ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 517.968.4

О ПОСТРОЕНИИ СУММИРУЕМОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА — НЕМЫЦКОГО НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ[1]

Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Исследуется класс нелинейных интегральных уравнений типа свертки с оператором Гаммерштейна — Немыцкого на всей прямой. Указанный класс уравнений имеет непосредственное применение в кинетической теории газов, в теории p-адических открыто-замкнутых струн и в теории переноса излучения. Доказывается конструктивная теорема существования нетривиального неотрицательного ограниченного и суммируемого на всей прямой решения. В конце приводятся конкретные примеры таких уравнений, для которых выполняются все условия основной теоремы.

Ключевые слова: уравнения Гаммерштейна — Немыцкого, последовательные приближения, монотонность, выпуклость, сходимость итерации.

Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan. On the construction of an integrable solution to one class of nonlinear integral equations of Hammerstein–Nemytskii type on the whole axis.

We study one class of nonlinear integral equations of convolution type with the Hammerstein–Nemytskii operator on the whole axis. This class has direct applications in the kinetic theory of gases, the theory of p-adic open-closed strings, and the theory of radiative transfer. We prove a constructive theorem on the existence of a nontrivial nonnegative solution integrable on the whole axis. In the end of the paper, we give specific examples of such equations satisfying all conditions of the main theorem.

Keywords: Hammerstein–Nemytskii equations, successive approximations, monotonicity, convexity, convergence of iterations.

MSC: 45G05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-278-287

1. Введение

Рассмотрим следующий класс нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Немыцкого:

$$f(x)=\mu_0(x,f(x))+\lambda(x)\int_{-\infty}^{\infty}K(x-t)\mu_1(t,f(t))dt,\quad x\in\mathbb{R},\tag{1.1}$$

относительно искомой неотрицательной и измеримой функции $f(x)$.

В уравнении (1.1) ядро K — определенная на всей прямой четная функция, удовлетворяющая условиям

$$K(\tau)>0,\quad \tau\in\mathbb{R},\quad \int_{-\infty}^{\infty}K(\tau)d\tau=1,\tag{1.2}$$

$$K\in L_\infty(\mathbb{R}),\quad K(\tau)\downarrow\ \text{ по }\ \tau\ \text{ на }\ \mathbb{R}^+:=[0,+\infty),\tag{1.3}$$

$$m(K):=\int_0^{\infty}tK(t)dt<+\infty.\tag{1.4}$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223).

Здесь $\lambda(x)$ — определенная на множестве $\mathbb{R}$ четная непрерывная функция, обладающая следующими свойствами:

$$0 < \varepsilon_0 := \inf_{x\in\mathbb{R}} \lambda(x) \leq \lambda(x) \leq 1, \quad \varepsilon_0 < 1, \quad \lambda(x) \uparrow \ \text{ по } \ x \ \text{ на } \ \mathbb{R}^+, \tag{1.5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \lambda(x) = 1, \quad 1-\lambda \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{1.6}$$

Нелинейности μ_0 и μ_1, определеные на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, суть измеримые и вещественнозначные функции, удовлетворяющие условию “критичности”

$$\mu_0(x,0) = \mu_1(x,0) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

и некоторым другим условиям (см. ниже).

Уравнение (1.1) кроме чисто математического интереса представляет определенный интерес в разных разделах современной математической физики. В частности, такие уравнения возникают в кинетической теории газов, в теории p-адических открыто-замкнутых струн и в теории переноса излучения в спектральных линиях (см. [1–5]).

В том случае, когда $\nu(K) := \int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx \neq 0$, при различных ограничениях на функции μ_0 и μ_1 уравнение (1.1) исследовалось в [6–8]. В этих работах построены положительные нетривиальные и ограниченные решения для уравнения (1.1). Изучены также некоторые асимптотические свойства построенных решений в $\pm\infty$. Актуальность рассматриваемой задачи подчеркивают и работы [9–12] для случая $\mu_0 \equiv 0$.

В настоящей работе при определенных условиях на μ_0, μ_1 удается доказать существование нетривиального неотрицательного суммируемого и ограниченного на множестве $\mathbb{R}$ решения $f(x)$ уравнения (1.1). Доказывается также, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. В конце работы приводятся различные примеры функций λ, K, μ_0 и μ_1, имеющие и теоретический, и прикладной характер.

2. Обозначения и вспомогательные факты

Пусть $y = Q(u)$ — определенная на множестве $\mathbb{R}$ нечетная и непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) существует число $\eta > 0$ такое, что $Q(u) \uparrow$ по u на отрезке $[-\eta, \eta]$ и $Q(\eta) = \eta$;

2) функция $y = Q(u)$ выпукла (вниз) на отрезке $[0, \eta]$;

3) уравнение $Q(u) = \varepsilon_0^2 u$ (где $\varepsilon_0 := \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \lambda(x) \in (0,1)$) обладает положительным решением ξ, причем $\xi < \eta$ (см. рис. 1).

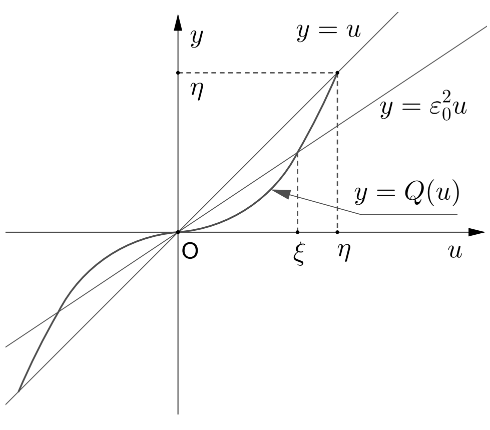

Рис. 1

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\int_0^\infty K(t)e^{-pt}dt = \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{2.1}$$

относительно неотрицательного числа p.

Из свойства (1.3) функции K и теоремы Больцано — Коши легко следует, что уравнение (2.1) имеет единственное положительное решение $p = p_0$.

Из результатов работы [13] вытекает следующая оценка снизу:

$$\int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))(1 - e^{-p_0 t})dt \geq \varepsilon_0(1 - e^{-p_0 x}), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.2}$$

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим нелинейное вспомогательное уравнение на полуоси с суммарно-разностным ядром:

$$Q(\psi(x)) = \int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)\psi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.3}$$

относительно искомой функции $\psi(x)$.

Для уравнения (2.3) введем следующие последовательные приближения:

$$Q(\psi_{n+1}(x)) = \int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))\lambda(t)\psi_n(t)dt,$$
$$\psi_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

С учетом неравенства (2.2), выпуклости (вниз) функции Q индукцией по n аналогично рассуждениям в [13] можно доказать, что

$$\begin{aligned}
&\psi_n(x) \downarrow \text{ по } n, && x \in \mathbb{R}^+,\\
&\psi_n(x) \geq \xi(1 - e^{-p_0 x}), && n = 0, 1, 2, \dots,\ x \in \mathbb{R}^+,\\
&\psi_n \in C(\mathbb{R}^+), && n = 0, 1, 2, \dots,\\
&\psi_n(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, && n = 0, 1, 2, \dots.
\end{aligned}$$

Из этих утверждений следует, что последовательность непрерывных функций $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел, когда $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x)$; причем предельная функция $\psi(x)$ из себя представляет монотонно неубывающую функцию на $\mathbb{R}^+$ и удовлетворяет следующему двустороннему неравенству:

$$\xi(1 - e^{-p_0 x}) \leq \psi(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Согласно теореме Б. Леви (см. [14]) функция $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению (2.3). Используя монотонность функций λ, ψ, свойства 1)–3) нелинейности Q и рассуждая, как в доказательстве теоремы 1 работы [13], убеждаемся, что при $\psi \in C(\mathbb{R}^+)$ существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \eta$$

и имеет место интегральная асимптотика

$$\eta - \psi \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

Прямой проверкой показываем, что нечетное продолжение функции ψ на множестве $(-\infty, 0)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -\psi(-x), & \text{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

является решением нелинейного интегрального уравнения на всей прямой

$$Q(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\lambda(t)\varphi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

и обладает свойствами

$$\varphi(x) \uparrow \quad \text{по} \quad x \quad \text{на} \quad \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

$$\eta \pm \varphi \in L_1(\mathbb{R}^{\mp}), \tag{2.6}$$

$$-\eta \leq \varphi(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

$$\varphi \in C(\mathbb{R}). \tag{2.8}$$

Приведенные утверждения в дальнейшем нам существенно понадобятся.

3. Формулировка и доказательство основной теоремы

Сначала заметим, что из свойств 1), 2) функции Q немедленно следует существование обратной функции G к функции Q: $G = Q^{-1}$.

Для краткости дальнейшего изложения введем обозначение

$$\Phi_\delta(x) := \delta(1 - \lambda(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

где δ — положительный числовой параметр.

Относительно функций μ_0 и μ_1 предположим выполнение следующих условий:

a) при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ функции $\mu_0(x, z), \mu_1(x, z) \uparrow$ по z на отрезке $[0, \eta]$;

b) функции μ_0 и μ_1 удовлетворяют условию Каратеодори по аргументу z на множестве $\mathbb{R} \times [0, \eta]$, т. е. при каждом фиксированном $z \in [0, \eta]$ функции μ_0 и μ_1 измеримы по x на $\mathbb{R}$ и почти при всех $x \in \mathbb{R}$ эти функции непрерывны по z на $[0, \eta]$;

c) выполняются неравенства

$$\mu_0(x, \Phi_\xi(x)) \geq \Phi_\xi(x), \quad \mu_0(x, \eta) \leq \Phi_\eta(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$0 \leq \mu_1(x, z) \leq \eta - G(\eta - z), \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in [0, \eta].$$

Имеет место следующая теорема существования.

Теорема. *При условиях* (1.2)–(1.7) *и* a)–c) *уравнение* (1.1) *имеет неотрицательное ограниченное и суммируемое на* $\mathbb{R}$ *решение* $f(x)$, *причем* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сперва наряду с уравнением (1.1) рассмотрим вспомогательное уравнение типа свертки на всей прямой

$$Q(F(x)) = \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)F(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

относительно искомой непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $F(x)$, где нелинейность удовлетворяет условиям 1)–3), а функции λ и K обладают свойствами (1.2)–(1.6).

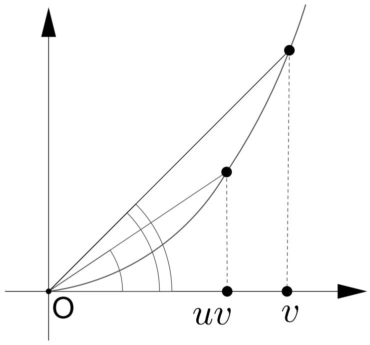

Рис. 2

Введем следующие последовательные приближения:

$$\begin{gathered} Q(F_{n+1}(x)) = \lambda(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t) F_n(t) dt, \\ F_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Используя свойства (1.2)–(1.6), 1)–3) функций λ, K, Q индукцией по n легко убеждаемся в достоверности следующих утверждений:

$$F_n(x) \downarrow \text{ по } n, \tag{3.4}$$

$$F_n(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.5}$$

$$F_n \in C(\mathbb{R}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.6}$$

Для последовательности функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ниже докажем оценку снизу

$$F_n(x) \geq \lambda(x) |\varphi(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

где $\varphi(x)$ — знакопеременное решение уравнения (2.4), обладающее свойствами (2.5)–(2.8). Для доказательства неравенства (3.7) нам понадобится оценка для выпуклых (вниз) функций

$$uQ(v) \geq Q(uv), \tag{3.8}$$

где $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \eta]$. Неравенство (3.8) при $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = \eta$ сразу следует из свойств 1)–3) функции Q, а при $u \in (0, 1), v \in (0, \eta)$ данное неравенство получается из монотонности функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 2):

$$\frac{Q(v)}{v} \geq \frac{Q(uv)}{uv}.$$

Вернемся к доказательству неравенства (3.7). При $n = 0$ оценка (3.7) сразу вытекает из свойств (2.7), (1.5) и из определения нулевого приближения в итерациях (3.3). Предположим, что (3.7) имеет место при некотором натуральном n. Тогда, учитывая (2.4), (3.8), неотрицательность ядра K и функции λ, а также нечетность функций Q, φ из (3.3) имеем

$$Q(F_{n+1}(x)) \geq \lambda(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t) \lambda(t) |\varphi(t)| dt$$

$$\geq \lambda(x) \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t) \lambda(t) \varphi(t) dt \right| = \lambda(x) |Q(\varphi(x))| = \lambda(x) Q(|\varphi(x)|) \geq Q(\lambda(x) |\varphi(x)|);$$

откуда в силу монотонности Q следует, что $F_{n+1}(x) \geq \lambda(x)|\varphi(x)|$, $x \in \mathbb{R}$. Итак, мы получили, что последовательность непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ обладает свойствами (3.4)–(3.7). Таким образом, существует

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где предельная функция $F(x)$ удовлетворяет двустороннему неравенству

$$\lambda(x)|\varphi(x)| \le F(x) \le \eta, \quad Q(F(x)) \le \eta\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |\varphi(x)| = \eta$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \lambda(x) = 1$, то из (3.9) вытекает, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \eta.$$

Из (3.5) сразу следует, что предельная функция $F(x)$ является монотонно неубывающей на множестве $\mathbb{R}$. Применяя предельную теорему Б. Леви, убеждаемся, что $F(x)$ — решение уравнения (3.2). Так как свертка ограниченных и суммируемых функций представляет из себя непрерывную функцию на $\mathbb{R}$ (см. [15]), то в силу непрерывности и монотонности функций Q, λ можно утверждать, что предельная функция F непрерывна на $\mathbb{R}$.

Таким образом, из приведенных утверждений в силу теоремы Дини заключаем, что сходимость последовательности функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ к функции $F(x)$ равномерна на каждом компакте из $\mathbb{R}$. Из (3.9) немедленно следует, что

$$0 \le \eta - F(x) \le \eta - \lambda(x)|\varphi(x)| = \eta(1-\lambda(x)) + \lambda(x)(\eta - |\varphi(x)|). \tag{3.10}$$

Так как $1-\lambda \in L_1(\mathbb{R}), \eta - |\varphi| \in L_1(\mathbb{R}), \varepsilon_0 \le \lambda \le 1$, то из (3.10) заключаем, что $\eta - F \in L_1(\mathbb{R})$. Для основного уравнения (1.1) теперь рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{gathered} f_{n+1}(x) = \mu_0(x, f_n(x)) + \lambda(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\mu_1(t, f_n(t))dt, \\ f_0(x) = \eta - Q(F(x)), \quad n = 0,1,2,\dots, \quad x \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{3.11}$$

Индукцией по n убедимся, что

A) $f_n(x)$ измеримы по x на $\mathbb{R}$, $n = 0,1,2,\dots$;

B) $f_n(x) \downarrow$ по n;

C) $f_n(x) \ge \Phi_\xi(x), \quad n = 0,1,2,\dots$, где функция $\Phi_\xi(x)$ задается согласно (3.1).

Измеримость нулевого приближения сразу следует из непрерывности функций F. Ниже докажем, что

$$f_1(x) \le f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

$$f_1(x) \ge \Phi_\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Сначала заметим, что из (3.2) следует

$$f_0(x) = \eta - Q(F(x)) = \eta - \eta\lambda(x) + \lambda(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\eta - F(t))dt$$

$$\ge \eta(1-\lambda(x)) = \Phi_\eta(x) \ge \Phi_\xi(x), \tag{3.13}$$

ибо $0 < \xi < \eta, F(x) \le \eta, x \in \mathbb{R}$.

Из (3.13), (3.11), (1.2), (1.5) и условия c) в силу монотонности и неотрицательности функций μ_0, μ_1 имеем

$$f_1(x) \ge \mu_0(x, \Phi_\xi(x)) \ge \Phi_\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Докажем теперь (3.12). Используя условие c), из (3.11) получим

$$f_1(x) \le \mu_0(x, f_0(x)) + \lambda(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\eta - G(\eta - f_0(t)))dt$$

$$\le \mu_0(x, \eta) + \lambda(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\eta - G(Q(F(t))))dt$$

$$\le \Phi_\eta(x) + \lambda(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\eta - F(t))dt$$

$$= \Phi_\eta(x) + \eta\lambda(x) - Q(F(x)) = \eta - Q(F(x)) = f_0(x).$$

Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}$

- $f_n(x)$ измерима на $\mathbb{R}$;
- $f_n(x) \le f_{n-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}$;
- $f_n(x) \ge \Phi_\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}$.

Тогда в силу условия Каратеодори (см. условие b)) из (3.11) получаем измеримость функции $f_{n+1}(x)$. Учитывая монотонность функций $\mu_0(x, z)$ и $\mu_1(x, z)$ по переменной z, а также неотрицательность функций λ и K из (3.11) и условия c) будем иметь

$$f_{n+1}(x) \le \mu_0(x, f_{n-1}(x)) + \lambda(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\mu_1(t, f_{n-1}(t))dt = f_n(x),$$

$$f_{n+1}(x) \ge \mu_0(x, \Phi_\xi(x)) \ge \Phi_\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, в силу утверждений A)–C) заключаем, что последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел при $n \to \infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причем

$$\Phi_\xi(x) \le f(x) \le \eta - Q(F(x)), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Заметим, что

$$\eta - Q(F) \in L_1(\mathbb{R}). \tag{3.15}$$

Действительно, последнее включение сразу следует из (1.2), (1.5), (1.6) и из $\eta - F \in L_1(\mathbb{R})$ с учетом соотношения

$$0 \le \eta - Q(F(x)) = \eta(1 - \lambda(x)) + \lambda(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\eta - F(t))dt.$$

Из (3.14) и (3.15) получаем, что

$$f \in L_1(\mathbb{R}).$$

Используя теорему Б. Леви, условие Каратеодори можем утверждать, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Для завершения доказательства нам осталось убедиться, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Действительно, так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} Q(F(x)) = Q(\lim_{x\to\pm\infty} F(x)) = Q(\eta) = \eta,$$

то из (3.14) приходим к завершению доказательства. Теорема полностью доказана.

4. Примеры функций λ, K, μ_0 и μ_1

Сначала приведем два примера функции Q, удовлетворяющих вышеприведенным условиям:

$$Q(u) = u^p, \quad Q(u) = au^p + (1-a)u, \quad u \in \mathbb{R},$$

где $p > 2$ — нечетное число, а $a \in (0, 1]$ — произвольное число.

В приложениях (см. [3; 4]) возникают следующие конкретные ядра:

$$\lambda(x) = 1 - (1-\varepsilon_0)e^{-\delta|x|}, \quad 0 < \varepsilon_0 < 1, \quad \delta > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$K(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}} e^{\frac{-x^2}{4\sigma}}, \quad \sigma > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$K(x) = \int_a^b e^{-|x|s} B(s) ds,$$

где $B(s)$ — положительная измеримая функция на $[a, b)$ $(0 < a < b \leq +\infty)$, причем

$$\int_a^b \frac{B(s)}{s} ds = \frac{1}{2}.$$

В качестве функций μ_0 и μ_1 можно выбрать следующие примеры:

- $\circ$ $\mu_0(x, z) = \dfrac{\Phi_\eta(x) z}{z + \Phi_{\eta-\xi}(x)}$, $z \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$;
- $\circ$ $\mu_0(x, z) = \dfrac{\Phi_\eta(x) z}{z + \Phi_{\eta-\xi}(x)} + \varepsilon(x) z^2$, $z \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, где $\varepsilon(x)$ — любая непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая двойному неравенству

$$0 \leq \varepsilon(x) \leq \frac{\Phi_\eta(x)\Phi_{\eta-\xi}(x)}{\eta^3 + \eta^2 \Phi_{\eta-\xi}(x)}, \quad x \in \mathbb{R};$$

- $\circ$ $\mu_1(x, z) = \eta - \sqrt[3]{\eta - z}$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in [0, \eta]$;
- $\circ$ $\mu_1(x, z) = \mathcal{L}(x)(\eta - \sqrt[p]{\eta - z})$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in [0, \eta]$, где $p > 2$ — нечетное число, а $\mathcal{L}(x)$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, принимающая значения из отрезка $[0, 1]$.

В конце отметим, что вопрос единственности построенного выше решения по-прежнему остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cercignani C.** The Boltzmann equation and its application. N Y: Springer, 1988. 455 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1039-9 .
2. **Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 687 с.
3. **Владимиров В.С., Волович Я.И.** О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // Теоретическая и математическая физика. 2004. Т. 138, №3. С. 355-368.
4. **Хачатрян Х.А.** О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны // Изв. РАН. Сер. математическая. 2018. Т. 82, №2. С. 172–193.
5. **Хачатрян Х.А.** О решении одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Немыцкого на всей оси // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2013. Т. 21, №2. С. 154–161.
6. **Хачатрян Х.А.** О положительной разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой // Изв. РАН. Сер. математическая. 2015. Т. 79, №2. С. 205–224.

7. **Енгибарян Н.Б.** Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2, № 1. С. 31–36.
8. **Хачатрян Х.А.** О положительных решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна — Немыцкого на всей прямой // Тр. Моск. мат. общества. 2014. Т. 75, №1. С. 1–14.
9. **Diekmann O.** Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biology. 1978. Vol. 6, no. 2. P. 109—130.
10. **Владимиров В.С.** О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн // Теоретическая и математическая физика. 2006. Vol. 149, № 3. P. 354—367. doi: 10.4213/tmf5522 .
11. **Gomez C., Prado H.** Trofimchuk S. Separation dichotomy and wavefronts for a nonlinear convolution equation // J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 420. P. 1—19. doi: 10.1016/j.jmaa.2014.05.064 .
12. **Жуковская Л.В.** Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // Теоретическая и математическая физика. 2006. Vol. 146, № 3. P. 402–409. doi: 10.4213/tmf2043 .
13. **Хачатрян Х.А.** О разрешимости одной граничной задачи в p-адической теории струн // Тр. Моск. мат. общества. 2018. Т. 79, №1. С. 117-132.
14. **Колмогоров А.Н., Фомин В.С.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004. 572 с.
15. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 499 с.

Поступила 18.11.2019
После доработки 22.01.2020
Принята к публикации 27.01.2020

Хачатрян Хачатур Агавардович
д-р физ.-мат. наук наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики НАН Армении,
г. Ереван;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, мех. мат. фак.,
г. Москва
e-mail: Khach82@rambler.ru

Петросян Айкануш Самвеловна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры высшей математики и физики
Национальный аграрный университет Армении,
г. Ереван
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, мех. мат. фак.,
г. Москва
e-mail: Haykuhi25@mail.ru

REFERENCES

1. Cercignani C. *The Boltzmann equation and its applications.* N Y: Springer, 1988. 455 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1039-9 .
2. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena.* Mineola: Dover, 2002, 916 p. ISBN: 9780486420028 . Original Russian text published in Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavlenii.* Moscow: Nauka Publ., 1966.
3. Vladimirov V.S., Volovich Ya.I. Nonlinear dynamics equation in p-adic string theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. doi: 10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29 .
4. Khachatryan Kh.A. On the solvability of certain classes of non-linear integral equations in p-adic string theory. *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 407–427. doi: 10.1070/IM8580 .

5. Engibaryan N.B. On a problem in non-linear radiative transfer. *Astrophysics*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 12–14. doi: 10.1007/BF01014505 .
6. Khachatryan Kh.A. On positive solutions of one class of nonlinear integral equations of Hammerstein–Nemytskii type on the whole axis. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2014, vol. 75, no. 1, pp. 1–12. doi: 10.1090/S0077-1554-2014-00226-0 .
7. Khachatryan Kh.A. Positive solubility of some classes of non-linear integral equations of Hammerstein type on the semi-axis and on the whole line. *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 411–430. doi: 10.1070/IM2015v079n02ABEH002748 .
8. Khachatryan Kh.A. On solution of a system of Hammerstein–Nemytskii type non-linear integral equations on whole axis. *Tr. Inst. Mat.*, 2013, vol. 21, no. 2, pp. 154–161 (in Russian).
9. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. *J. Math. Biology*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109—130.
10. Vladimirov V.S. Nonlinear equations for p-adic open, closed and open–closed strings. *Theoret. and Mathem. Physics*, 2006, vol. 149, no. 3, pp. 1604–1616. doi: 10.1007/s11232-006-0144-z .
11. Gomez C., Prado H., Trofimchuk S. Separation dichotomy and wavefronts for a nonlinear convolution equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, vol. 420, pp. 1—19. doi: 10.1016/j.jmaa.2014.05.064 .
12. Zhukovskaya L.V. Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory. *Theoret. and Math. Phys.*, 2006, vol. 146, no. 3, pp. 335–342. doi: 10.1007/s11232-006-0043-3 .
13. Khachatryan Kh.A. On the solvability of a boundary-value problem in p-adic string theory. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2018, pp. 101–115.
14. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis* (Two volumes in one, translated from the first Russian edition 1957–1961). United States: Martino Fine Books. 2012, 280 p. ISBN: 1614273049 . The 7th edition of Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza.* Moscow: Nauka Publ., 2004, 572 p.
15. Rudin W. *Functional Analysis.* N Y: McGraw-Hill, 1973, 397 p. ISBN: 978-0070542259 . Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz.* Moscow: Mir Publ., 1975, 499 p.

Received November 18, 2019
Revised January 22, 2020
Accepted January 27, 2020

Funding Agency: The study was funded by a grant from the Russian Science Foundation (project № 19-11-00223).

Khachatur Aghavardovich Khachatryan, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia, 0019, Yerevan, Republic of Armenia; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119991 Russia,
e-mail: Khach82@rambler.ru .

Haykanush Samvelovna Petrosyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Armenian National Agrarian University, 0009, Yerevan, Republic of Armenia; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119991 Russia, e-mail: Haykuhi25@mail.ru .

Cite this article as: Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan. On the construction of an integrable solution to one class of nonlinear integral equations of Hammerstein–Nemytskii type on the whole axis. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 278–287 .