in\mathscr{H}_n^m$, точная степень (и порядок однородности) которых есть n.

Основным в данной работе является следующая теорема.

Теорема. *При любых $m\ge 2$, $n\ge 1$ справедливы следующие утверждения.*

1. *При $r>1$ для величины наилучшего продолжения* (1.4) *имеет место формула*

$$\theta_n^m(r)=r^n; \tag{1.5}$$

при этом экстремальными в задаче (1.4) *являются лишь однородные гармонические многочлены $G_n\in\mathscr{G}_n$ степени n с единичной нормой $\|G_n\|_{L_2(\mathbb{S})}=1$ и многочлены ассоциированных с ними классов $\mathscr{Q}_n(G_n)$.*

2. *При* $0 < r < 1$ *имеет место формула*

$$\theta_n^m(r) = r^{n-1};$$

экстремальными в этом случае являются лишь однородные гармонические многочлены $G_{n-1} \in \mathscr{G}_{n-1}$ *степени* $n-1$ *с единичной нормой* $\|G_{n-1}\|_{L_2(\mathbb{S})} = 1$ *и многочлены ассоциированных классов* $\mathscr{Q}_n(G_{n-1})$.

Наилучший метод продолжения многочленов с единичной сферы на сферу $\mathbb{S}_r$ радиуса $r \neq 1$ описан ниже в разд. 4 после доказательства теоремы.

Как будет видно из леммы 1 и доказательства теоремы, случай $n = 1$ является вырожденным, хотя формально для него теорема справедлива.

Задача (1.4) имеет смысл и при $n = 0$. Это тривиальный случай и его будет удобно обсудить после доказательства леммы 1.

На будущее отметим два известных факта.

1. Для площади сферы $\mathbb{S}_r$, $r > 0$, справедлива формула (см., например, [2, гл. XVIII, п. 676, пример 3])

$$|\mathbb{S}_r| = \sigma_m \, r^{m-1}, \quad \sigma_m = |\mathbb{S}| = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}.$$

2. Для функции f, определенной, измеримой, суммируемой на сфере $\mathbb{S}_r$, $r > 0$, имеет место формула (детали можно найти, например, в [3, (26)])

$$\int\limits_{\mathbb{S}_r} f(x)\, dx = r^{m-1} \int\limits_{\mathbb{S}} f(rx)\, dx.$$

В дальнейшем высказывания о том, что многочлен из $\mathscr{P}_n$ и, в частности, из $\mathscr{H}_n$ имеет степень n, означают лишь, что точная степень многочлена не выше n. Случаи, когда точная степень многочлена равна n, будут оговариваться явно.

1.2. Разложение Гаусса алгебраических многочленов нескольких переменных

В исследовании экстремальных задач для алгебраических многочленов нескольких переменных важное значение имеет известная теорема Гаусса о представлении произвольного однородного многочлена нескольких переменных через однородные гармонические многочлены; доказательство этой теоремы можно найти в монографиях [4, гл. XI, § 2, теорема XI.1] и [5, гл. IV, § 2, теорема 2.1]. В данной работе будет использоваться вытекающее из этой теоремы представление Гаусса произвольного многочлена нескольких переменных через гармонические многочлены. Мы сформулируем это утверждение в виде следующей теоремы (см., например, [4, гл. XI, § 5, (XII.5.1)]).

Теорема A (Разложение Гаусса алгебраических многочленов). *При любом целом неотрицательном n любой многочлен* $P_n \in \mathscr{P}_n$ *может быть представлен, и притом единственным образом, в виде*

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{[n/2]} |x|^{2s} H_{n-2s}(x), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

где $H_j \in \mathscr{H}_j$.

Следствие. *При любом* $r > 0$ *для любого многочлена* $P_n \in \mathscr{P}_n$ *существует единственный гармонический многочлен* $H_n = H_n(P_n, r)$, *который совпадает с* P_n *на сфере* $\mathbb{S}_r$. *В частности, для любого многочлена* $P_n \in \mathscr{P}_n$ *ассоциированный с ним класс* (1.3) *содержит единственный гармонический многочлен.*

2. Структура ассоциированного класса

Авторы не претендуют на новизну следующего утверждения о представлении ассоциированного класса (1.3). Однако мы не нашли в математической литературе ссылку на такой результат. Поэтому здесь он приводится с доказательством.

Лемма 1 (Структура ассоциированного класса). *При $n \geq 2$ для любого многочлена $P_n \in \mathscr{P}_n$ ассоциированный класс $\mathscr{Q}_n(P_n)$ состоит в точности из многочленов вида*

$$Q_n(x) = P_n(x) + \left(|x|^2 - 1\right) R_{n-2}(x), \quad R_{n-2} \in \mathscr{P}_{n-2}.$$

При $n = 0$ и $n = 1$ класс $\mathscr{Q}_n(P_n)$ состоит только из многочлена P_n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обсудим вначале утверждения леммы для $n = 0$ и $n = 1$. При $n = 0$ многочлен $P_0 \in \mathscr{P}_0$ есть константа, и ассоциированный с ним класс $\mathscr{Q}_0(P_0)$, очевидно, состоит только из константы P_0.

В случае $n = 1$ многочлен $P_1 \in \mathscr{P}_1$ имеет вид

$$P_1(x_1, \ldots, x_m) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m + a_{m+1},$$

где $\{a_k\}$ — коэффициенты P_1. Пусть

$$Q_1(x_1, \ldots, x_m) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_m x_m + b_{m+1}$$

есть многочлен также первой степени, который совпадает с P_1 на единичной сфере. Рассмотрим их разность:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_m) &= P_1(x_1, \ldots, x_m) - Q_1(x_1, \ldots, x_m) \\ &= (a_1 - b_1)x_1 + \cdots + (a_m - b_m)x_m + (a_{m+1} - b_{m+1}). \end{aligned}$$

Введем обозначение $c_k = a_k - b_k$. Возьмем $2m$ точек, у которых одна из координат равна 1 или -1, а остальные равны 0. Эти точки принадлежат единичной сфере, поэтому разность F_1 в этих точках обращается в нуль. В результате получим систему из $2m$ линейных уравнений относительно переменных c_k:

$$c_{m+1} \pm c_k = 0, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Эта система имеет лишь нулевое решение: $c_k = 0, \ 1 \leq k \leq m + 1$. Значит, многочлен Q_1 совпадает с многочленом P_1 всюду в $\mathbb{R}^m$.

Пусть теперь $n \geq 2$. Предположим, что F есть многочлен, равный разности алгебраических многочленов, принимающих одинаковые значения на единичной сфере $\mathbb{S}$, т. е. F есть многочлен, зануляющийся на единичной сфере:

$$F(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{S}. \tag{2.1}$$

Точки $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ представим в виде $x = (\xi, y)$, где $\xi = x_1 \in \mathbb{R}$, $y = (x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Запишем многочлен $F(x) = F(\xi, y)$ как многочлен переменного ξ, коэффициенты которого являются многочленами от y:

$$F(\xi, y) = \sum_{k=0}^{n} c_k(y) \xi^k.$$

Разделим $F(\xi, y)$ на многочлен второй степени $\xi^2 + |y|^2_{m-1} - 1 = \xi^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 - 1$ переменного ξ, считая координаты точки y параметрами. Получим соотношение

$$F(\xi, y) = R(\xi, y)(\xi^2 + |y|^2 - 1) + \xi\, U(y) + V(y), \tag{2.2}$$

где $R(\xi, y)$, $U(y)$ и $V(y)$ суть многочлены соответственно переменных $x = (\xi, y)$ и y.

Для произвольной точки y из открытого единичного шара $\overset{\circ}{\mathbb{B}}=\overset{\circ}{\mathbb{B}}{}^{m-1}$ пространства $\mathbb{R}^{m-1}$ следующие два (различных между собой) значения

$$\xi^{\pm} = \pm\sqrt{1 - |y|^2_{m-1}}$$

параметра ξ таковы, что точки $x^{\pm} = (\xi^{\pm}, y)$ лежат на единичной сфере пространства $\mathbb{R}^m$, и потому согласно (2.1) имеем $F(\xi^{\pm}, y) = 0$. Подставив эти точки в представление (2.2), получаем соотношения

$$F(\xi^{\pm}, y) = \xi^{\pm} U(y) + V(y) = 0, \quad y \in \overset{\circ}{\mathbb{B}} . \tag{2.3}$$

Так как $\xi^+ \neq \xi^-$, то (2.3) влекут, что $U(y) = 0$, $V(y) = 0$ для $y \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}$. А поскольку U и V суть многочлены, то отсюда следует, что U и V тождественно равны нулю на $\mathbb{R}^{m-1}$.

В результате для многочлена F получено представление

$$F(x) = R(x) \left(|x|^2_m - 1\right), \quad x \in \mathbb{R}^m;$$

нетрудно понять, что многочлен R имеет степень не выше $n - 2$, т. е. принадлежит $\mathscr{P}_{n-2}$.

Лемма 1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение леммы 1 при $n = 0$ показывает, что задача (1.4) в этом случае тривиальная. А именно, $\theta^m_0(r) = 1$, $r > 0$, и экстремальными являются лишь два многочлена ± 1.

3. Наилучшее продолжение гармонического многочлена

В этом разделе будет исследовано наилучшее продолжение

$$u_n(H_n; r) = \inf\{\|Q_n\|_{L^2(\mathbb{S}_r)} \colon Q_n \in \mathscr{Q}_n(H_n)\}$$

с единичной сферы на сферу радиуса $r > 0$, $r \neq 1$, гармонических многочленов H_n степени $n \geq 1$. Будем исходить из того, что, как довольно очевидно, гармонический многочлен $H_n \in \mathscr{H}^m_n$ является суммой

$$H_n = \sum_{k=0}^{n} G_k \tag{3.1}$$

однородных гармонических многочленов $G_k \in \mathscr{G}^m_k$ степени k, $0 \leq k \leq n$.

Лемма 2 (Продолжение гармонического многочлена). *При $n \geq 2$, $r > 0$, $r \neq 1$, для гармонического многочлена H_n, записанного в виде* (3.1)*, имеет место формула*

$$u_n(H_n; r) = \left(r^{2n} \|G_n\|^2_{L^2(\mathbb{S})} + r^{2(n-1)} \|G_{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{S})}\right)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Наилучшее продолжение осуществляют лишь многочлены

$$Q^*_n(x) = H_n(x) + (|x|^2 - 1) R^*_{n-2}(x), \tag{3.3}$$

где R^*_{n-2} суть многочлены степени (не выше) $n - 2$, для которых на сфере $\mathbb{S}_r$ обязательно справедливо представление

$$R^*_{n-2}(x) = -\frac{1}{r^2 - 1} \sum_{k=0}^{n-2} G_k(x), \quad x \in \mathbb{S}_r. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1 для произвольного многочлена $Q_n \in \mathscr{Q}_n(H_n)$ справедливо представление

$$Q_n(x) = H_n(x) + (|x|^2 - 1)R_{n-2}(x),$$

в котором R_{n-2} — произвольный многочлен из $\mathscr{P}_{n-2}$. В силу следствия теоремы A многочлен R_{n-2} на сфере $\mathbb{S}_r$ совпадает с некоторым гармоническим многочленом H_{n-2} степени (не выше) $n-2$, который согласно формуле (3.1) имеет вид

$$H_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} G_k^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

где $\{G_k^0\}_{k=0}^{n-2}$ — однородные гармонические многочлены. Следовательно, для многочлена R_{n-2} на $\mathbb{S}_r$ справедливо представление

$$R_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} G_k^0(x), \quad x \in \mathbb{S}_r.$$

Итак, на сфере $\mathbb{S}_r$ для многочлена Q_n имеет место формула

$$Q_n(x) = G_n(x) + G_{n-1}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} \left(G_k(x) + (r^2-1)G_k^0(x)\right), \quad x \in \mathbb{S}_r.$$

Все $n+1$ слагаемое правой части этой формулы являются однородными гармоническими многочленами соответствующей степени. Такие многочлены ортогональны на сфере $\mathbb{S}_r$ относительно скалярного произведения (1.1) (см., например, [5, гл. IV, § 2, следствие 2.4] или [4, гл. XI, § 3]). Поэтому

$$\|Q_n\|^2_{L_2(\mathbb{S}_r)} = \|G_n\|^2_{L_2(\mathbb{S}_r)} + \|G_{n-1}\|^2_{L_2(\mathbb{S}_r)} + \sum_{k=0}^{n-2} \|G_k + (r^2-1)G_k^0\|^2_{L_2(\mathbb{S}_r)}.$$

Наименьшее значение последней величины достигается на многочленах $\{G_k^0\}_{k=0}^{n-2}$, которые, по крайней мере, на сфере $\mathbb{S}_r$ определены формулами

$$G_k^0 = -G_k/(r^2-1), \quad 0 \le k \le n-2.$$

Итак, доказано, что

$$u_n(H_n; r) = \inf\{\|Q_n\|_{L^2(\mathbb{S}_r)} \colon Q_n \in \mathscr{Q}_n(H_n)\} = \|G_n + G_{n-1}\|_{L_2(\mathbb{S}_r)}$$

$$= \left(\|G_n\|^2_{L_2(\mathbb{S}_r)} + \|G_{n-1}\|^2_{L_2(\mathbb{S}_r)}\right)^{1/2} = \left(r^{2n}\|G_n\|^2_{L_2(\mathbb{S})} + r^{2(n-1)}\|G_{n-1}\|^2_{L_2(\mathbb{S})}\right)^{1/2}.$$

Минимум здесь достигается на любом многочлене вида (3.3), в котором R^*_{n-2} есть многочлен степени $n-2$, имеющий на сфере $\mathbb{S}_r$ вид (3.4).

Лемма 2 доказана.

З а м е ч а н и е 2. По нашему мнению представляет интерес тот факт, что многочлены (3.3) на сфере $\mathbb{S}_r$ независимо от значения $r > 0$, $r \ne 1$, определены одной и той же формулой

$$Q_n^*(x) = G_n(x) + G_{n-1}(x), \quad x \in \mathbb{S}_r.$$

4. Завершение исследования задачи (1.4)

4.1. Доказательство основной теоремы

Обоснуем вначале утверждения теоремы в случае $n \geq 2$. Согласно следствию теоремы A для любого многочлена $P_n \in \mathscr{P}_n$ ассоциированный с ним класс содержит (единственный) гармонический многочлен $H_n \in \mathscr{P}_n$. Ассоциированные классы этих двух многочленов совпадут, поэтому

$$u_n(P_n; r) = u_n(H_n; r).$$

Воспользовавшись представлением (3.1) многочлена H_n и формулой (3.2), получаем соотношение

$$u_n(P_n; r) = \left(r^{2n}\|G_n\|^2_{L^2(\mathbb{S})} + r^{2(n-1)}\|G_{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{S})}\right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Отсюда при $r > 1$ имеем

$$u_n(P_n; r) \leq r^n\left(\|G_n\|^2_{L^2(\mathbb{S})} + \|G_{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{S})}\right)^{1/2}$$

$$\leq r^n\Big(\sum_{k=0}^{n}\|G_k\|^2_{L^2(\mathbb{S})}\Big)^{1/2} = r^n\|H_n\|_{L^2(\mathbb{S})} = r^n\|P_n\|_{L^2(\mathbb{S})}.$$

Итак, при $r > 1$ для любого многочлена $P_n \in \mathscr{P}_n$ справедлива оценка

$$u_n(P_n; r) \leq r^n\|P_n\|_{L^2(\mathbb{S})}.$$

Из доказательства нетрудно сделать вывод, что последнее неравенство обращается в равенство в том и только том случае, если $H_n = G_n$. Отсюда следует и равенство (1.5), и приведенная в формулировке теоремы характеризация экстремальных многочленов.

Утверждения основной теоремы при $r > 1$ доказаны.

В случае $0 < r < 1$ формула (4.1) влечет неравенство

$$u_n(P_n; r) \leq r^{n-1}\left(\|G_n\|^2_{L^2(\mathbb{S})} + \|G_{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{S})}\right)^{1/2}.$$

Отсюда, как и при $r > 1$, следует, что в случае $0 < r < 1$ для любого многочлена $P_n \in \mathscr{P}_n$ справедлива оценка

$$u_n(P_n; r) \leq r^{n-1}\|P_n\|_{L^2(\mathbb{S})}.$$

Эта оценка влечет все утверждения теоремы и при $0 < r < 1$.

При $n \geq 2$ основная теорема доказана.

Рассмотрим случай $n = 1$. Многочлен P_1 первой степени является гармоническим и имеет вид $P_1 = G_0 + G_1$, где G_0 есть константа, а G_1 — однородный многочлен первой степени. Согласно лемме 1 ассоциированный с P_1 класс состоит из одного этого многочлена. Поэтому в этом случае имеем

$$u_1(P_1; r) = \|P_1\|_{L^2(\mathbb{S}_r)} = \left(r^2\|G_1\|^2_{L^2(\mathbb{S})} + \|G_0\|^2_{L^2(\mathbb{S})}\right)^{1/2}. \tag{4.2}$$

Формула (4.2) есть аналог формулы (4.1). Дальнейшие рассуждения в обоснование теоремы при $n = 1$ проводятся так же, как при $n \geq 2$.

Теорема полностью доказана.

4.2. Наилучший метод продолжения

В приведенном доказательстве теоремы построен метод, который продолжает многочлен $P_n \in \mathscr{P}_n$ с единичной сферы в пространство $\mathbb{R}^m$ до многочлена степени не выше n с наименьшим значением L^2-нормы на сфере $\mathbb{S}_r$ радиуса $r \neq 1$; мы называем его здесь *наилучшим методом продолжения.* В случае $n = 1$ при любом $r > 0$ таковым методом является тождественный оператор, который многочлену $P_1 \in \mathscr{P}_1$ сопоставляет этот же многочлен. В случае $n \geq 2$ метод состоит из двух шагов.

1. Многочлену $P_n \in \mathscr{P}_n$ сопоставляем ассоциированный с ним гармонический многочлен $H_n \in \mathscr{P}_n$.

2. Многочлену H_n, используя представление (3.1), по формуле (3.3) сопоставляем многочлен $Q_n^* \in \mathscr{P}_n$.

Построенное отображение $P_n \to Q_n^*$ множетва $\mathscr{P}_n$ в себя как раз и будет наилучшим методом продолжения. При $n \geq 4$ оно неоднозначное, поскольку многочлен R_{n-2}^* в формуле (3.3) определен однозначно лишь на сфере $\mathbb{S}_r$.

Однако отображение A_r, которое многочлен $P_n \in \mathscr{P}_n$ с единичной сферы $\mathbb{S}$ наилучшим образом (т. е. с наименьшим значением L^2-нормы) продолжает на сферу $\mathbb{S}_r$, $r \neq 1$, определено однозначно формулой

$$(A_r P_n)(x) = G_n(x) + G_{n-1}(x), \quad x \in \mathbb{S}_r;$$

это отображение является линейным оператором и для нормы этого оператора из $L^2(\mathbb{S})$ в $L^2(\mathbb{S}_r)$ справедлива формула

$$\|A_r\|_{L^2(\mathbb{S}) \to L^2(\mathbb{S}_r)} = \max\{r^n, r^{n-1}\}.$$

В таком понимании наилучший метод продолжения однозначный, единственный и линейный.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Парфененков А.В.** Наилучшее продолжение алгебраических многочленов с единичной окружности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 184–194.
2. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. III. М.: Физматлит, 2002. 728 с.
3. **Дейкалова М.В.** Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 532–551.
4. **Соболев С.Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
5. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 338 с.

Поступила 10.01.2020
После доработки 10.02.2020
Принята к публикации 17.02.2020

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет;
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru

Селезнев Антон Александрович
магистрант
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: misterion3000@gmail.com

REFERENCES

1. Parfenenkov A.V. The best extension of algebraic polynomials from the unit circle. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, vol. 265, suppl. 1, pp. 194–204. doi: 10.1134/S0081543809060157 .
2. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course in differential and integral calculus], vol. 3. Moscow: Fizmatlit Publ., 2002, 728 p. ISBN: 5-9221-0158-7 .
3. Deikalova M.V. The Taikov functional in the space of algebraic polynomials on the multidimensional Euclidean sphere. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, pp. 498–514. doi: 10.1134/S0001434608090228 .
4. Sobolev S.L. *Cubature formulas and modern analysis: An introduction.* Montreux: Gordon and Breach, 1992, 379 p. ISBN: 9782881248412 . Original Russian text published in Sobolev S.L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 808 p.
5. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9781400883899 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh.* Moscow: Mir Publ., 1974, 338 p.

Received January 10, 2020
Revised February 10, 2020
Accepted February 17, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University). The research of the first author was also supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336).

Vitalii Vladimirovich Arestov, Dr. Phys.-Math. Sci., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru .

Anton Aleksandrovich Seleznev, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: misterion3000@gmail.com .

Cite this article as: V. V. Arestov, A. A. Seleznev. Best L^2-extension of algebraic polynomials from the unit Euclidean sphere to a concentric sphere. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 47–55 .